AUTORIDADES RECTORALES
DE LA UNIVERSIDAD DEL ZULIA

Angel Lombardi
Rector

Antonio Castejón
Vicerrector Académico

Neuro Villalobos
Vicerrector Administrativo

Angel Larreal
Secretario

Iván Avila B.
Director de Ediluz

MAULIO RODRIGUEZ

ANALISIS DE SISTEMAS DE POTENCIA

Maracaibo, octubre de 1992

Publicación auspiciada
por la Editorial de la
Universidad del Zulia (EDILUZ)

1ª Edición, 1988
2ª Edición, 1992

D.R. © EDITORIAL DE LA UNIVERSIDAD DEL ZULIA
Apartado Postal 526 - Telf. 421799 - FAX (061) 421799
Maracaibo - Venezuela
ISBN 980-232-363-2



INTRODUCCION

Este libro ha sido preparado para un curso básico de Sistemas de Potencia, con 16 semanas de duración y 4 horas semanales de clases, para estudiantes de pregrado o de posgrado de Ingeniería Eléctrica. El curso en cuestión debe tener como prerrequisito fundamental conocimientos sobre teoría de redes en estado transitorio y en estado estable, operaciones básicas con matrices, operaciones con ecuaciones de estado, teoría y práctica de transformadores, de máquinas de corriente directa, de máquinas sincrónicas y de motores de inducción, así como también es deseable que tenga suficientes conocimientos sobre programación computacional.

Se pretende con este material que el estudiante aprenda a calcular las distintas variables eléctricas de tensiones, corrientes, potencia, etc., en un sistema de potencia en condiciones de régimen permanente, de régimen dinámico y en situaciones de los diferentes tipos de fallas; así como también que pueda obtener conocimientos precisos sobre la interrelación entre las potencias activas y reactivas con las magnitudes y ángulos de los voltajes.

El libro está preparado de manera tal que se puedan efectuar los cálculos en forma eficiente a mano y con poderosas herramientas como lo constituye el computador digital, conteniendo 124 ejemplos típicos y 113 problemas propuestos, la mayoría de los cuales han sido resueltos por estudiantes de Ingeniería Eléctrica.

El libro está compuesto por 9 Capítulos resumidos de la manera siguiente: En el Capítulo 1 se modelan los diferentes componentes de un sistema de potencia, tales como generadores, líneas, transformadores y cargas, formando los diagramas unifilar y de impedancia; además se introduce el sistema por unidad y conceptos sobre flujos de potencia. En el Capítulo 2 se estudian los métodos numéricos usados en el problema de flujos de potencia, tales como el método iterativo de Gauss-Seidel y el método Newton-Raphson;; se analizan también los flujos de potencia activa y reactiva en diferentes tipos de enlaces. En el Capítulo 3 se forma la matriz impedancia de barra por diferentes métodos y en diferentes situaciones, y se modifican estas matri-

ces cuando cambian las situaciones. En el Capítulo 4 se introduce el concepto de control de voltaje y del flujo de potencia reactiva mediante condensadores, cambiadores de tomas de los transformadores, y con la excitación de los generadores. En el Capítulo 5 se hacen despachos económicos de carga, despreciando y considerando las pérdidas de potencia activa en las líneas. En el Capítulo 6 se analizan los cortocircuitos trifásicos en un sistema de potencia usando el método del voltaje detrás de la reactancia subtransitoria, el método de superposición y el método de las matrices impedancias de barra. En el Capítulo 7 se introduce el concepto de las componentes simétricas y se construyen los diagramas de secuencia cero, positiva y negativa de un sistema de potencia para diferentes conexiones de generadores, transformadores y cargas. En el Capítulo 8 se analizan los diferentes cortocircuitos asimétricos y se aprovecha el concepto para estudiar el sistema de potencia bajo la condición de diferentes cargas asimétricas. En el Capítulo 9 se estudia la estabilidad transitoria de los generadores en un sistema de potencia con cortocircuitos trifásicos o con desconexión de líneas si el sistema contiene uno o varios generadores.

Las unidades utilizadas en este libro son las correspondientes al Sistema Internacional de Unidades (SI). Los problemas en su mayoría son resueltos en el sistema por unidad y en lo posible los resultados son transferidos a valores reales. El punto indica siempre la separación de las cantidades decimales y la coma la separación de las unidades de mil

Escribir un libro como éste requiere de la paciencia, de la dedicación y del trabajo de muchos años. Y sólo es posible si existe la suficiente motivación, una gran dosis de estímulo y una excelente colaboración. Yo he tenido la paciencia, la dedicación y el trabajo, y casi todos mis estudiantes de Sistemas de Potencia y algunos colegas profesores me han aportado la motivación, el estímulo y la colaboración. Es por ello que quiero agradecer a todos aquellos profesores y estudiantes que me han hecho sugerencias sobre el contenido del material o que me han indicado algunos errores del escrito original. En particular agradezco a los ingenieros LUCILA VARGAS y RAFAEL MANCILLA, por las correcciones que hicieron en la primera edición de este material.

Maulio Rodríguez

INDICE GENERAL

CAPITULO 1. REPRESENTACIONES DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA. Pág. 1

1. Introducción . . . 2
2. Generadores . . . 4
3. Líneas de Transmisión . . . 5
3.1 Líneas Cortas . . . 5
3.2 Líneas Medias . . . 6
3.3 Líneas Largas . . . 6
4. Transformadores . . . 8
4.1 Transformadores con Relación de Transformación Fuera de la Nominal . . . 10
5. Cargas . . . 11
6. Diagramas de Impedancia . . . 11
7. Diagrama Unifilar . . . 12
8. El Sistema por Unidad . . . 28
9. Conceptos sobre Flujos de Potencia . . . 28
9.1 Conceptos sobre los Flujos de Potencia Reactiva . . . 29
9.2 Corriente que llega a un Nodo en Función de las Potencias . . . 30
9.3 Corrientes que llegan a los Nodos en Función de los Voltajes en los Nodos y de las Admitancias de las Líneas . . . 32
9.4 Flujo de Potencia entre dos Nodos . . . 44
Problemas . . . 49

CAPITULO 2. METODOS NUMERICOS USADOS EN EL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA.

1. Definición del Problema de Flujos de Potencia . . . 50
2. Técnica Iterativa de Gauss . . .

Pág.

3. El Método Iterativo de Gauss-Seidel 54
4. Factor de Aceleración 55
5. El Método Newton-Raphson 58
6. Análisis del Problema de Flujo de Potencia 66
7. El Método Gauss-Seidel Aplicado al Problema de Flujo de Potencia 67
8. El Método Newton-Raphson aplicado al Problema de Flujo de Potencia 79
9. Tratamiento Especial a los Tipos de Barras 108
10. Flujo de Potencia entre Barras 110
10.1 Flujo de Potencia en Líneas Cortas 110
10.2 Flujo de Potencia en Líneas Medias 116
10.3 Flujo de Potencia entre dos Barras en donde se encuentra un Transformador con Relación de Transformación Fuera de la Nominal 118

Problemas 120

CAPITULO 3. FORMACION DE LA MATRIZ IMPEDANCIA DE BARRA.

1. Introducción 125
2. Formación de la Matriz Impedancia de Barra por el Método Nodal 125
2.1 Topología de Redes 125
2.2 La Matriz Incidencia 128
2.3 La Matriz Impedancia Primitiva 130
2.4 La Matriz Impedancia de Barra 130
3. Formación de la Matriz Impedancia de Barra por el Método de Inyección de Corrientes 134
4. Formación de la Matriz Impedancia de Barra por Algoritmo 138
4.1 Forma de Agregar Elementos Ramas 139
4.2 Forma de Agregar Elementos Uniones 140
4.3 Formación de la Impedancia de Barra por Algoritmo Tomando en Cuenta las Inductancias Mutuas 156
4.4 Modificación de la Matriz Impedancia de Barra al Sacar un Elemento de la Red 168
5. Reducción de Redes Mediante el Método de Partición de Matrices 172
6. Matriz Impedancia de Barra con Cambio de Referencia 181

Problemas 185

CAPITULO 4. CONCEPTOS DEL CONTROL DE VOLTAJE Y DEL FLUJO DE POTENCIA REACTIVA.

1. Introducción 191
2. Cambio de Voltaje en Terminales Debido a Colocación de Condensadores en un Sistema Simple 193
3. Variación del Voltaje en Terminales Debido al Ajuste del Cambiador de Toma de un Transformador 196
4. Variación del Voltaje en Terminales debido al Cambio de la Excitación de los Generadores 205
5. Variación del Voltaje en Terminales de un Sistema debido a Colocación de Condensadores en ellos 210
6. Variación del Voltaje en Terminales de un Sistema Debido a ajustes del cambiador de toma de los transformadores . . . 216
7. Variación de Voltaje en Terminales de un Sistema de Potencia debido a cambio en la excitación del Generador 221

Problemas 225

CAPITULO 5. DESPACHO ECONOMICO DE CARGA

1. Introducción 229
2. Concepto de Costo Incremental 230
3. Criterio para un Despacho Económico 231
4. Despacho Económico de Carga en un Sistema de Potencia . . 235

Problemas 271

CAPITULO 6. FALLAS SIMETRICAS

1. Introducción 277
2. Corriente en un Circuito RL 277
3. Corriente de Cortocircuito en Máquinas Sincrónicas sin Carga 286
4. Selección de Interruptores de las Máquinas Sincrónicas 289
5. Corriente de Cortocircuito en Máquinas Sincrónicas con Carga 292
5.1 Método del Voltaje Detrás de la Reactancia Subtransitoria 292

Pág.

5.2 Método de Superposición 298
6. Cálculo de las Corrientes de Cortocircuito por Intermedio de la Matriz Impedancia de Barra 324
Problemas 331

CAPITULO 7. COMPONENTES SIMETRICAS Y DIAGRAMAS DE SECUENCIA.

1. Introducción 337
2. Conversión de Voltajes y Corrientes de Fase a Voltajes y Corrientes de Secuencia 337
2.1 El operador a sus Relaciones 340
2.2 La Transformación Lineal P a través de los Valores y Vectores Característicos. 342
3. La Corriente de Secuencia Cero en los Sistemas de 3 y 4 Hilos 354
4. La Potencia en Función de las Componentes Simétricas 361
5. Impedancias Asimétricas 368
6. Diagramas de Secuencia 375
6.1 Diagramas de Secuencia de Generadores sin Carga 375
6.2 Diagramas de Secuencia de Líneas de Transmisión 378
6.3 Diagramas de Secuencia de los Transformadores 378
6.3.1 Conexión Estrella-Estrella sin Aterramiento 379
6.3.2 Conexión Estrella-Estrella con el Primario Aterrado 379
6.3.3 Conexión Estrella-Triángulo sin Aterramiento. 379
6.3.4 Conexión Triángulo-Triángulo 380
6.3.5 Conexión Estrella-Triángulo con Aterramiento 381
6.3.6 Conexión Estrella-Estrella Aterrada en ambos lados 382
6.4 Diagramas de Secuencia de las Cargas 382
6.5 Diagramas de Secuencia de un Sistema de Potencia 384
7. Desfase de las Corrientes y de los Voltajes del Primario y Secundario de los Transformadores 389
7.1 Transformador Monofásico 389
7.2 Conexión Estrella-Estrella 389
7.3 Conexión Triángulo-Triángulo 392
7.4 Conexión Estrella-Triángulo 394
7.5 Conexión Triángulo-Estrella 402
7.6 Resumen de la Conexión de los Transformadores. 418
Problemas 421

CAPITULO 8. FALLAS ASIMETRICAS

Pág.

1. Introducción 426
2. Falla de línea a Tierra. 429
3. Falla de Línea a Línea 441
4. Falla de Línea a Línea y Tierra 450
5. Análisis de Fallas Asimétricas Tomando en cuenta las Corrientes de Prefalla 459
6. Fallas Asimétricas a través de Impedancias 495
6.1 Falla de Línea a Tierra 495
6.2 Falla de Línea a Línea 497
6.3 Falla de Línea a Línea y Tierra 499
7. Análisis de Redes Eléctricas Trifásicas con Cargas Desbalanceadas 502
8. Análisis de Fallas Asimétricas Usando el Método de las Matrices de Impedancias de Secuencia de las Barras. 520
8.1 Falla de Línea a Tierra 520
8.2 Falla de Línea a Línea 524
8.3 Falla de Línea a Línea y Tierra 527
Problemas 536

CAPITULO 9. ESTABILIDAD EN LOS SISTEMAS DE POTENCIA.

1. Introducción 545
2. Máquinas Sincrónicas. 546
2.1 Máquina Sincrónica de Rotor Cilíndrico 546
2.2 Máquina Sincrónica con Rotor de Polos Salientes 548
3. Expresiones de Potencia Transferida en Función de Angulos de Potencia. 557
4. Modelo de la Máquina Sincrónica con Rotor de Polos Salientes en el Estado Transitorio 558
5. Estabilidad Transitoria 563
6. Consideraciones Mecánicas sobre las Máquinas Sincrónicas. 564
7. La Ecuación de Oscilación y la Potencia de Aceleración 565
8. Oscilación de una sola Máquina con respecto a una Barra Infinita. Método de Areas Iguales 567

		Pág.
9.	Relación entre el Angulo Crítico y el Tiempo Crítico	570
10.	Oscilación de una Máquina Sincrónica cuando ocurre un Cortocircuito en el Sistema	579
11.	Oscilación de una Máquina Sincrónica ante una Desconexión de Línea	599
12.	Solución de la Ecuación de Oscilación por el Método Punto a Punto	603
13.	Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden	610
13.1	El Método de Euler	612
13.2	El Método de Euler Modificado	613
13.3	El Método Runge Kutta de Segundo Orden	614
13.4	El Método Runge Kutta de Cuarto Orden	616
14.	Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden	618
14.1	El Método de Euler	619
14.2	El Método Runge Kutta de Cuarto Orden	621
15.	Solución de la Ecuación de Oscilación a través de las Ecuaciones de Estado	633
16.	Estabilidad Multimáquinas	641
16.1	La Ecuación de Potencia Generada en Sistemas Multimáquinas	642
16.2	La Ecuación de Oscilación con respecto a una Referencia	643
16.3	Ecuación de Admitancia para las Cargas	645
16.4	Procedimiento para el Análisis de Estabilidad Multimáquina	645
Problemas		662
BIBLIOGRAFIA		671

CAPITULO I

REPRESENTACIONES DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA

1. INTRODUCCION

El Power System Engineering Committee de la IEEE define al sistema de potencia "como una red formada por unidades generadoras eléctricas, cargas y/o líneas de transmisión de potencia, incluyendo el equipo eléctrico asociado, conectado eléctricamente o mecánicamente a la red"[1]. Igualmente el IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronics Terms define al sistema de potencia como "las fuentes de potencia eléctrica, conductores y equipo requerido para suplir potencia eléctrica"[2].

Según las definiciones anteriores, un sistema de potencia está formado entonces por generadores, líneas de transmisión, transformadores y cargas. En este Capítulo se describe brevemente cada uno de estos elementos y se deriva su modelo a utilizar en el resto del material. Asimismo se describe la forma de representar a cada uno de los elementos en particular y al sistema en general. Por último se estudia la forma de utilizar el sistema de valores por unidad y se derivan algunas fórmulas básicas sobre corrientes, voltajes y flujos de potencia.

En los sistemas trifásicos balanceados es conveniente simplificar los circuitos y representarlos y analizarlos en forma monofásica. De esta manera se estudiará una sola fase pero en el entendido que las otras dos fases llevan corrientes de la misma magnitud y poseen impedancias iguales a la de la fase estudiada. La línea de retorno en el sistema trifásico puede realmente no existir, pero en la representación monofásica se incluirá una línea de retorno con impedancia igual a cero.

1. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Julio 1982. Páginas 1894-1898.
2. Dictionary of Electrical and Electronics Terms, 1984. Página 679.

2. GENERADORES

Los generadores según su construcción están clasificados en generadores con rotor cilíndrico y en generadores con rotor de polos salientes. Un generador de rotor cilíndrico está formado básicamente por un bobinado trifásico en el estator y por un bobinado monofásico en el rotor, el cual una vez energizado con corriente directa produce un campo magnético ϕ_f estacionario con respecto al rotor, pero rotativo con respecto al estator. Este campo magnético induce voltajes en las bobinas del estator iguales en magnitud, $|E|$, pero desfasados en tiempo, ya que las corta en tiempos diferentes. El voltaje E de cada fase del estator está atrasado 90° del campo magnético ϕ_f. Si se aplica una carga balanceada a los terminales trifásicos del estator, las corrientes resultantes I producen un campo magnético ϕ_a en fase con esas corrientes, que además rota en el estator a la misma velocidad y en la misma dirección del campo principal ϕ_f. Este campo magnético ϕ_a sumará o restará al campo principal, dependiendo del factor de potencia de la corriente. Los efectos combinados de los campos ϕ_f y ϕ_a producen en el entrehierro un campo resultante ϕ_r, el cual induce en el entrehierro un voltaje E_r proporcional en magnitud a ϕ_r, pero atrasado 90°. El voltaje en los terminales de los bobinados de la armadura es igual al voltaje generado en el entrehierro E_r menos la caída de tensión en el bobinado, es decir

$$V = E_r - RI - jx_L I \qquad 1.1$$

siendo R la resistencia óhmica del bobinado de la armadura y X_L la reactancia de dispersión. En la figura 1.1 se muestra el diagrama vectorial de voltajes, corrientes y campos magnéticos.

El voltaje $X_a I$ es la caída de tensión debido al campo de la armadura ϕ_a, llamado voltaje debido a la reacción de la armadura y es la diferencia entre el voltaje E producido por el campo principal ϕ_f y el voltaje E_r producido por el campo resultante ϕ_r en el entrehierro. La reactancia X_a es llamada reactancia de reacción de la armadura. Esta reactancia se suma a la reactancia de dispersión X_L produciéndose una reactancia total X, la cual es llamada reactancia sincrónica. De esta manera

$$V = E_r - jX_L I = E - jX_a I - jX_L I - RI$$
$$= E - j(X_a + X_L) I - RI = E - jXI - RI \qquad 1.2$$

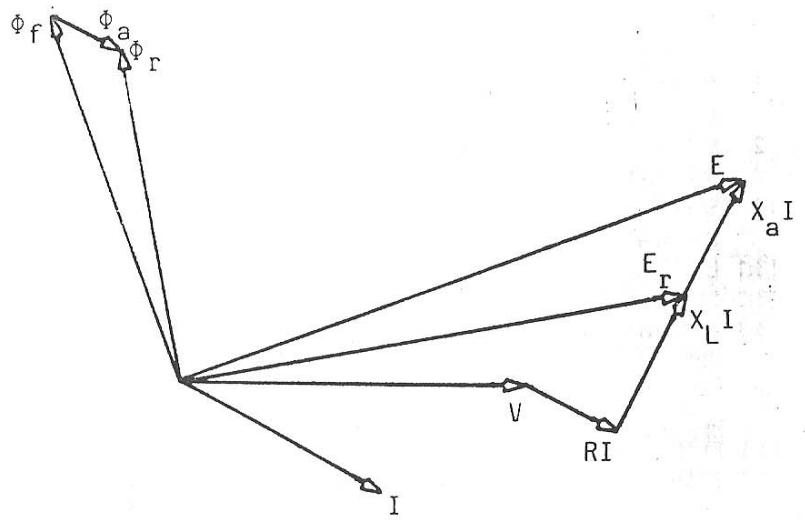


Fig. 1.1

El diagrama vectorial de voltajes y corrientes simplificado se muestra en la figura 1.2 y el circuito equivalente del generador con rotor cilíndrico, enseñando una sola fase, se muestra en la figura 1.3.

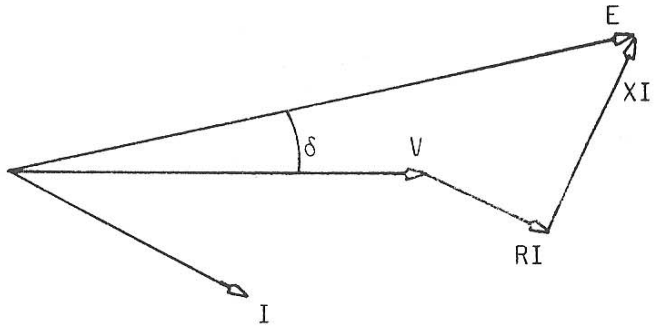


Fig. 1.2

El análisis del generador con rotor de polos salientes es más complicado porque el entrehierro entre estator y rotor no es simétrico, lo cual hace que en los ejes directo y en cuadratura el campo magnético ϕ_a sea diferente, pro-

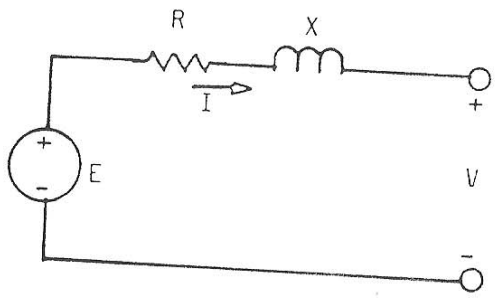


Fig 1.3

duciendo diferentes valores de reactancia de reacción de armadura en esos ejes. Por esta razón no se puede representar esa máquina en un solo circuito. En el Capítulo correspondiente a Estabilidad de los Sistemas de Potencia se ofrecen más detalles.

3. LINEAS DE TRANSMISION

La línea de transmisión es el elemento del sistema de potencia que se encarga de transportar energía desde el sitio en donde se genera hasta el sitio en donde se consume o se distribuye. Normalmente tiene cuatro parámetros: resistencia e inductancia que constituyen la impedancia en serie de la línea y la capacidad y la conductancia que determinan la admitancia en paralelo entre conductores o entre fase y neutro.

La resistencia en serie es la resistencia óhmica del conductor y su valor en ohmios depende de su característica física y de su temperatura.

La inductancia en serie es la autoinductancia de la línea debido al campo magnético y depende de las características físicas de los conductores y del medio en donde se encuentren. La conductancia en paralelo depende de las corrientes de fuga en los aisladores que soportan a las líneas en las torres o columnas. Estas corrientes de fuga y por ende las pérdidas de potencia debido a ellas, son muy pequeñas y en condiciones normales se pueden despreciar. La capacitancia en paralelo depende también de las características físicas de los conductores, de la forma como estén colocados, del medio en donde se encuentren y del potencial a que estén sometidos.

La clasificación de las líneas según su longitud se hace en base a las aproximaciones admitidas al operar con sus parámetros. Esta clasificación es: líneas cortas hasta 80 Km. de longitud, líneas medias entre 80 y 240 Km. de longitud y líneas largas de más de 240 Km. de longitud.

3.1 LINEAS CORTAS

En las líneas cortas se desprecia la capacitancia en paralelo y se toma en cuenta solamente la resistencia y la inductancia en serie en forma concentrada, tal como se indica en la figura 1.4.

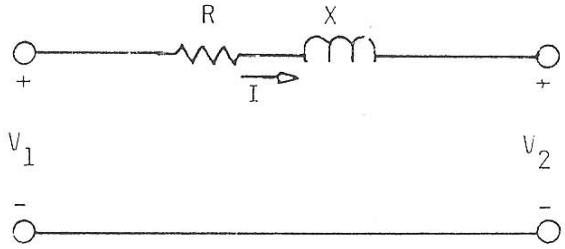


Fig. 1.4

V_1 y V_2 son los voltajes al comienzo y al final de la línea respectivamente. La relación entre estos voltajes es

$$V_1 = V_2 + RI + jXI \qquad 1.3$$

3.2 LINEAS MEDIAS

En las líneas de longitud media, además de los parámetros resistencia e inductancia en serie, se toma en cuenta la capacitancia en paralelo. Muy a menudo se utiliza el circuito normal π en donde se representa la admitancia total Y, debida a la capacitancia total C de la línea, dividida en dos partes iguales y colocadas en ambos extremos de la línea, tal como se indica en la figura 1.5

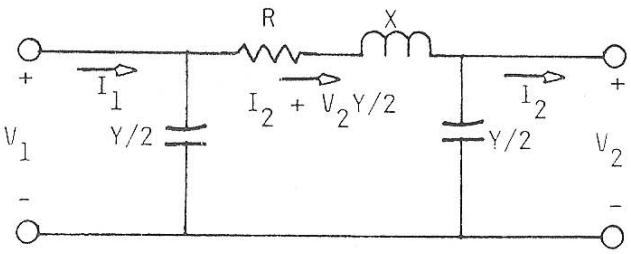


Fig. 1.5

La relación entre voltajes y corrientes en ambos extremos de la línea es

$$V_1 = V_2 + Z(V_2 Y/2 + I_2) = V_2(ZY/2 + 1) + ZI_2 \qquad 1.4$$

$$I_1 = I_2 + V_2 Y/2 + V_1 Y/2$$

$$= (1 + ZY/2)I_2 + Y(1 + ZY/4)V_2 \qquad 1.5$$

3.3 LINEAS LARGAS

Las líneas de longitud larga necesitan una mejor representación que las líneas anteriores. Se consideran los efectos exactos de resistencia, inductancia y capacitancia en forma incremental a lo largo de la línea. Esto lleva siempre a soluciones en forma de funciones hiperbólicas. En este libro se considerarán solamente las líneas de longitud corta y media.

4. TRANSFORMADORES

El transformador es el elemento del sistema de potencia que se encarga de transformar los voltajes y corrientes de un nivel a otro. El transformador en su forma más simple consiste en dos bobinas (primario y secundario) entrelazadas por el mismo circuito magnético, bien sea el transformador monofásico o el transformador trifásico estudiado en forma monofásica. Si se desprecian las pérdidas de potencia en el núcleo magnético y las corrientes de excitación, el transformador se puede representar en las formas indicadas en la figura 1.6, en donde la impedancia o admitancia del bobinado secundario está referida al bobinado primario y las de los dos bobinados están incluidas en la impedancia Z o en la admitancia Y.

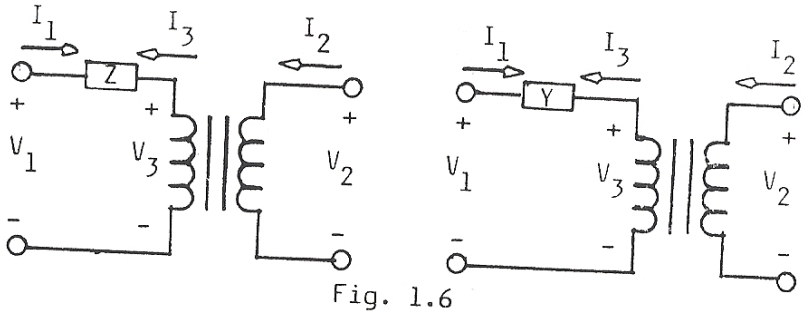


Fig. 1.6

La relación de transformación es

$$n = \frac{V_3}{V_2} = \frac{I_2}{I_3} \qquad 1.6$$

siendo V_3 el voltaje inducido en el primario, V_2 el voltaje inducido en el secundario, I_3 la corriente del primario e I_2 la corriente del secundario.

Como se verá más adelante, en valores por unidad la relación de transformación de cualquier transformador es la unidad, por lo que en estas condiciones se tiene que

$$V_3 = V_2 \qquad I_3 = I_2 \qquad 1.7$$

e

$$I_1 = \frac{V_1 - V_3}{Z} = (V_1 - V_3)Y = (V_1 - V_2)Y = \frac{V_1 - V_2}{Z} \qquad 1.8$$

$$I_2 = I_3 = -I_1 = (V_2 - V_1)Y \qquad 1.9$$

En forma de redes de dos puertos se tiene entonces que

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad 1.10$$

Los elementos de la diagonal de la matriz Y son la suma de las admitancias unidas a su respectivo puerto y los elementos fuera de la diagonal son las admitancias entre los puertos con signo negativo. La representación circuital del transformador en valores por unidad es entonces la que se indica en la figura 1.7.

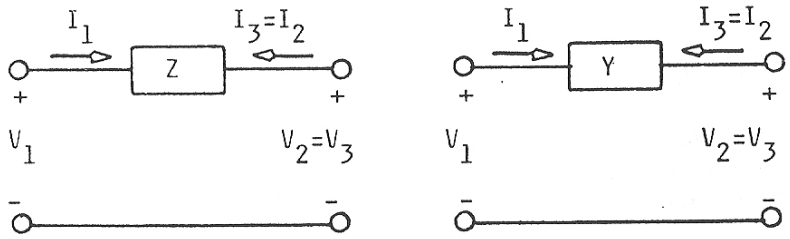


Fig. 1.7

4.1 TRANSFORMADORES CON RELACION DE TRANSFORMACION FUERA DE LA NOMINAL (CON CAMBIADORES DE TOMAS).

En los sistemas de potencia comúnmente se da el caso de que aparezcan transformadores en paralelo o formando partes de un anillo y que sus relaciones de transformación no son iguales. En estos casos algunos transformadores deben salir de su relación de transformación nominal de manera de que se mantengan los mismos voltajes en los extremos en paralelo, por lo cual su representación no puede ser igual a la mostrada en la figura 1.7.

Sea un transformador que ha quedado con una relación de transformación fuera de la nominal representado por la figura 1.8. La relación de transformación en valores por unidad es entonces diferente a uno y se define como

$$t = \frac{V_3}{V_2} \qquad 1.11$$

por lo que

$$V_3 = tV_2 \qquad I_3 = I_2/t \qquad 1.12$$

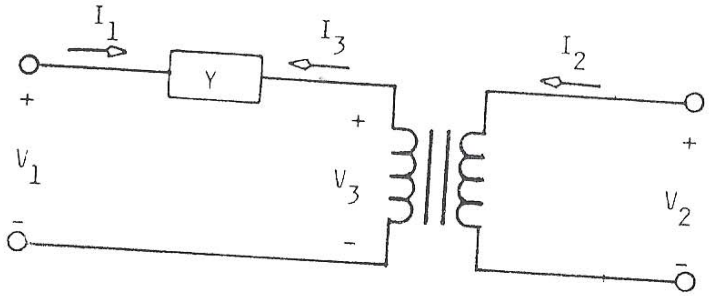


Fig. 1.8

Por conveniencia todo el diagrama de la figura 1.8 se dividirá en dos bloques como se indica en la figura 1.9 y se analizarán los bloques individualmente.

En el bloque 1:

$$I_1 = Y(V_1 - V_3) = YV_1 - tYV_2 \qquad 1.13$$

$$I_3 = -I_1 = Y(V_3 - V_1) = tYV_2 - YV_1 \qquad 1.14$$

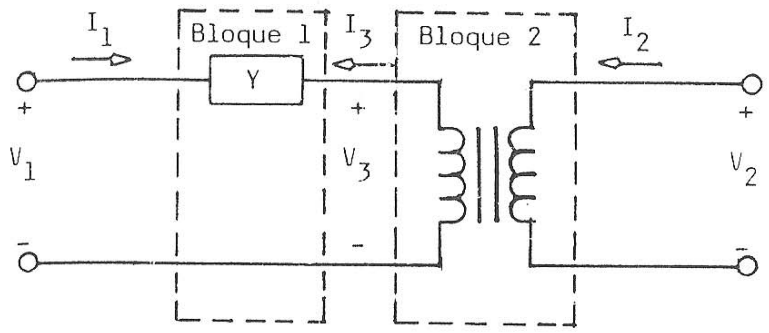


Fig. 1.9

En el bloque 2:

$$I_2 = tI_3 = t^2YV_2 - tYV_1 \qquad 1.15$$

y en forma de redes de dos puertos se tiene

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & -tY \\ -tY & t^2Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad 1.16$$

La representación circuital del transformador con relación de transformación fuera de la nominal y en valores por unidad se muestra en la figura 1.10.

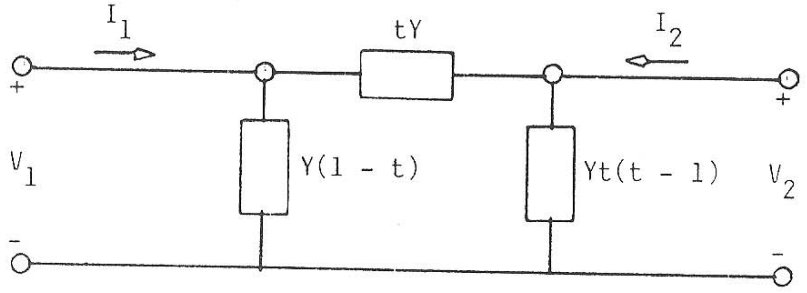


Fig. 1.10

En función de la impedancia del transformador en lugar de la admitancia se tiene que

$$\frac{1}{tY} = \frac{Z}{t} \qquad \frac{1}{Yt(t-1)} = \frac{Z}{t(t-1)} \qquad 1.17$$

$$\frac{1}{Y(1-t)} = \frac{Z}{1-t} \qquad 1.18$$

y la representación circuital se muestra en la figura 1.11.

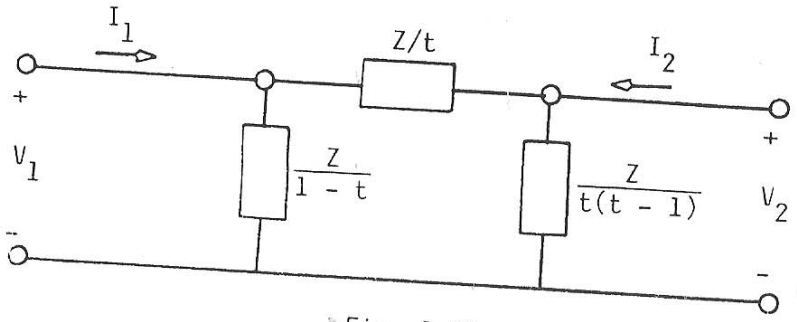


Fig. 1.11

5. CARGAS

La carga es el elemento del sistema de potencia que consume la potencia generada en el generador, transportada por las líneas de transmisión y acondicionada para ser usada por el transformador. Las cargas pueden ser elementos estáticos pero también pueden ser máquinas rotativas. En cualquier caso, cuando la circunstancia lo requiera, la carga puede ser representada por impedancias o admitancias como se indica en la figura 1.12.

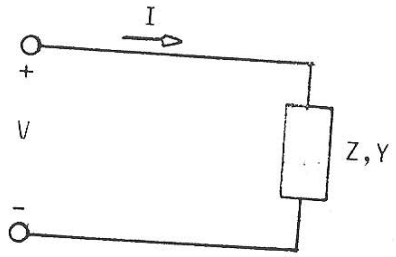


Fig. 1.12

La relación entre voltaje y corriente es

$$V = ZI = I/Y \qquad 1.19$$

6. DIAGRAMAS DE IMPEDANCIAS

En secciones anteriores se estudió la forma de representar a las diferentes partes de un sistema de potencia. Para analizar diferentes situaciones del sistema, estas partes pueden ser enseñadas juntas en un circuito equivalente referido al mismo lado de uno de los transformadores y es llamado diagrama de impedancias es la representación monofásica de un sistema trifásico equilibrado y está compuesto por una sola fase del sistema trifásico y un neutro de retorno. En la mayoría de los casos esta representación es suficiente para resolver un sistema trifásico equilibrado. En la figura 1.13 se enseña el diagrama de impedancias de un sistema formado por un generador, transformador, línea de transmisión corta, transformador y carga.

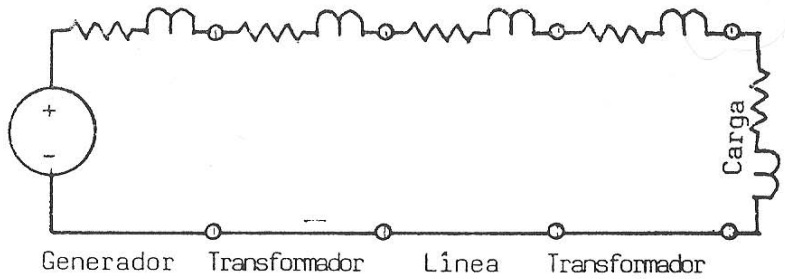


Fig. 1.13

7. DIAGRAMA UNIFILAR

El diagrama unifilar es otra forma de representar a un sistema de potencia trifásico, enseñando sus componentes más esenciales en una forma muy simplificada. La importancia de estas componentes puede cambiar de acuerdo al problema que se desee resolver y la cantidad de ellas a incluir en el diagrama depende del fin que se desea. De esta manera, una máquina rotativa se representa por un círculo, incluyendo en su interior la identificación de la máquina. Una línea de transmisión se representa por una simple línea, excluyendo la conexión del neutro. Los transformadores se representan por un transformador de dos bobinas, indicando de ser necesario el tipo de conexión. Los

interruptores y las cargas se representan por rectángulos, identificados en cada caso. Los nodos pueden representarse por puntos de unión o por barras, si esos nodos tienen una significación importante en el problema. Los valores de las diferentes componentes pueden darse en valores reales o valores por unidad. Estos diagramas pueden convertirse fácilmente en diagramas de impedancias o viceversa. En la figura 1.14 se muestra el diagrama unifilar del sistema de la figura 1.13.

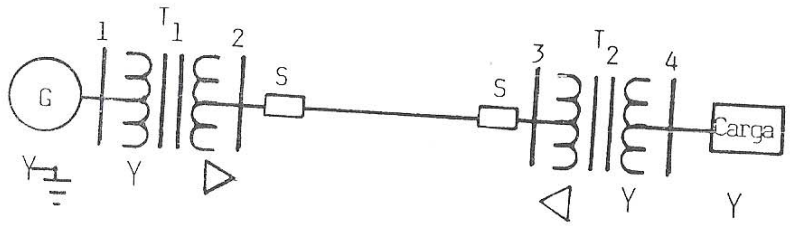


Fig. 1.14

8. EL SISTEMA POR UNIDAD

En los sistemas de potencia los cálculos relacionados con los elementos del sistema son a menudo efectuados en la forma de por unidad, es decir, todas las cantidades son expresadas como una fracción decimal de valores de base que son seleccionados apropiadamente. Esta forma de cálculo tiene ciertas ventajas fundamentales: 1) Las constantes de las máquinas rotativas y de los transformadores son casi siempre las mismas cuando se expresan en valores por unidad; 2) Se evita el estar refiriendo cantidades de un lado a otro de los transformadores; 3) Se evita el reconocimiento de la conexión triángulo o estrella de los transformadores; 4) Se evita el estar trabajando con cantidades demasiado grandes; 5) Es muy útil en la simulación de los sistemas de potencia en las computadoras analógica y digital.

Las cantidades de voltajes, corrientes, potencias activas, reactivas y aparentes, resistencias, reactancias, impedancias, conductancias, susceptancias y admitancias, pueden ser trasladadas en la forma de por unidad de la manera siguiente:

$$\text{Cantidad por Unidad} = \frac{\text{Cantidad Real}}{\text{Cantidad Base}} \qquad 1.20$$

en donde la cantidad real se refiere a la cantidad en voltios, amperios, vatios, ohmios, etc.

De cierta manera los valores de las cantidades base son seleccionados arbitrariamente, pero deben mantenerse las relaciones básicas que rigen las leyes de los circuitos eléctricos. El problema en valores por unidad debe resolverse en una sola base. Usualmente se seleccionan primero como valores base la potencia aparente y el voltaje y las otras cantidades quedarán relacionadas con éstas. El valor de la potencia aparente base debe ser la misma en cada una de las partes del sistema. Cuando se encuentra un transformador el valor del voltaje base es diferente en cada lado del transformador y difieren en la relación de transformación de ese transformador.

Cuando se selecciona una base, normalmente se toman como valores base los valores nominales de los generadores y de los transformadores. De no hacerlo se tendrá que llevar sus valores por unidad a la nueva base seleccionada. Si los valores nominales de los generadores y de los transformadores son diferentes, se toma como base a los valores nominales de voltaje y potencias aparentes más repetidos, con lo que se reducirá el número de transformaciones a la nueva base.

En un sistema monofásico se tienen las siguientes relaciones de base:

$$S_{bl\phi} = V_{bl\phi} \times I_{bl\phi} \qquad 1.21$$

$$Z_{bl\phi} = \frac{V_{bl\phi}}{I_{bl\phi}} = \frac{(V_{bl\phi})^2}{S_{bl\phi}} \qquad 1.22$$

EJEMPLO 1

Un generador monofásico de 5 KVA, 220 voltios, 60 Hz, X = 5 ohmios, alimenta a una carga de 4 KVA con factor de potencia de .9 en atraso y 220 voltios. Calcule el voltaje generado.



Tomándose como base en la carga a

$$V_{bl\phi} = 220 \text{ voltios} \qquad S_{bl\phi} = 5 \text{ KVA}$$

se tiene

$$I_{bl\phi} = \frac{S_{bl\phi}}{V_{bl\phi}} = \frac{5000}{220} = 22.727 \text{ amperios}$$

$$V_{pu} = \frac{V_{real}}{V_{base}} = \frac{220|0^\circ}{220} = 1.0|0^\circ \text{ pu}$$

$$Z_{bl\phi} = \frac{(V_{bl\phi})^2}{S_{bl\phi}} = \frac{(220)^2}{5000} = 9.68 \text{ ohmios}$$

$$X_{pu} = \frac{X_{real}}{X_{base}} = \frac{5.00}{9.68} = .5165 \text{ pu}$$

$$(S_{carga})_{pu} = \frac{(S_{carga})_{real}}{Sbl\phi} = \frac{4|25.842^\circ}{5.0}$$

$$= .8|25.842^\circ \text{ pu}$$

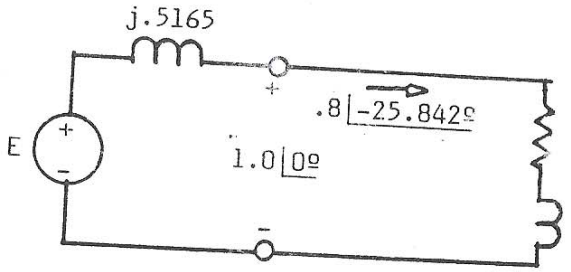
$$I_{pu} = \frac{S^*_{pu}}{V^*_{pu}} = \frac{.8|-25.842^\circ}{1.0|0^\circ} = .8|-25.842^\circ \text{ pu}$$

$$E_{pu} = V + jXI = 1.0|0^\circ + .5165|90^\circ \times .8|-25.842^\circ$$

$$= 1.180 + j.3718 = 1.237|17.4916^\circ$$

$$E = 220 \times 1.327|17.4916^\circ = 272.1814|17.4916^\circ \text{ volts.}$$

El diagrama de impedancias en valores por unidad se enseña en la figura siguiente:



Cuando se aplica a sistemas trifásicos, los valores base a ser utilizados en el sistema por unidad, se seleccionan de manera que cumplan las siguientes relaciones:

$$S_{b3\phi} = 3 \times S_{bl\phi} \qquad V_{bLL} = \sqrt{3}\, V_{bLN} \qquad 1.23$$

$$\sqrt{3}\ I_b(\text{por fase } \Delta) = I_b(\text{por fase Y}) \qquad 1.24$$

$$Z_b(\text{por fase } \Delta) = 3\, Z_b(\text{por fase Y}) \qquad 1.25$$

Los factores $\sqrt{3}$ y 3 que relacionan a las cantidades de voltios, amperios y ohmios en las conexiones estrella y triángulo de sistemas trifásicos balanceados son tomados en cuenta automáticamente por sus respectivos valores base. De esta manera los problemas trifásicos pueden resolverse en valores por unidad como si fueran problemas monofásicos sin importar el tipo de conexión de los transformadores, tomando en cuenta solamente la relación de transformación para hacer el cambio de voltaje base de un lado al otro.

Se pueden derivar expresiones que permitan calcular los valores por unidad directamente a partir de los valores trifásicos. Los valores base de las cantidades trifásicas son entonces

$$I_b = \frac{S_{bl\phi}}{V_{bl\phi}} = \frac{S_{b3\phi}/3}{V_{bLL}/\sqrt{3}} = \frac{S_{b3\phi}}{\sqrt{3}V_{bLL}} \qquad 1.26$$

$$Z_b = \frac{V_{bl\phi}}{I_{bl\phi}} = \frac{(V_{bl\phi})^2}{S_{bl\phi}} = \frac{(V_{bLL}/\sqrt{3})^2}{S_{b3\phi}/3} = \frac{(V_{bLL})^2}{S_{b3\phi}} \qquad 1.27$$

De ahora en adelante se usarán exclusivamente las fórmulas relacionadas con los sistemas trifásicos para el análisis de los sistemas de potencia, por lo que se eliminarán los índices indicadores de cantidades monofásicas o trifásicas. Se usan entonces las siguiente expresiones

$$I_b = \frac{S_b}{\sqrt{3}\, V_b} \qquad 1.28$$

$$Z_b = \frac{V_b^2}{S_b} = \frac{(V_b,\ KV)^2 \times 1000}{KVA_b} = \frac{(V_b,\ KV)^2}{MVA_b} \qquad 1.29$$

Entendiéndose que I_b y V_b son corrientes y voltajes de línea, S_b la potencia aparente total trifásica y Z_b la impedancia de fase.

Para derivar las expresiones que permitan pasar los valores por unidad de una base a otra, debe recordarse que los valores reales son siempre los mismos, sin importar la base seleccionada. Si se quiere pasar valores por unidad de la base 1 a la base 2, se tiene que

$$Z(\Omega) = (Z_{pu})_1 \times (Z_b)_1 = (Z_{pu})_2 \times (Z_b)_2 \qquad 1.30$$

de donde

$$(Z_{pu})_2 = (Z_{pu})_1 \times \frac{(Z_b)_1}{(Z_b)_2} = (Z_{pu})_1 \times \frac{\frac{(V_b)_1^2}{(S_b)_1}}{\frac{(V_b)_2^2}{(S_b)_2}}$$

$$= (Z_{pu})_1 \times \frac{(V_b)_1^2}{(V_b)_2^2} \times \frac{(S_b)_2}{(S_b)_1} \qquad 1.31$$

ó de otra forma

$$(Z_{pu})_{nueva} = (Z_{pu})_{vieja} \times \left[\frac{(V_b)_{vieja}}{(V_b)_{nueva}}\right]^2 \times \frac{(S_b)_{nueva}}{(S_b)_{vieja}} \qquad 1.32$$

Además

$$V(voltios) = (V_b)_{vieja} \times (V_{pu})_{vieja}$$

$$= (V_b)_{nueva} \times (V_{pu})_{nueva} \qquad 1.33$$

entonces

$$(V_{pu})_{nueva} = (V_{pu})_{vieja} \times \frac{(V_b)_{vieja}}{(V_b)_{nueva}} \qquad 1.34$$

y de igual manera

$$(S_{pu})_{nueva} = (S_{pu})_{vieja} \times \frac{(S_b)_{vieja}}{(S_b)_{nueva}} \qquad 1.35$$

EJEMPLO 2

En el sistema siguiente, tomando como valores base a S = 1000 KVA, V = 650 v en el generador 1, calcular los valores por unidad y construir el diagrama de impedancia. Los datos del sistema son

G_1: 1200 KVA, 650 v, X =j.12 pu
G_2: 900 KVA, 650 v, X =j.10 pu
T_1: 1000 KVA, 700 v Δ - 4500 v Y, X =j.08 pu
T_2: 800 KVA, 600 v Δ - 4200 v Y, X =j.10 pu
LINEA 2-3: X =j9.0 ohmios



Generador 1:

El valor de la impedancia es j.12 pu en la base de 1200 KVA, 650 v. En la base de 1000 KVA, 650 v la impedancia es

$$(Z_{pu})_{nueva} = (Z_{pu})_{vieja} \times \left(\frac{(V_b)_{vieja}}{(V_b)_{nueva}}\right)^2 \times \frac{(S_b)_{nueva}}{(S_b)_{vieja}}$$

$$= j.12 \times \left(\frac{650}{650}\right)^2 \times \frac{1000}{1200} = j.10 \text{ pu}$$

Transformador 1:

El valor de la impedancia es .08 pu a 1000 KVA, 700 v en el lado de baja tensión o a 1000 KVA, 4500 v en el lado de alta tensión. El valor de la impedancia en la base de 1000 KVA, 650 v en el lado de baja tensión es

$$Z_{pu} = j.08 \times \left(\frac{700}{650}\right)^2 \times \frac{1000}{1000} = j.09278 \text{ pu}$$

En el lado de alta tensión el voltaje base es

$$V_b = 650 \times \frac{4500}{700} = 4178.571 \text{ voltios}$$

y la potencia base sigue siendo la misma, por lo que la impedancia en la base de 4178.571 v y 1000 KVA es

$$Z_{pu} = j.08 \times \left(\frac{4500}{4178.571}\right)^2 \times \frac{1000}{1000} = j.09278 \text{ pu}$$

Lo que quiere decir que es indiferente calcular la impedancia en cualquier lado del transformador, siempre y cuando se use la base apropiada.

Transformador 2:

En el lado de alta tensión la base es 4178.571 voltios y 1000 KVA por lo que

$$Z_{pu} = j.10 \times \left(\frac{4200}{4178.571}\right)^2 \times \frac{1000}{800} = j.12628 \text{ pu}$$

En el lado de baja tensión el voltaje base es

$$V_b = 4178.571 \times \frac{600}{4200} = 596.9387 \text{ voltios}$$

y la impedancia por unidad es

$$Z_{pu} = j.10 \times \left(\frac{600}{596.9387}\right)^2 \times \frac{1000}{800} = j.12628 \text{ pu}$$

Generador 2:

La base es 596.9387 v y 1000 KVA, por lo que

$$Z_{pu} = j.10 \times \left(\frac{650}{596.9387}\right)^2 \times \frac{1000}{900} = j.1317 \text{ pu}$$

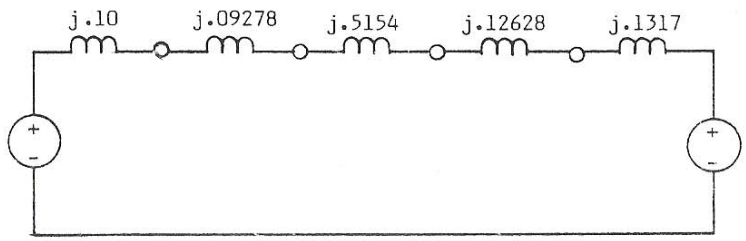
Línea de transmisión:

La línea de transmisión se encuentra en el lado de alta tensión, por lo que la base es 4178.571 voltios y 1000 KVA.

$$Z_b = \frac{(V_b, \text{ KV})^2}{(\text{MVA})_b} = \frac{(4.178571)^2}{1.0} = 17.4504 \text{ ohmios}$$

$$Z_{pu} = \frac{Z(\text{ohmios})}{Z_b} = \frac{9.0}{17.4504} = j.5154 \text{ pu}$$

En la figura siguiente se muestra el diagrama de impedancias con los valores calculados.



En este diagrama se coloca el voltaje en una barra si se conoce la condición del problema. Este voltaje será el mismo en todas las barras si el sistema no tiene carga. En caso contrario se calculará el voltaje en cada barra usando las corrientes de carga para determinar las caídas de tensión entre barras.

De ninguna manera se debe confundir los voltajes de barras que dependen de condiciones particulares con los voltajes nominales de generadores y transformadores.

EJEMPLO 3

En el sistema siguiente seleccionar como base 30 MVA y 6.9 KV en la barra 1 y calcular los valores de impedancias y voltajes por unidad en el resto del sistema.

Los datos del sistema son:

G_1: 20 MVA, 6.9 KV, X = j.15 pu

G_2: 10 MVA, 6.9 KV, X = j.15 pu

G_3: 30 MVA, 13.8 KV, X = j.15 pu

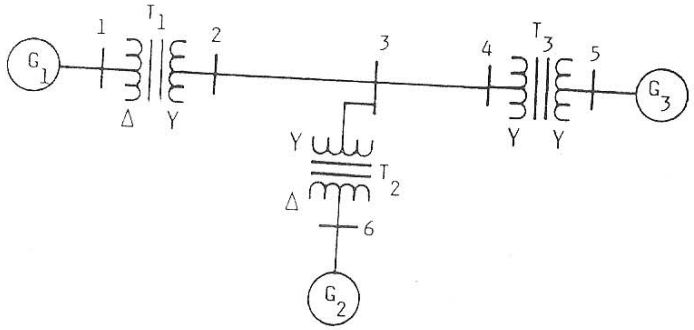
T_1: 25 MVA, 6.9 Δ – 115 Y KV, X = j.10 pu

T_2: 12 MVA, 6.9 Δ – 115 Y KV, X = j.10 pu

T_3: 3 transformadores monofásicos iguales con 10 MVA 7.5 – 75 KV, X = j.10 pu cada uno.

LINEA 2-3: X = j100 ohmios, LINEA 3-4: X = j80 ohmios

Los valores de impedancia por unidad están referidos a la base de cada máquina o de cada transformador.



Generador G_1:

Los valores nominales son 20 MVA, 6.9 KV y la base en ese punto es 30 MVA, 6.9 KV, por lo que hay que conseguir el valor de impedancia en la nueva base.

$$X_{pu} = j.15 \times \left(\frac{6.9}{6.9}\right)^2 \times \frac{30}{20} = j.225 \text{ pu}$$

Transformador T_1:

$$X_{pu} = j.10 \times \left(\frac{6.9}{6.9}\right)^2 \times \frac{30}{25} = j.120 \text{ pu}$$

Líneas:

Los valores de impedancias de las líneas están dadas en ohmios, por lo que hay que llevarlos a valores por unidad, consiguiendo primero la impedancia base en ese punto. El transformador T_1 elevó el voltaje base de 6.9 a 115 KV y la potencia base sigue siendo 30 MVA, por lo que la impedancia base en las líneas es

$$Z_b = \frac{(V_b, \text{ KV})^2}{(\text{MVA})_b} = \frac{(115)^2}{30} = 440.833 \text{ ohmios}$$

Entonces

LINEA 2-3: $X_{pu} = j \frac{100}{440.833} = j.227$ pu

LINEA 3-4: $X_{pu} = j \frac{80}{440.833} = j.181$ pu

Transformador T_2:

El transformador T_2 reduce el voltaje base de 115 KV a 6.9 KV, por lo que en el lado de baja tensión

$$X_{pu} = j.10 \times \left(\frac{6.9}{6.9}\right)^2 \times \frac{30}{12} = j.250 \text{ pu}$$

o en el lado de alta tensión

$$X_{pu} = j.10 \times \left(\frac{115}{115}\right)^2 \times \frac{30}{12} = j.250 \text{ pu}$$

Generador G_2:

$$X_{pu} = j.15 \times \left(\frac{6.9}{6.9}\right)^2 \times \frac{30}{10} = j.450 \text{ pu}$$

Transformador T_3:

El transformador T_3 está formado por 3 transformadores monofásicos de 7.5 – 75 KV conectados en estrella-estrella. El voltaje base en el primario es 115 KV y el voltaje nominal de la conexión estrella en el primario es 75 x $\sqrt{3}$ KV.

$$X_{pu} = j.10 \times \frac{(75 \times \sqrt{3})^2}{(115)^2} \times \frac{30}{30} = j.128 \text{ pu}$$

Generador G_3:

La relación de transformación de la conexión estrella-estrella es

$$\frac{75 \times \sqrt{3}}{7.5 \times \sqrt{3}} = 10$$

y el voltaje base en el secundario del transformador

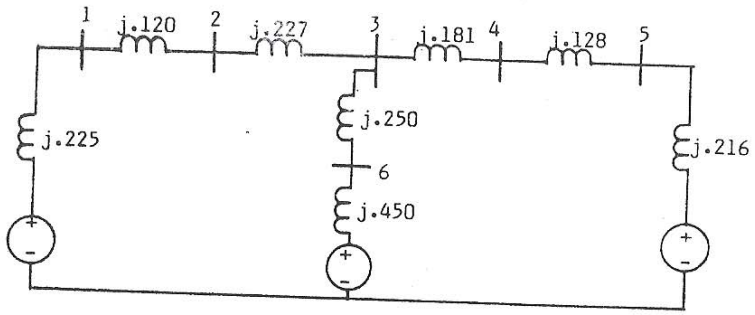
T_3 y en el generador G_3 es

$$V_b = \frac{115}{10} = 11.5 \text{ KV}$$

por lo que

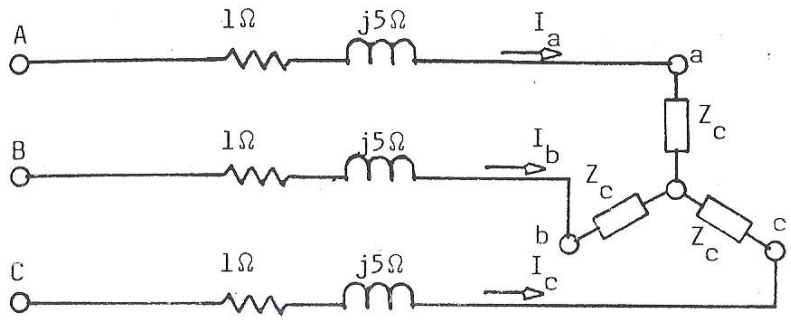
$$X_{pu} = i.15 \times \left(\frac{13.8}{11.5}\right)^2 \times \frac{30}{30} = j.216 \text{ pu}$$

El diagrama de impedancias se muestra en la figura siguiente.



EJEMPLO 4

Una carga trifásica balanceada conectada en estrella con impedancia por fase de $Z_c = 30 \angle 20°$ ohmios, es alimentada a través de una línea de transmisión con impedancia por fase de $Z_L = 1.0 + j5.0$ ohmios por voltajes trifásicos equilibrados de 220 voltios de línea
($V_{ab} = 220 \angle 0°$, $V_{bc} = 220 \angle -120°$, $V_{ca} = 220 \angle 120°$)



Usando los valores por unidad calcular:

a) Las corrientes de línea.
b) Los voltajes de fase al comienzo de la línea de transmisión.
c) Los voltajes de línea al comienzo de la línea de transmisión.

Se seleccionan valores base en la carga:

$S_b = 5 \text{ KVA} = 1.0 \text{ pu}$ $V_{bLL} = 220 \text{ V} = 1.0 \text{ pu.}$

$V_{bLN} = 220/\sqrt{3} = 127.0171 = 1.0 \text{ pu}$

$$I_b = \frac{5000}{\sqrt{3} \times 220} = 13.1216 \text{ amperios}$$

$$Z_{b\,Y} = \frac{(220)^2}{5000} = 9.6800 \text{ ohmios}$$

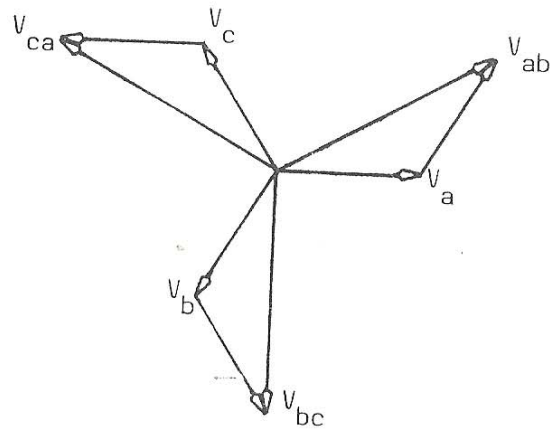
$$Z_c = \frac{30\angle 20^\circ}{9.6800} = 3.0992\angle 20^\circ \text{ pu}$$

$$Z_L = \frac{1 + j5}{9.6800} = .1033 + j.5165 \text{ pu} = .5267\angle 78.6901^\circ \text{ pu}$$

En valores por unidad los voltajes de línea en la carga son:

$$V_{ab} = 1.0\angle 0^\circ \quad V_{bc} = 1.0\angle -120^\circ \quad V_{ca} = 1.0\angle -240^\circ$$

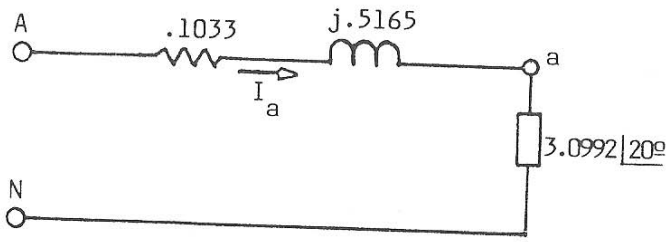
El diagrama vectorial de voltajes de línea y de fase es



Por lo que en valores por unidad

$$V_a = V_{ab}\angle -30^\circ = 1.0\angle -30^\circ$$

Y el diagrama de impedancias de la fase "a" es entonces



$$I_a = \frac{V_a}{Z_c} = \frac{1.0\angle -30^\circ}{3.0992\angle 20^\circ} = .3227\angle -50^\circ \text{ pu}$$

$$= .3227\angle -50^\circ \times 13.1216 = 4.2343\angle -50^\circ \text{ amperios}$$

e

$$I_b = 4.2343\angle -170^\circ \text{ amperios}$$

$$I_c = 4.2343\angle -290^\circ \text{ amperios}$$

$$V_A = V_a + Z_L I_a = 1.0\angle -30^\circ + .5267\angle 78.6901^\circ \times .3227\angle -50$$

$$= 1.0980\angle -22.3998^\circ \text{ pu} = 1.0980\angle -22.3998^\circ \times 127.017$$

$$= 139.4648\angle -22.3998^\circ \text{ voltios}$$

y

$$V_B = 1.0980\angle -142.3998^\circ \text{ pu} = 139.4548\angle -142.3998^\circ \text{ V}$$

$$V_C = 1.0980\angle -262.3998^\circ \text{ pu} = 139.4548\angle -262.3998^\circ \text{ V}$$

$$V_{AB} = V_A\angle 30^\circ = 1.0980\angle 7.6002^\circ \text{ pu} = 1.0980\angle 7.6002 \times 220$$

$$= 241.5600\angle 7.6002^\circ \text{ Voltios}$$

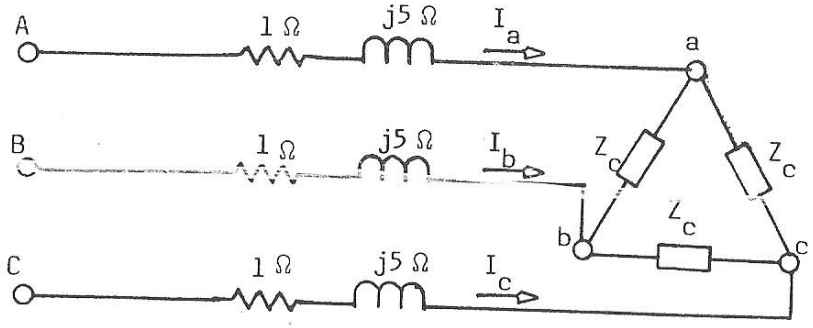
y

$$V_{BC} = 1.0980\angle -112.3998^\circ \text{ pu} = 241.5600\angle -112.3998^\circ \text{ V}$$

$$V_{CA} = 1.0980\angle -232.3998^\circ \text{ pu} = 241.5600\angle -232.3998^\circ \text{ V}$$

EJEMPLO 5

Repetir el Ejemplo 4 si las cargas están conectadas en triángulo.



Como las cargas están conectadas en triángulo se debe calcular una nueva impedancia base. Como ya se tiene la impedancia base en la conexión estrella, se puede hacer entonces que

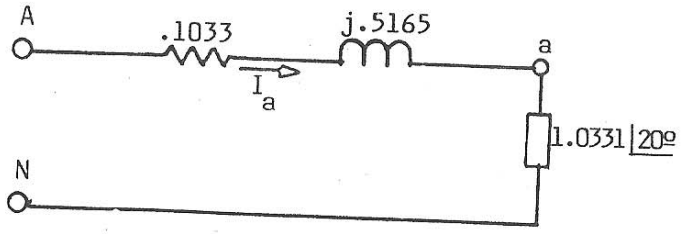
$$Z_b(\Delta) = 3\,Z_b(Y) = 3 \times 9.6800 = 29.0400 \text{ ohmios}$$

ó también

$$Z_b = \frac{V^2_{bl\phi}}{S_{bl\phi}} = \frac{(220)^2}{5000/3} = 29.0400 \text{ ohmios}$$

$$Z_c = \frac{30\angle 20^\circ}{29.040} = 1.0331\angle 20^\circ \text{ pu}$$

El diagrama de impedancias de la fase "a" es entonces



$$I_a = \frac{V_a}{Z_c} = \frac{1.0\angle -30^\circ}{1.0331\angle 20^\circ} = .9680\angle -50^\circ \text{ pu}$$

$$= .9680\angle -50^\circ \times 13.1216 = 12.7017\angle -50^\circ \text{ amperios}$$

e

$$I_b = 12.7017\angle -170^\circ \text{ amperios}$$

$$I_c = 12.7017\angle -290^\circ \text{ amperios}$$

$$V_A = V_a + Z_L I_a = 1.0\angle -30^\circ + .5267\angle 78.6901^\circ \times .9680\angle -50$$

$$= 1.3384\angle -10.9937^\circ \text{ pu} = 1.3384\angle -10.9937^\circ \times 127.0171$$

$$= 170.00\angle -10.9937^\circ \text{ voltios}$$

y

$$V_B = 1.3384\angle -130.9937^\circ \text{ pu} = 170.00\angle -130.9937^\circ \text{ V}$$

$$V_C = 1.3384\angle -250.9937^\circ \text{ pu} = 170.00\angle -250.9937^\circ \text{ V}$$

$$V_{AB} = V_A\angle 30^\circ = 1.3384\angle 19.0063^\circ \text{ pu}$$

$$= 1.3384\angle 19.0063^\circ \times 220 = 294.4480\angle 19.0063^\circ \text{ V}$$

y

$$V_{BC} = 1.3384\angle -100.9937^\circ \text{ pu} = 294.4480\angle -100.9937^\circ \text{ V}$$

$$V_{CA} = 1.3384\angle -220.9937^\circ \text{ pu} = 294.4480\angle -220.9937^\circ \text{ V}$$

9. CONCEPTOS SOBRE FLUJOS DE POTENCIA

Antes de comenzar el análisis de un sistema de potencia es necesario establecer ciertas convenciones sobre los flujos de potencia activa, reactiva y aparente, que permitan derivar expresiones absolutas y confiables sobre los voltajes y flujos de corriente. De no hacerlo así en muchas situaciones se podrían obtener resultados completamente incorrectos.

9.1 CONVENCION SOBRE LOS FLUJOS DE POTENCIA REACTIVA

Cuando se analizan los sistemas de potencia se está en libertad de asumir diferentes signos para los flujos de potencia reactiva. De no fijarse una convención sobre dichos signos en el momento de resolver un problema, las soluciones podrían ser inconsistentes. En este libro y en la mayoría de los textos que tratan el tema, se considera positiva a la potencia reactiva inductiva y negativa a la potencia reactiva capacitiva. Para lograr esto es necesario definir a la potencia aparente compleja como

$$S = V \times I^* \qquad 1.36$$

Sea entonces el circuito de la figura 1.15. El voltaje aplicado colocado en la referencia es

$$V = |V| \angle 0^\circ \qquad 1.37$$

La impedancia es

$$Z = |Z| \angle \theta^\circ = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2} \angle \tan^{-1} X/R \qquad 1.38$$

por lo que

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{|V| \angle 0^\circ}{|Z| \angle \theta^\circ} = \frac{|V|}{|Z|} \angle -\theta^\circ = |I| \angle -\theta^\circ \qquad 1.39$$

y la potencia aparente es

$$S = V \times I^* = |V||I| \angle \theta^\circ = |V||I|\cos\theta + |V||I|\,\text{seno}\theta = P + jQ \qquad 1.40$$

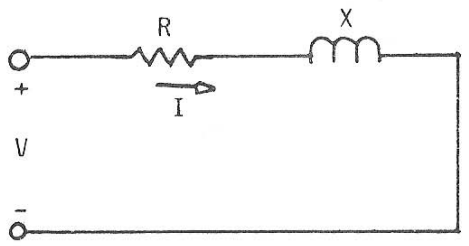


Fig. 1.15

Como se observa en la relación anterior, la potencia reactiva inductiva es positiva. De ahora en adelante la potencia reactiva inductiva se denominará simplemente potencia reactiva y la potencia reactiva capacitiva estará determinada por el signo negativo de la expresión anterior.

9.2 CORRIENTE QUE LLEGA A UN NODO EN FUNCION DE LAS POTENCIAS.

Sea la corriente I_k que llega al nodo k de la figura 1.16 y en donde existe el voltaje V_k.

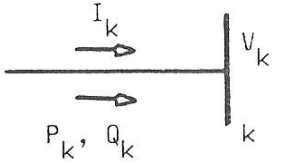


Fig. 1.16

La potencia aparente que entra al nodo k es

$$S_k = V_k \times I_k^* = P_k + jQ_k \qquad 1.41$$

y la corriente que entra al nodo k es

$$I_k = \frac{S_k^*}{V_k^*} = \frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} \qquad 1.42$$

9.3 CORRIENTES QUE LLEGAN A LOS NODOS EN FUNCION DE LOS VOLTAJES EN LOS NODOS Y DE LAS ADMITANCIAS DE LAS LINEAS.

Sea el sistema de la figura 1.17 formado por cuatro nodos enlazados por diferentes líneas de transmisión con las admitancias indicadas.

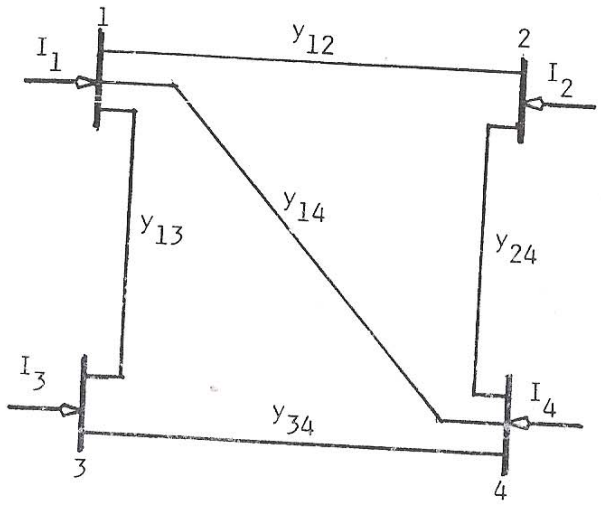


Fig. 1.17

De acuerdo a la ley de Kirchhoff, la corriente que llega a cualquier nodo es igual a la suma de las corrientes que salen; pero cada una de las corrientes que salen por cada línea es igual a la diferencia de tensión de los extremos de esa línea multiplicada por su admitancia. De esta manera

$$I_1 = y_{12}(V_1 - V_2) + y_{13}(V_1 - V_3) + y_{14}(V_1 - V_4)$$

$$I_2 = y_{12}(V_2 - V_1) + y_{24}(V_2 - V_4)$$

$$I_3 = y_{13}(V_3 - V_1) + y_{34}(V_3 - V_4)$$

$$I_4 = y_{14}(V_4 - V_1) + y_{24}(V_4 - V_2) + y_{34}(V_4 - V_3)$$

Ordenando y factorizando a los voltajes de los nodos se tiene que

$$I_1 = (y_{12} + y_{13} + y_{14})V_1 - y_{12}V_2 - y_{13}V_3 - y_{14}V_4$$

$$I_2 = -y_{12}V_1 + (y_{12} + y_{24})V_2 - y_{24}V_4$$

$$I_3 = -y_{13}V_1 + (y_{13} + y_{34})V_3 - y_{34}V_4$$

$$I_4 = -y_{14}V_1 - y_{24}V_2 - y_{34}V_3 + (y_{14} + y_{24} + y_{34})V_4$$

lo cual se puede colocar en forma matricial como se indica a continuación.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_{12}+y_{13}+y_{14}) & -y_{12} & -y_{13} & -y_{14} \\ -y_{12} & (y_{12} + y_{24}) & 0 & -y_{24} \\ -y_{13} & 0 & (y_{13} + y_{34}) & -y_{34} \\ -y_{14} & -y_{24} & -y_{34} & (y_{14}+y_{24}+y_{34}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

La matriz que contiene a las admitancias es una matriz simétrica y se llama matriz admitancia de nodo o matriz admitancia de barra, pudiéndose simplificar en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

En donde

$$Y_{11} = (y_{12} + y_{13} + y_{14}), \quad Y_{12} = Y_{21} = -y_{12},$$
$$Y_{13} = Y_{31} = -y_{13}, \quad Y_{14} = Y_{41} = -y_{14}, \quad Y_{23} = Y_{32} = 0$$
$$Y_{22} = (y_{12} + y_{24}), \quad Y_{24} = Y_{42} = -y_{24}, \quad Y_{33} = (y_{13}+y_{34})$$
$$Y_{34} = Y_{43} = -y_{34}, \quad Y_{44} = (y_{14} + y_{24} + y_{34})$$

Es decir, cada valor de la diagonal de la matriz admitancia de nodo es la suma de las admitancias unidas al nodo respectivo y cada valor fuera de la diagonal es el negativo de los valores de las admitancias que existen entre los dos nodos. La corriente que entra al nodo 1 es entonces

$$I_1 = \frac{P_1 - jQ_1}{V_1^*} = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 + Y_{14}V_4$$

y generalizando para la corriente que entra a cualquier nodo k en un sistema de N nodos es

$$I_k = \frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} = Y_{k1}V_1 + Y_{k2}V_2 + Y_{k3}V_3 + \cdots + Y_{kN}V_N$$

$$= \sum_{m=1}^{N} Y_{km}V_m \qquad 1.43$$

9.4 FLUJOS DE POTENCIA ENTRE DOS NODOS

Si se conocen los voltajes en los nodos y las impedancias en los enlaces, se pueden obtener los flujos de potencia que salen y llegan a dichos nodos. Sea la impedancia de la figura 1.18 colocada entre los nodos k y m. La impedancia de la línea es

$$Z = |Z|\underline{\theta^o} = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2}\ \underline{\tan^{-1} X/R}$$

y los voltajes en cada uno de los dos nodos son

$$V_k = |V_k|\underline{\delta_k} \qquad V_m = |V_m|\underline{\delta_m} \qquad 1.44$$

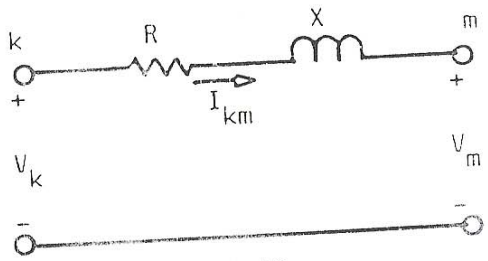


Fig. 1.18

La corriente entre los nodos k y m es

$$I_{km} = \frac{V_k - V_m}{Z} = \frac{|V_k|\underline{\delta_k} - |V_m|\underline{\delta_m}}{|Z|\underline{\theta}} \qquad 1.45$$

La potencia que sale del nodo k hacia el nodo m es

$$S_{km}^k = V_k I_{km}^* = V_k\left[\frac{V_k - V_m}{Z}\right]^* = \frac{V_k V_k^*}{Z^*} - \frac{V_k V_m^*}{Z^*}$$

$$= \frac{|V_k|^2}{|Z|}\underline{\theta} - \frac{|V_k||V_m|}{|Z|}\underline{\delta_k - \delta_m + \theta} \qquad 1.46$$

La potencia activa que sale del nodo k hacia el nodo m es la parte real de la expresión anterior. Igualmente, la parte imaginaria es la potencia reactiva que sale del nodo k hacia el nodo m. De esta manera se tiene entonces que

$$P_{km}^k = \frac{|V_k|^2}{|Z|}\cos\theta - \frac{|V_k||V_m|}{|Z|}\cos(\delta_k - \delta_m + \theta)$$

$$= \frac{|V_k|^2 R}{|Z|^2} - \frac{|V_k||V_m|}{|Z|}\cos(\delta_k - \delta_m + \theta) \qquad 1.47$$

$$Q^k_{km} = \frac{|V_k|^2}{|Z|}\,\text{seno}\,\Theta - \frac{|V_k||V_m|}{|Z|}\,\text{seno}(\delta_k - \delta_m + \Theta)$$

$$= \frac{|V_k|^2 X}{|Z|^2} - \frac{|V_k||V_m|}{|Z|}\,\text{seno}(\delta_k - \delta_m + \Theta) \qquad 1.48$$

La potencia aparente que sale de k y llega a m es

$$S^m_{km} = V_m I^*_{km} = V_m\left[\frac{V_k - V_m}{Z}\right]^* = \frac{V_m V^*_k}{Z^*} - \frac{V_m V^*_m}{Z^*}$$

$$= \frac{|V_m||V_k|}{|Z|}\angle\delta_m - \delta_k + \Theta - \frac{|V_m|^2}{|Z|}\angle\Theta \qquad 1.49$$

De donde las potencias activas y reactivas que llegan al nodo m desde el nodo k son

$$P^m_{km} = \frac{|V_m||V_k|}{|Z|}\cos(\delta_m - \delta_k + \Theta) - \frac{|V_m|^2 R}{|Z|^2} \qquad 1.50$$

$$Q^m_{km} = \frac{|V_m||V_k|}{|Z|}\,\text{seno}(\delta_m - \delta_k + \Theta) - \frac{|V_m|^2 X}{|Z|^2} \qquad 1.51$$

Con igual procedimiento se pueden calcular las potencias que salen del nodo m y que llegan al nodo k.

$$P^m_{mk} = \frac{|V_m|^2 R}{|Z|^2} - \frac{|V_m||V_k|}{|Z|}\cos(\delta_m - \delta_k + \Theta) \qquad 1.52$$

$$Q^m_{mk} = \frac{|V_m|^2 X}{|Z|^2} - \frac{|V_m||V_k|}{|Z|}\,\text{seno}(\delta_m - \delta_k + \Theta) \qquad 1.53$$

$$P^k_{mk} = \frac{|V_k||V_m|}{|Z|}\cos(\delta_k - \delta_m + \Theta) - \frac{|V_k|^2 R}{|Z|^2} \qquad 1.54$$

$$Q^k_{mk} = \frac{|V_k||V_m|}{|Z|}\,\text{seno}(\delta_k - \delta_m + \Theta) - \frac{|V_k|^2 X}{|Z|^2} \qquad 1.55$$

Las pérdidas de potencia en el enlace es la diferencia entre la potencia que sale de un nodo y la que llega al otro nodo. O también la suma de las potencias que salen de ambos nodos.

$$P_{\text{pérdidas}} = P^k_{km} - P^m_{km} = P^k_{km} + P^m_{mk} \qquad 1.56$$

$$Q_{\text{pérdidas}} = Q^k_{km} - Q^m_{km} = Q^k_{km} + Q^m_{mk} \qquad 1.57$$

Si la resistencia del enlace es cero, las potencias activas y reactivas que salen de k y llegan a m son

$$P^k_{km} = -\frac{|V_k||V_m|}{X}\cos(\delta_k - \delta_m + 90^\circ)$$

$$= \frac{|V_k||V_m|}{X}\,\text{seno}(\delta_k - \delta_m) \qquad 1.58$$

$$Q^k_{km} = \frac{|V_k|^2}{X} - \frac{|V_k||V_m|}{X}\,\text{seno}(\delta_k - \delta_m + 90^\circ)$$

$$= \frac{|V_k|^2}{X} - \frac{|V_k||V_m|}{X}\cos(\delta_k - \delta_m) \qquad 1.59$$

De igual manera

$$P^m_{km} = \frac{|V_k||V_m|}{X}\,\text{seno}(\delta_k - \delta_m) \qquad 1.60$$

$$Q^m_{km} = -\frac{|V_m|^2}{X} + \frac{|V_k||V_m|}{X}\cos(\delta_k - \delta_m) \qquad 1.61$$

$$P^m_{mk} = \frac{|V_m||V_k|}{X}\text{seno}(\delta_m - \delta_k) = -\frac{|V_m||V_k|}{X}\text{seno}(\delta_k - \delta_m) \qquad 1.62$$

$$Q^m_{mk} = \frac{|V_m|^2}{X} - \frac{|V_m||V_k|}{X}\cos(\delta_m - \delta_k) \qquad 1.63$$

$$P^k_{mk} = -\frac{|V_k||V_m|}{X}\text{seno}(\delta_k - \delta_m) = \frac{|V_m||V_k|}{X}\text{seno}(\delta_m - \delta_k) \qquad 1.64$$

$$Q^k_{mk} = \frac{|V_k||V_m|}{X}\cos(\delta_k - \delta_m) - \frac{|V_k|^2}{X} \qquad 1.65$$

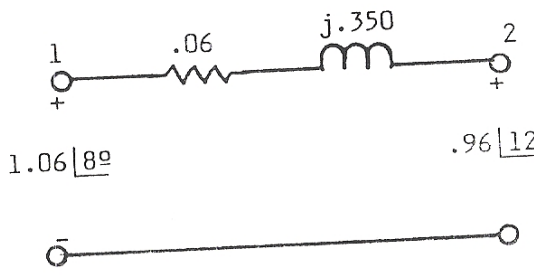
De las ecuaciones anteriores, cuando la resistencia del enlace es igual a cero, se observa lo siguiente: 1) Los flujos de potencia activa van siempre de la barra que tiene el voltaje con el mayor ángulo, hacia la barra que tiene el voltaje con el menor ángulo, sin importar la magnitud de dichos voltajes. 2) Los flujos de potencia reactiva van desde la barra con mayor magnitud de voltaje hacia la barra con menor magnitud de voltaje, siempre y cuando la diferencia de ángulos entre las dos barras no sea muy grande.

EJEMPLO 6

En los extremos de una línea de transmisión corta que tiene una impedancia de z = .06 + j.350 pu, existen los voltajes $V_1 = 1.06 \lfloor 8°$ pu y $V_2 = 0.96 \lfloor 12°$ pu. Calcular

1) Los flujos de potencia activa y reactiva que salen o llegan a cada extremo de la línea.

2) Las pérdidas de potencia activa y reactiva en la línea.



La impedancia es

$$Z = .06 + j.350 = .3551\lfloor 80.2724°$$

La potencia activa que sale del nodo 1 es

$$P^1_{12} = \frac{|V_1|^2 R}{|Z|^2} - \frac{|V_1||V_2|}{|Z|}\cos(\delta_1 - \delta_2 + \Theta)$$

$$= \frac{(1.06)^2 \times .06}{(.3551)^2} - \frac{1.06 \times .96}{.3551}\cos(8 - 12 + 80.2724)$$

$$= -.1454 \text{ pu}$$

La potencia reactiva que sale del nodo 1 es

$$Q^1_{12} = \frac{|V_1|^2 X}{|Z|^2} - \frac{|V_1||V_2|}{|Z|}\text{seno}(\delta_1 - \delta_2 + \Theta)$$

$$= \frac{(1.06)^2 \times .350}{(.3551)^2} - \frac{1.06 \times .96}{.3551}\text{seno}(8 - 12 + 80.2724)$$

$$= .3349 \text{ pu}$$

Las potencias activas y reactivas que llegan al nodo 2 son

$$P^2_{12} = \frac{|V_2||V_1|}{|Z|}\cos(\delta_2 - \delta_1 + \Theta) - \frac{|V_2|^2 R}{|Z|^2}$$

$$= \frac{.96 \times 1.06}{.3551} \cos(12 - 8 + 80.2724) - \frac{(.96)^2 \times .06}{(.3551)^2}$$

$$= -.1525 \text{ pu}$$

$$Q_{12}^2 = \frac{|V_2||V_1|}{|Z|} \text{seno}(\delta_2 - \delta_1 + \Theta) - \frac{|V_2|^2 X}{|Z|^2}$$

$$= \frac{.96 \times 1.06}{.3551} \text{seno}(12 - 8 + 80.2724) - \frac{(.96)^2 \times .350}{(.3551)^2}$$

$$= .2933 \text{ pu}$$

Las pérdidas son

$$P_{\text{pérdidas}} = P_{12}^1 - P_{12}^2 = -.1454 - (-.1525)$$

$$= .0071 \text{ pu}$$

$$Q_{\text{pérdidas}} = Q_{12}^1 - Q_{12}^2 = .3349 - .2933 = .046 \text{ pu}$$

Se observa en el ejemplo anterior que el flujo de potencia activa va desde la barra 2 hacia la barra 1, es decir, desde la barra que tiene el voltaje con el mayor ángulo hacia la barra con el voltaje con el menor ángulo. Además el flujo de potencia reactiva va desde la barra 1 hacia la barra 2, es decir, desde la barra con mayor magnitud de voltaje hacia la barra con menor magnitud de voltaje.

EJEMPLO 7

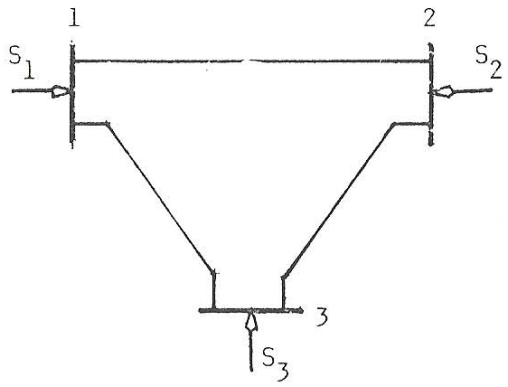
El siguiente sector de un sistema de potencia tiene las características siguientes:

$$Z_{12} = .06 + j.35 \qquad V_1 = 1.06\angle 12^\circ$$

$$Z_{23} = .05 + j.25 \qquad V_2 = 1.00\angle 18^\circ$$

$$Z_{13} = .06 + j.30 \qquad V_3 = 0.96\angle 10^\circ$$

Determinar las potencias que entran a cada barra y las pérdidas de potencia en el sector.



Las corrientes son

$$I_{12} = \frac{V_1 - V_2}{Z_{12}} = \frac{1.06\angle 12^\circ - 1.0\angle 18^\circ}{.06 + j.35}$$

$$= .3472\angle -126.2311^\circ$$

$$I_{13} = \frac{V_1 - V_3}{Z_{13}} = \frac{1.06\angle 12^\circ - .96\angle 10^\circ}{.06 + j.3}$$

$$= .3465\angle -48.2547^\circ$$

$$I_{23} = \frac{V_2 - V_3}{Z_{23}} = \frac{1.0\angle 18^\circ - .96\angle 10^\circ}{.05 + j.25}$$

$$= .5586\angle 9.0161^\circ$$

Las potencias son

$$S_{12}^1 = V_1 I_{12}^* = 1.06\angle 12^\circ \times .3472\angle 126.2311^\circ$$

$$= .3680\angle 138.2311^\circ = -.2745 + j.2451$$

$$S_{12}^2 = V_2 I_{12}^* = 1.00\angle 18^\circ \times .3472\angle 126.2311^\circ$$

$$= .3472\angle 144.2311^\circ = -.2816 + j.2029$$

$$S_{13}^1 = V_1 I_{13}^* = 1.06\angle 12^\circ \times .3465\angle 48.2547^\circ$$

$$= .3673\angle 60.2547^\circ = .1822 + j.3189$$

$$S_{13}^3 = V_3 I_{13}^* = .96\angle 10^\circ \times .3465\angle 48.2547^\circ$$

$$= .3326\angle 58.2547^\circ = .1750 + j.2829$$

$$S_{23}^2 = V_2 I_{23}^* = 1.00\angle 18^\circ \times .5586\angle -9.0161^\circ$$

$$= .5586\angle 8.9839^\circ = .5517 + j.0872$$

$$S_{23}^3 = V_3 I_{23}^* = 0.96\angle 10^\circ \times .5586\angle -9.0161^\circ$$

$$= .5363\angle .9839^\circ = .5362 + j.0092$$

Las potencias que entran a cada barra son entonces

$$S_1 = S_{12}^1 + S_{13}^1 = -.2745 + j.2451 + .1822 + j.3189$$

$$= - .0923 + j.5640$$

$$S_2 = -S_{12}^2 + S_{23}^2 = .2816 - j.2029 + .5517 + j.0872$$

$$= .8333 - j.1157$$

$$S_3 = -S_{13}^3 - S_{23}^3 = -.1750 - j.2829 - .5362 - j.0092$$

$$= - .7112 - j.2921$$

Las pérdidas son iguales a la suma de todas las potencias que entran al sector.

$$S_{\text{pérdidas}} = S_1 + S_2 + S_3 = -.0923 + j.5640 + .8333$$

$$- j.1157 - .7112 - j.2921 = .0298 + j.1562$$

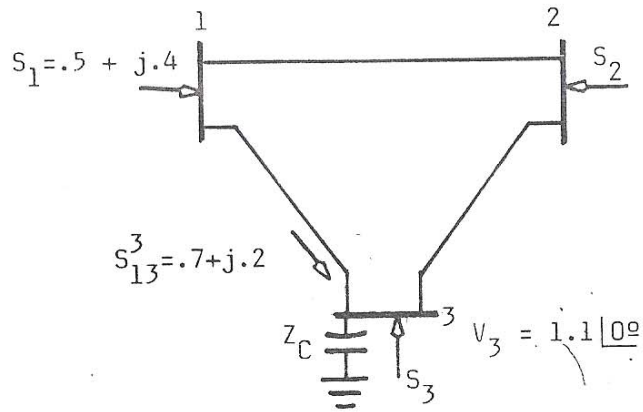
EJEMPLO 8

El siguiente sector de un sistema de potencia tiene las características indicadas en valores por unidad:

$$Z_{12} = .04 + j.300 \qquad Z_{23} = .06 + j.250$$

$$Z_{13} = .05 + j.350 \qquad Z_C = -j1.50$$

a) Calcular los flujos de potencia que entran a cada barra.
b) Calcular las pérdidas de potencia activa y reactiva en el sector.



$$I_{13} = \frac{S_{13}^{3*}}{V_3^*} = \frac{.7 - j.2}{1.1\angle 0^\circ} = .6364 - j.1818$$

$$= .6618\angle -15.9456^\circ$$

$$V_1 = V_3 + Z_{13} I_{13}$$

$$= 1.1\angle 0^\circ + (.05 + j.35)(.6364 - j.1818)$$

$$= 1.1955 + j.2136 = 1.2144\angle 10.1322^\circ$$

$$S_{13}^1 = V_1 I_{13}^* = 1.2144\angle 10.1322^\circ \times .6618\angle 15.9456^\circ$$

$$= .8037\angle 26.0778^\circ = .7219 + j.3533$$

$$S_{12}^1 = S_1 - S_{13}^1 = .5 + j.4 - .7219 - j.3533$$

$$= -.2219 + j.0467 = .2268\angle 168.1152^\circ$$

$$I_{12} = \frac{S_{12}^{1*}}{V_1^*} = \frac{.2268\angle -168.1152^\circ}{1.2144\angle -10.1322^\circ} = .1868\angle -157.9830^\circ$$

$$= -.1731 - j.0700$$

$$V_2 = V_1 - Z_{12} I_{12}$$

$$= 1.1955 + j.2136 - (.04 + j.300)(-.1731 - j.07)$$

$$= 1.1814 + j.2683 = 1.2115\angle 12.7963^\circ$$

$$S_{12}^2 = V_2 I_{12}^* = 1.2115\angle 12.7963^\circ \times .1868\angle 157.9830^\circ$$

$$= .2263\angle 170.7793^\circ = -.2234 + j.0363$$

$$I_{23} = \frac{V_2 - V_3}{Z_{23}} = \frac{1.2115\angle 12.7963^\circ - 1.1\angle 0^\circ}{.06 + j.250}$$

$$= 1.0886 - j.0643 = 1.0905\angle -3.3816^\circ$$

$$S_{23}^2 = V_2 I_{23}^* = 1.2115\angle 12.7963^\circ \times 1.0905\angle 3.3816^\circ$$

$$= 1.3211\angle 16.1779^\circ = 1.2688 + j.3681$$

$$S_{23}^3 = V_3 I_{23}^* = 1.1\angle 0^\circ \times 1.0905\angle 3.3886^\circ$$

$$= 1.1996\angle 3.3816^\circ = 1.1975 + j.0708$$

Las potencias que entran a cada barra son entonces

$$S_1 = .5 + j.4$$

$$S_2 = S_{23}^2 - S_{12}^2 = 1.2688 + j.3681 + .2234 - j.0363$$

$$= 1.4922 + j.3318 = 1.5287\angle 12.5358^\circ$$

$$S_3 = -S_{23}^3 - S_{13}^3 - \frac{|V_3|^2}{-jX_C}$$

$$= -1.1975 - j.0708 - .700 - j.200 - \frac{(1.1)^2}{-j1.50}$$

$$= -1.8975 - j1.0775 = 2.1821\angle -150.4106^\circ$$

Las pérdidas de potencia en el sector son

$$S_{\text{pérdidas}} = S_1 + S_2 + S_3 + \frac{|V_3|^2}{-jX_C}$$

$$= .5 + j.4 + 1.4922 + j.3318 - 1.8975$$

$$-j1.0775 + \frac{(1.1)^2}{-j1.50} = .0947 + j.4610$$

o también

$$P_{pérdidas} = R_{12}|I_{12}|^2 + R_{13}|I_{13}|^2 + R_{23}|I_{23}|^2$$

$$= .04 \times (.1868)^2 + .05 \times (.6618)^2$$

$$+ .06 \times (1.0905)^2 = .0947$$

y además

$$Q_{pérdidas} = X_{12}|I_{12}|^2 + X_{13}|I_{13}|^2 + X_{23}|I_{23}|^2$$

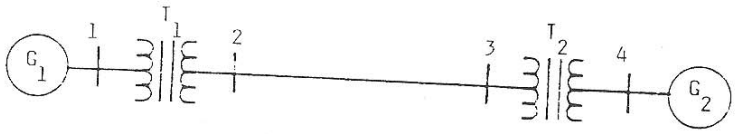
$$= .300 \times (.1868)^2 + .350 \times (.6618)^2$$

$$+ .250 \times (1.0905)^2 = .4610$$

PROBLEMAS

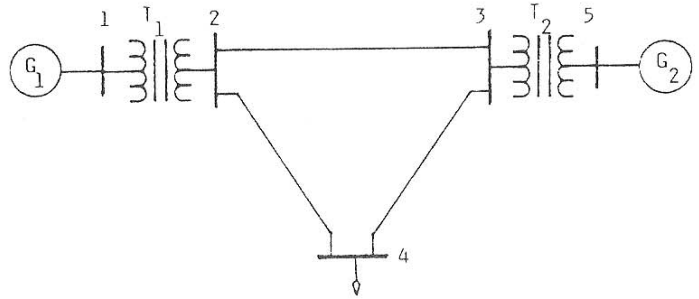
1. En el sistema siguiente tomando como valores base a 20 MVA, 6.6 KV, en la barra 1, calcular los valores por unidad y construir el diagrama de impedancias. Los datos del sistema son:

G_1: 25 MVA, 6.6 KV, X = j.12 pu.
G_2: 20 MVA, 6.9 KV, X = j.15 pu.
T_1: 30 MVA, 7.2 - 2.6 KV, X = j.10 pu.
T_2: 25 MVA, 7.5 - 2.4 KV, X = j.08 pu.
LINEA 2-3: X = j.07 ohmios



2. Repetir el Problema 1 si la base anterior se toma en la barra 4.
3. Repetir el problema 1 si se toman valores base de 20 MVA, 2.4 KV en la barra 2.
4. En el sistema siguiente seleccionar como valores base a 30 MVA, 2.5 KV en la barra 4 y calcular los valores de impedancias y voltajes en todo el sistema y construir el diagrama de impedancias. Los datos del sistema son:

G_1: 20 MVA, 6.5 KV, X = j.10 pu.
G_2: 30 MVA, 6.5 KV, X = j.10 pu.
T_1: 25 MVA, 7.2 - 2.5 KV, X = j.10 pu.
T_2: 35 MVA, 7.5 - 2.5 KV, X = j.12 pu.
LINEA 2-3: X = j.06 Ω LINEA 3-4: X = j.08 Ω
LINEA 2-4: X = j.05 Ω



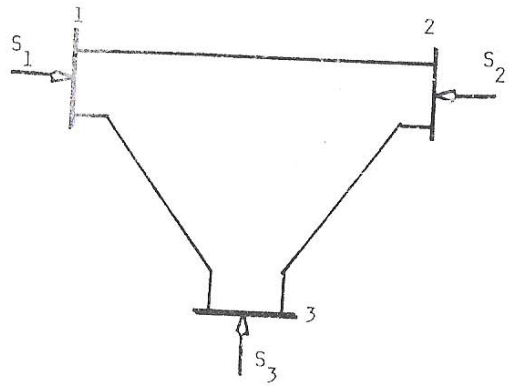
5. Repetir el Problema 4 si se toman valores base de 20 MVA, 6.5 KV en la barra 5.
6. El siguiente sector de un sistema de potencia tiene las características indicadas en valores por unidad:

L_{12}: Z = .05 + j.400, S = .05
L_{23}: Z = .06 + j.380, S = 0.0
L_{13}: Z = .04 + j.220, S = 0.0

$S_2 = .8 + j.6$ $S_{23}^3 = .4 - j.1$ $V_3 = 1.2\angle 2.5^o$

(S es la suceptancia a tierra en toda la línea)

a) Calcular los flujos de potencia que entran a cada barra.
b) Calcular los flujos de potencia activa y reactiva en el sector.
c) Calcular las pérdidas totales en el sector.

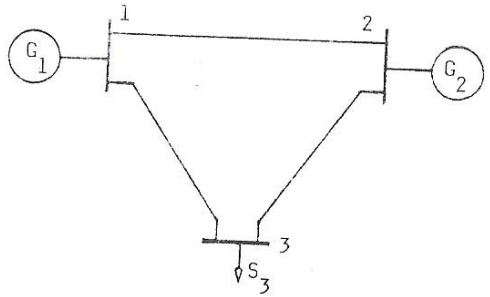


7. Los datos del sistema de potencia que se indica son los siguientes en valores por unidad:

$Z_{12} = .02 + j.1 \quad Z_{13} = .04 + j.15 \quad Z_{23} = .07 + j.25$

$V_2 = 1.1\angle 0^\circ \quad V_3 = 1.0\angle -5.0^\circ \quad S_3 = 1.0 + j.667$

Determinar:
a) El voltaje V_1
b) Las potencias activas y reactivas producidas por cada generador.
c) Las pérdidas activas y reactivas del sistema.



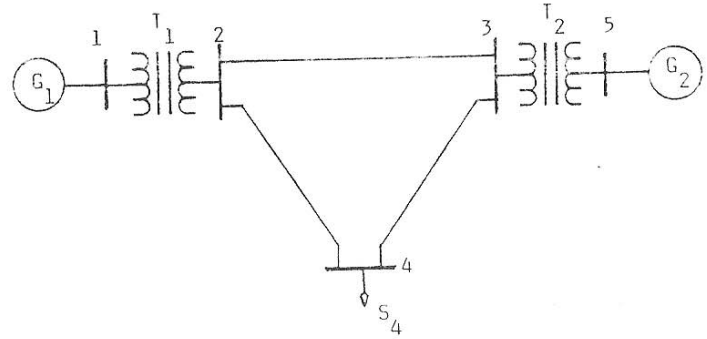
8. Los datos del sistema de potencia que se indican son los siguientes:

G_1: 25 MVA, 6.5 KV, X = j.10 pu.
G_2: 30 MVA, 7.2 KV, X = j.12 pu.
T_1: 20 MVA, 7.5 - 2.4 KV, X = j.10 pu.
T_2: 30 MVA, 6.2 - 2.2 KV, X = j.10 pu.
L_{23}: X = j.06 Ω L_{24}: X = j.07 Ω L_{34}: X = j.08 Ω
$V_2 = .992\angle -2.55^\circ \quad V_3 = .968\angle -1.45^\circ \quad V_4 = .946\angle -3.12$

(Voltajes en valores por unidad en la base indicada)

Seleccionar una base de 25 MVA y 6.2 KV en la barra 1 y calcular:

1) Los voltajes V_1 y V_5.
2) La potencia de cada generador y la potencia de la carga S_4 .
3) Las pérdidas de potencia en el sistema.

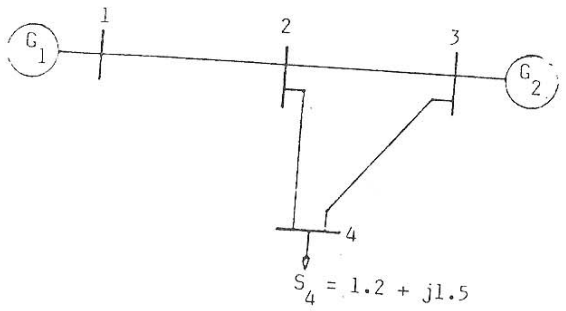


9. Los datos del sistema de potencia que se indica son los siguientes:

$Z_{12} = j.0470$ pu, $Z_{23} = j.1724$ pu, $Z_{24} = j.0862$ pu,
$Z_{34} = j.1200$ pu, $V_3 = 1.1\angle 0^\circ$ pu, $V_4 = 1.0\angle -3.0$ pu.

Calcular en valores por unidad:

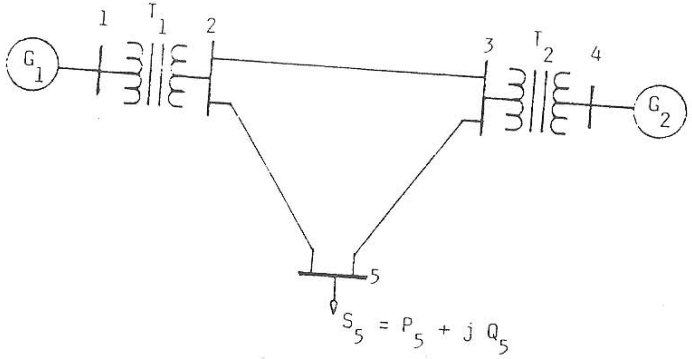
a) Los voltajes V_2 y V_1.
b) La potencia de cada generador.



10. Los datos del sistema de potencia que se indica son los siguientes:

G_1: 20 MVA, 7.5 KV, X = j.12 pu.
G_2: 25 MVA, 7.2 KV, X = j.12 pu.
T_1: 15 MVA, 6.9 - 2.4 KV, X = j.10 pu.
T_2: 30 MVA, 7.4 - 2.5 KV, X = j.10 pu.
L_{23}: X = .05 Ω L_{25}: X = .04 Ω L_{35}: X = .07 Ω
$V_2 = 2.3\angle -6.0º$ KV, $V_5 = 2.2\angle -10º$ KV,
P_5 = 20 MW, Q_5 = 15 MVAR

Seleccionar una base de 2.2 KV, 20 MVA en la barra 5 y calcular:
a) Los voltajes en voltios de V_1, V_3 y V_4.
b) La potencia en MVA de cada generador.



CAPITULO II

METODOS NUMERICOS USADOS EN EL PROBLEMA DE FLUJOS DE POTENCIA

1. DEFINICION DEL PROBLEMA DE FLUJO DE POTENCIA

El problema de flujo de potencia consiste en generar una potencia activa y reactiva a magnitudes de voltajes preestablecidos para alimentar a cargas que requieran potencia activa y reactiva. Un sistema de potencia que esté sujeto a un conjunto de cargas en sus diferentes barras puede ser operado en un infinito número de situaciones de voltajes en dichas barras y todavía satisfacer las condiciones de la carga. Cada una de estas situaciones se llama estado del sistema. Al conocer el estado del sistema, es decir magnitud y ángulo en cada barra para satisfacer a una demanda dada, se pueden determinar los flujos de potencia entre barra y barra, es decir, se conoce la estructura total del sistema.

La potencia generada debe satisfacer la demanda de la carga más las pérdidas internas del sistema. La carga puede variar las 24 horas del día, por lo que el estado puede variar durante el mismo lapso. El conocimiento del estado del sistema a cada momento se hace entonces necesario para el control y programación de la generación.

La formulación matemática del problema de flujo, de potencia para determinar el estado del sistema resulta en un sistema de ecuaciones algebraicas alineales y, debido a esa alinealidad, la solución del sistema de ecuaciones está basada en técnicas iterativas. Comúnmente se usan dos métodos para la aplicación de estas técnicas: el método de Gauss-Seidel y el método de Newton-Raphson. Casi todos los programas comerciales de computación están basados en estos métodos, los cuales se describen en detalles en las secciones siguientes.

2. TECNICA ITERATIVA DE GAUSS

Este método es muy apropiado para la solución de sistemas de ecuaciones alineales. Consiste en seleccionar valores iniciales arbitrarios para las variables y mediante aproximaciones sucesivas encontrar la solución del sistema de ecuaciones en forma iterativa.

Si desea resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad 2.1$$

el cual se reescribe en la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3) \\ x_3 &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2) \end{aligned} \qquad 2.2$$

El procedimiento consiste en seleccionar valores iniciales arbitrarios para las variables x_1, x_2 y x_3, los cuales se colocan en el lado derecho del sistema de ecuaciones y se calculan nuevos valores en el lado izquierdo. Si estos valores son diferentes a los seleccionados, se utilizan en el lado derecho para un nuevo cálculo y así sucesivamente hasta que se logre que todos los valores de las variables colocadas en el lado derecho del sistema de ecuaciones sean exactamente iguales a los calculados en el lado izquierdo o hasta que la diferencia se encuentre dentro de una tolerancia especificada.

Asumiendo valores iniciales arbitrarios x_1^o, x_2^o y x_3^o, el primer cálculo será

$$x_1^1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^o - a_{13}x_3^o)$$

$$x_2^1 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^o - a_{23}x_3^o) \qquad 2.3$$

$$x_3^1 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^o - a_{32}x_2^o)$$

Si se comprueba que

$$\begin{aligned} x_1^1 &\neq x_1^o \\ x_2^1 &\neq x_2^o \\ x_3^1 &\neq x_3^o \end{aligned} \qquad 2.4$$

el segundo cálculo será

$$x_1^2 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^1 - a_{13}x_3^1)$$

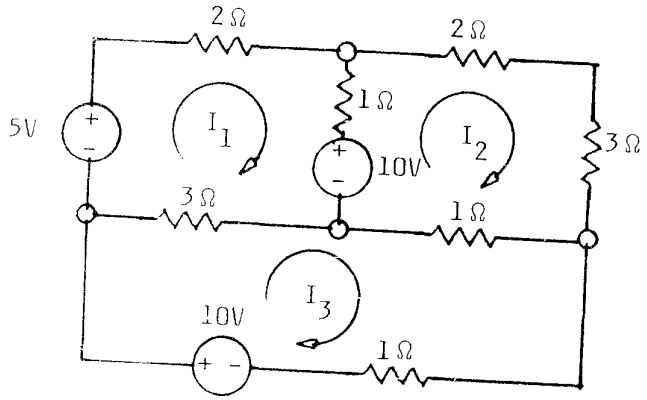
$$x_2^2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^1 - a_{23}x_3^1) \qquad 2.5$$

$$x_3^2 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^1 - a_{32}x_2^1)$$

y así sucesivamente

EJEMPLO 1

En la red de la figura siguiente calcular los valores de I_1, I_2 e I_3, usando el método iterativo de Gauss.



Las ecuaciones de voltajes de mallas son

$$6I_1 - I_2 - 3I_3 = -5$$

$$-I_1 + 7I_2 - I_3 = 10$$

$$-3I_1 - I_2 + 5I_3 = 10$$

de donde

$$I_1 = \frac{1}{6}(-5 + I_2 + 3I_3)$$

$$I_2 = \frac{1}{7}(10 + I_1 + I_3)$$

$$I_3 = \frac{1}{5}(10 + 3I_1 + I_2)$$

Se toman arbitrariamente los siguientes valores iniciales:

$$I_1^0 = I_2^0 = I_3^0 = 0$$

por lo que

$$I_1^1 = \frac{1}{6}(-5 + 0 + 3 \times 0) = -\frac{5}{6}$$

$$I_2^1 = \frac{1}{7}(10 + 0 + 0) = \frac{10}{7}$$

$$I_3^1 = \frac{1}{5}(10 + 3 \times 0 + 0) = 2$$

Como los valores calculados difieren de los valores asumidos, se continúa el proceso. Una segunda iteración será:

$$I_1^2 = \frac{1}{6}(-5 + \frac{10}{7} + 3 \times 2) = .405$$

$$I_2^2 = \frac{1}{7}(10 + 1 \times (-\frac{5}{6}) + 1 \times 2) = 1.595$$

$$I_3^2 = \frac{1}{5}(10 + 3 \times (-\frac{5}{6}) + 1 \times \frac{10}{7}) = 1.786$$

Una tercera iteración será

$$I_1^3 = \frac{1}{6}(-5 + 1 \times 1.595 + 3 \times 1.786) = .326$$

$$I_2^3 = \frac{1}{7}(10 + 1 \times .405 + 1 \times 1.786) = 1.742$$

$$I_3^3 = \frac{1}{5}(10 + 3 \times .405 + 1 \times 1.595) = 2.562$$

En la Tabla 2.1 se muestran los resultados de todas las iteraciones hasta la convergencia total.

La rapidez de la convergencia depende en muchos casos de los valores asumidos inicialmente. Si en este problema se toman como valores iniciales

$$I_1^0 = I_2^0 = I_3^0 = 1$$

los resultados de las tres primeras iteraciones son las siguientes

$$I_1^1 = \frac{1}{6}(-5 + 1 \times 1 + 3 \times 1) = -.167$$

$$I_2^1 = \frac{1}{7}(10 + 1 \times 1 + 1 \times 1) = 1.714$$

$$I_3^1 = \frac{1}{5}(10 + 3 \times 1 + 1 \times 1) = 2.800$$

$$I_1^2 = \frac{1}{6}(-5 + 1 \times 1.714 + 3 \times 2.800) = .852$$

$$I_2^2 = \frac{1}{7}(10 + 1 \times (-.167) + 1 \times 2.800) = 1.805$$

$$I_3^2 = \frac{1}{5}(10 + 3 \times (-.167) + 1 \times 1.714) = 2.243$$

$$I_1^3 = \frac{1}{6}(-5 + 1 \times 1.805 + 3 \times 2.243) = .589$$

$$I_2^3 = \frac{1}{7}(10 + 1 \times .852 + 1 \times 2.243) = 1.871$$

$$I_3^3 = \frac{1}{5}(10 + 3 \times .852 + 1 \times 1.805) = 2.872$$

En este caso el número de iteraciones requeridas para la convergencia total es menor que en el caso anterior, tal como se indica en la Tabla 2.1.

3. EL METODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL

Este método es una modificación del método anterior. Consiste en usar los nuevos valores calculados inmediatamente después de hallarse para realizar el cálculo siguiente. Esto reduce considerablemente el número de iteraciones para la convergencia total.

EJEMPLO 2

Resolver el Ejemplo 1 usando el método de Gauss-Seidel, con valores iniciales

$$I_1^0 = I_2^0 = I_3^0 = 0$$

$$I_1^1 = \frac{1}{6}(-5 + 1 \times 0 + 3 \times 0) = -.833$$

$$I_2^1 = \frac{1}{7}(10 + 1 \times (-.833) + 1 \times 0) = 1.310$$

$$I_3^1 = \frac{1}{5}(10 + 3 \times (-.833) + 1 \times 1.310) = 1.762$$

Las siguientes dos iteraciones son

$$I_1^2 = \frac{1}{6}(-5 + 1 \times 1.310 + 3 \times 1.762) = .266$$

$$I_2^2 = \frac{1}{7}(10 + 1 \times .266 + 1 \times 1.762) = 1.718$$

$$I_3^2 = \frac{1}{5}(10 + 3 \times .266 + 1 \times 1.718) = 2.503$$

$$I_1^3 = \frac{1}{6}(-5 + 1 \times 1.718 + 3 \times 2.503) = .705$$

$$I_2^3 = \frac{1}{7}(10 + 1 \times .705 + 1 \times 2.503) = 1.887$$

$$I_3^3 = \frac{1}{5}(10 + 3 \times .705 + 1 \times 1.887) = 2.800$$

El resto de las iteraciones se muestra en la Tabla 2.1.

4. FACTOR DE ACELERACION

Algunas veces se puede reducir el número de iteraciones necesario para la convergencia, mediante el uso del factor de aceleración α. Se calcula la diferencia entre dos valores de iteraciones sucesivas de las variables y se multiplica luego esta diferencia por el factor de aceleración. Con la suma de este resultado más el penúltimo valor encontrado de la variable se obtiene el valor acelerado. De esta manera

$$\Delta I^{k+1} = I^{k+1} - I^k \qquad 2.6$$

y

$$I^{k+1}_{\text{acelerado}} = I^k + \alpha \Delta I^{k+1} \qquad 2.7$$

EJEMPLO 3

Resolver el ejemplo 2 con factor de aceleración $\alpha = 1.2$ y con valores iniciales

$$I_1^0 = I_2^0 = I_3^0 = 1$$

$$I_1^1 = \frac{1}{6}(-5 + 1 \times 1 + 3 \times 1) = -.167$$

$$(I_1^1)_{ac} = 1.0 + 1.2(-.167 - 1.0) = -.400$$

$$I_2^1 = \frac{1}{7}(10 + 1 \times (-.4) + 1 \times 1) = 1.514$$

$$(I_2^1)_{ac} = 1.0 + 1.2(1.514 - 1.0) = 1.617$$

$$I_3^1 = \frac{1}{5}(10 + 3 \times (-.4) + 1 \times 1.617) = 2.083$$

$$(I_3^1)_{ac} = 1.0 + 1.2(2.083 - 1.0) = 2.300$$

La iteración siguiente es

$$I_1^2 = \frac{1}{6}(-5 + 1 \times 1.617 + 3 \times 2.300) = .586$$

$$(I_1^2)_{ac} = -.400 + 1.2(.586 - (-.400)) = .784$$

$$I_2^2 = \frac{1}{7}(10 + 1 \times .784 + 1 \times 2.300) = 1.869$$

$$(I_2^2)_{ac} = 1.617 + 1.2(1.869 - 1.617) = 1.920$$

TABLA 2.1

Iterac.	Gauss			Gauss			Gauss-Seidel			Gauss-Seidel $\alpha = 1.2$		
	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000
1	-.833	1.429	2.000	-.167	1.714	2.800	-.833	1.310	1.762	-.400	1.617	2.300
2	0.405	1.595	1.786	0.852	1.805	2.243	0.266	1.718	2.503	0.784	1.920	2.965
3	0.326	1.742	2.562	0.589	1.871	2.872	0.705	1.887	2.800	1.006	2.011	3.014
4	0.738	1.841	2.544	0.915	1.923	2.728	0.881	1.954	2.919	1.009	2.009	3.004
5	0.746	1.897	2.811	0.851	1.949	2.934	0.952	1.982	2.968	1.001	2.000	3.000
6	0.888	1.937	2.827	0.959	1.969	2.900	0.981	1.993	2.987	1.000	2.000	3.000
7	0.903	1.959	2.920	0.945	1.980	2.969	0.992	1.997	2.995	1.000	2.000	3.000
8	0.953	1.975	2.964	0.981	1.988	2.963	0.997	1.999	2.998			
9	0.963	1.984	2.967	0.980	1.992	2.986	0.999	2.000	2.999			
10	0.981	1.990	2.975	0.992	1.995	2.986	1.000	2.000	3.000			
11	0.986	1.994	2.987	0.992	1.997	2.994	1.000	2.000	3.000			
12	0.993	1.996	2.990	0.997	1.998	2.995						
13	0.994	1.998	2.995	0.997	1.999	2.998						
14	0.997	1.998	2.996	0.999	1.999	2.998						
15	0.998	1.999	2.998	0.999	2.000	2.999						
16	0.999	1.999	2.999	1.000	2.000	3.000						
17	0.999	2.000	2.999	1.000	2.000	3.000						
18	1.000	2.000	2.999									
19	1.000	2.000	3.000									
20	1.000	2.000	3.000									

$$I_3^2 = \frac{1}{5}(10 + 3 \times .784 + 1 \times 1.920) = 2.854$$

$$(I_3^2)_{ac} = 2.300 + 1.2(2.854 - 2.300) = 2.965$$

El resto de las iteraciones están en la Tabla 2.1.

5. EL METODO NEWTON-RAPHSON

En sistemas de ecuaciones alineales muy grandes el método Gauss-Seidel puede requerir un número excesivo de iteraciones para converger y en algunas situaciones ni siquiera es posible la convergencia. El método Newton-Raphson, el cual se describirá a continuación, es muy útil en la solución de grandes sistemas, ya que el número de iteraciones es casi independiente del orden del sistema de ecuaciones.

Sea la ecuación

$$y = f(x) = 0$$

la cual se desea resolver por una raíz x. Expandiendo a f(x) en una serie de Taylor alrededor del punto x^0 y truncando dicha serie después del segundo término, se tiene

$$y = f(x) = f(x^0) + f'(x^0)\,\Delta x$$

o en otra forma

$$y - f(x^0) = f'(x^0)\,\Delta x$$

Si se tiene ahora un sistema de tres ecuaciones tales que

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ y_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \qquad 2.11$$

con valores iniciales x_1^0, x_2^0, x_3^0. El desarrollo de dos términos de Taylor alrededor de las condiciones iniciales es

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \Delta x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_1^0} + \Delta x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{x_2^0} + \Delta x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\Big|_{x_3^0} \\ y_2 &= f_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \Delta x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{x_1^0} + \Delta x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{x_2^0} + \Delta x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\Big|_{x_3^0} \\ y_3 &= f_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \Delta x_1 \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\Big|_{x_1^0} + \Delta x_2 \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\Big|_{x_2^0} + \Delta x_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\Big|_{x_3^0} \end{aligned} \qquad 2.12$$

lo cual puede escribirse matricialmente en la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} y_1 - f_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ y_2 - f_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ y_3 - f_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_1^0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{x_2^0} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\Big|_{x_3^0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{x_1^0} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{x_2^0} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\Big|_{x_3^0} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\Big|_{x_1^0} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\Big|_{x_2^0} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\Big|_{x_3^0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} \qquad 2.13$$

La matriz $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x}\right]$ se llama el Jacobiano de la función f_i.

De la ecuación anterior se obtiene el valor de Δx_i, con lo que se calcula el nuevo valor de x. Es decir

$$x_i^1 = x_i^0 + \Delta x_i \qquad 2.14$$

El proceso se repite hasta que $\Delta x_i = x_i^1 - x_i^0$ sea igual a cero o esté dentro de una tolerancia especificada. Los valores del Jacobiano tendrán que calcularse en cada iteración. Si el sistema de ecuaciones es lineal, se logra convergencia en la primera iteración.

EJEMPLO 4

Resolver el Ejemplo 1 usando el método Newton-Raphson con valores iniciales

$$I_1^0 = I_2^0 = I_3^0 = 1$$

En el Ejemplo 1 se tiene que

$$f_1(I_1,I_2,I_3) = -5 = 6I_1 - I_2 - 3I_3$$

$$f_2(I_1,I_2,I_3) = 10 = -I_1 + 7I_2 - I_3$$

$$f_3(I_1,I_2,I_3) = 10 = -3I_1 - I_2 + 5I_3$$

Los elementos del Jacobiano son

$$\frac{\partial f_1}{\partial I_1} = 6 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial I_2} = -1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial I_3} = -3$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial I_1} = -1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial I_2} = 7 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial I_3} = -1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial I_1} = -3 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial I_2} = -1 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial I_3} = 5$$

Además

$$f_1(I_1^0,I_2^0,I_3^0) = 6 \times 1 - 1 \times 1 - 3 \times 1 = 2$$

$$f_2(I_1^0,I_2^0,I_3^0) = -1 \times 1 + 7 \times 1 - 1 \times 1 = 5$$

$$f_3(I_1^0,I_2^0,I_3^0) = -3 \times 1 - 1 \times 1 + 5 \times 1 = 1$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} -5-2 \\ 10-5 \\ 10-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \\ \Delta I_3 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \\ \Delta I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{130} \begin{bmatrix} 34 & 8 & 22 \\ 8 & 21 & 9 \\ 22 & 9 & 41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y

$$I_1^1 = I_1^0 + \Delta I_1 = 1 + 0 = 1$$

$$I_2^1 = I_2^0 + \Delta I_2 = 1 + 1 = 2$$

$$I_3^1 = I_3^0 + \Delta I_3 = 1 + 2 = 3$$

Una segunda iteración es

$$f_1(I_1^1,I_2^1,I_3^1) = 6 \times 1 - 1 \times 2 - 3 \times 3 = -5$$

$$f_2(I_1^1,I_2^1,I_3^1) = -1 \times 1 + 7 \times 2 - 1 \times 3 = 10$$

$$f_3(I_1^1,I_2^1,I_3^1) = -3 \times 1 - 1 \times 2 + 5 \times 3 = 10$$

y

$$\begin{bmatrix} -5-(-5) \\ 10-10 \\ 10-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 7 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \\ \Delta I_3 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\Delta I_1 = \Delta I_2 = \Delta I_3 = 0$$

y la solución es

$$I_1 = 1 \qquad I_2 = 2 \qquad I_3 = 3$$

EJEMPLO 5

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando el método Newton-Raphson y con valores iniciales

$$x^0 = y^0 = 1$$

$$x^2 - y = 3$$

$$-x + 3y = 1$$

Los elementos del Jacobiano son

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 3$$

por lo que

$$J = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Con $x^0 = y^0 = 1$ se tiene la primera iteración.

$$f_1(x^0, y^0) = (1)^2 - 1 \times 1 = 0$$

$$f_2(x^0, y^0) = -1 \times 1 + 3 \times 1 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 3 - 0 \\ 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ .2 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$x^1 = x^0 + \Delta x = 1 + 1.6 = 2.6$$

$$y^1 = y^0 + \Delta y = 1 + .2 = 1.2$$

Una segunda iteración es

$$f_1(x^1, y^1) = (2.6)^2 - 1.2 = 5.56$$

$$f_2(x^1, y^1) = -2.6 + 3 \times 1.2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 - 5.56 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2.6 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \frac{1}{14.6} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.56 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.526 \\ -.175 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = x^1 + \Delta x = 2.6 - .526 = 2.074$$

$$y^2 = y^1 + \Delta y = 1.2 - .175 = 1.025$$

Una tercera iteración es

$$f_1(x^2, y^2) = (2.074)^2 - 1.025 = 3.276$$

$$f_2(x^2, y^2) = -2.074 + 3 \times 1.025 = 1.001$$

$$\begin{bmatrix} 3 - 3.276 \\ 1 - 1.001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2.074 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \frac{1}{11.444} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4.148 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.276 \\ -.001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.072 \\ -.024 \end{bmatrix}$$

$$x^3 = x^2 + \Delta x = 2.074 - .072 = 2.002$$

$$y^3 = y^2 + \Delta y = 1.025 - .024 = 1.001$$

La cuarta iteración es

$$f_1(x^3, y^3) = (2.002)^2 - 1.001 = 3.007$$

$$f_2(x^3, y^3) = -2.002 + 3 \times 1.001 = 1.001$$

$$\begin{bmatrix} 3 - 3.007 \\ 1 - 1.001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2.002 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \frac{1}{11.012} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4.004 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.007 \\ -.001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.002 \\ -.001 \end{bmatrix}$$

$$x^4 = x^3 + \Delta x = 2.002 - .002 = 2.000$$

$$y^4 = y^3 + \Delta y = 1.001 - .001 = 1.000$$

La quinta iteración es

$$f_1(x^4, y^4) = (2.000)^2 - 1.000 = 3.000$$

$$f_2(x^4, y^4) = -2.000 + 3 \times 1.000 = 1.000$$

$$\begin{bmatrix} 3 - 3 \\ 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

de donde $\Delta x = 0$ $\Delta y = 0$

por lo que la solución es

$$x = 2.000 \quad y = 1.000$$

EJEMPLO 6

Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales en donde se desea determinar las variables λ, P_1 y P_2 usando el método de Newton-Raphson. Escribir la ecuación matricial para iniciar el proceso.

$$\lambda(1 - 2B_{11}P_1 - 2B_{12}P_2) = m_1P_1 + b_1$$

$$\lambda(1 - 2B_{21}P_1 - 2B_{22}P_2) = m_2P_2 + b_2$$

$$P_1 + P_2 = D$$

Ordenando las ecuaciones se tiene

$$f_1(\lambda, P_1, P_2) = \lambda(1 - 2B_{11}P_1 - 2B_{12}P_2) - m_1P_1 = b_1$$

$$f_2(\lambda, P_1, P_2) = \lambda(1 - 2B_{21}P_1 - 2B_{22}P_2) - m_2P_2 = b_2$$

$$f_3(\lambda, P_1, P_2) = P_1 + P_2 = D$$

Los elementos del Jacobiano son

$$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda} = 1 - 2B_{11}P_1 - 2B_{12}P_2 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial P_1} = -2\lambda B_{11} - m_1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial P_2} = -2\lambda B_{12} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \lambda} = 1 - 2B_{21}P_1 - 2B_{22}P_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial P_1} = -2\lambda B_{21} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial P_2} = -2\lambda B_{22} - m_2$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \lambda} = 0 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial P_1} = 1 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial P_2} = 1$$

Por lo que la ecuación matricial es

$$\begin{bmatrix} b_1 - \lambda(1 - 2B_{11}P_1 - 2B_{12}P_2) + m_1P_1 \\ b_2 - \lambda(1 - 2B_{21}P_1 - 2B_{22}P_2) + m_2P_2 \\ D - (P_1 + P_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - 2B_{11}P_1 - 2B_{12}P_2 & -2\lambda B_{11} - m_1 & -2\lambda B_{12} \\ 1 - 2B_{21}P_1 - 2B_{22}P_2 & -2\lambda B_{21} & -2\lambda B_{22} - m_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix}$$

6. ANALISIS DEL PROBLEMA DE FLUJO DE POTENCIA

El análisis del problema de flujo de potencia consiste en la determinación del voltaje, corriente y potencia activa y reactiva en los diferentes puntos de una red eléctrica. En cada barra del sistema están presente siempre cuatro

variables: la potencia activa P, la potencia reactiva Q, la magnitud del voltaje $|V|$ y el ángulo del voltaje δ. En cada una de las barras, dependiendo de su tipo, se especifican dos de estas variables y se calculan las otras dos. Es necesario además seleccionar una barra llamada barra de referencia o barra oscilante en la cual se encuentre un generador que provea la potencia activa necesaria para suplir la diferencia entre la potencia activa de los otros generadores y la demanda; siendo la demanda la potencia de la carga más las pérdidas en las líneas de transmisión.

En el problema de flujo de potencia normalmente se identifican tres tipos de barras: 1) la barra de referencia o barra oscilante, la cual es la barra del generador que responde más rápidamente a cambios de condiciones de carga. En esta barra se especifica la magnitud y el ángulo del voltaje, 2) la barra de generación, la cual es la barra en donde se especifica la potencia activa y la magnitud del voltaje, 3) la barra de carga, la cual es la barra en donde se especifica la potencia activa y la potencia reactiva. De acuerdo a esta definición la barra de generación y la barra de carga pueden contener indistintamente generadores y cargas, tomando su nombre solamente por las cantidades que en ellas se especifican y no por lo que contienen. En oportunidades es conveniente especificar como barra de carga a una barra que contenga solamente generadores, o especificar como barra de generación a una barra que contenga solamente cargas. La barra mixta es una barra en donde estén colocados generadores (diferentes al de la barra oscilante) y cargas. Esta barra se puede considerar como barra de generación, especificando en ella la potencia activa neta (generación menos carga) que entra a la barra y la magnitud del voltaje.

A menudo en las barras de generación se coloca una restricción adicional, la cual es los límites máximos y mínimos de la potencia reactiva.

El problema de flujo de potencia está sometido a las siguientes condiciones:

a) Se considera que el sistema tiene secuencia positiva solamente.
b) Se desprecian los efectos de inductancias mutuas en las líneas.
c) No se consideran las impedancias de los generadores.

Con los métodos de Gauss-Seidel y Newton-Raphson se determina la magnitud y ángulo del voltaje en cada barra con excepción de la barra oscilante en donde esa información es conocida. Con este estado del sistema se calculan los flujos de potencia y de corriente entre todas las barras.

7. EL METODO GAUSS-SEIDEL APLICADO AL PROBLEMA DE FLUJO DE POTENCIA.

El método consiste en asignar valores estimados a los voltajes desconocidos y calcular en forma iterativa nuevos valores de voltaje para cada barra, los cuales son usados en una nueva iteración hasta la convergencia total.

La ecuación básica empleada en el método Gauss-Seidel es la relacionada con la corriente que entra a cada barra en función de la potencia asociada. La corriente que entra a la barra k es

$$I_k = \frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} = Y_{k1}V_1 + Y_{k2}V_2 + \cdots + Y_{kk}V_k + \cdots + Y_{kN}V_n \qquad 2.15$$

o también

$$I_k = \frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} = \sum_{m=1}^{N} Y_{km}V_m \qquad 2.16$$

Por lo que

$$V_k = \frac{1}{Y_{kk}}\left(\frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} - (Y_{k1}V_1 + Y_{k2}V_2 + \cdots + Y_{kN}V_N)\right)$$

$$= \frac{1}{Y_{kk}}\left(\frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} Y_{km}V_m\right) \qquad 2.17$$

siendo Y_{km} los valores de la matriz admitancia de barra, los cuales dependen de las impedancias de las líneas de transmisión entre las diferentes barras, de las impedancias de los transformadores y de las capacitancias a tierra. La forma de tratar a la ecuación depende del tipo de barra.

Barra Oscilante:

Es la barra tomada como referencia en la cual se especifica la magnitud y ángulo del voltaje, por lo que no es necesario hacer ningún cálculo de voltaje.

Barra de Carga:

Es la barra en donde se especifica la potencia activa y la potencia reactiva. Estas cantidades tendrán valores positivos si se trata de un generador y tendrán valores negativos si se trata de una carga.

Barra de Generación:

Es la barra en donde se especifica la potencia activa P y la magnitud del voltaje, desconociéndose la potencia reactiva Q, por lo que se tiene que calcular esta potencia antes de usar la ecuación anterior. La potencia aparente que entra a la barra k es

$$S_k^* = P_k - jQ_k = V_k^* \sum_{m=1}^{N} Y_{km}V_m \qquad 2.18$$

por lo que

$$Q_k = - I_{mag}\left[V_k^* \sum_{m=1}^{N} Y_{km}V_m \right] \qquad 2.19$$

El voltaje se calcula ahora con la ecuación anterior. Como la magnitud del voltaje ya se ha especificado, se aprovecha solamente el ángulo, corrigiendo el valor calculado de la manera siguiente:

$$V_k = \frac{|V_k|_{especificado}}{|V_k|_{calculado}} \times V_{k\ calculado} \qquad 2.20$$

El proceso iterativo se puede resumir entonces en la forma siguiente:

1. Se calcula la matriz admitancia de barra del sistema.
2. Se tomarán como valores iniciales de voltajes todos los valores conocidos, es decir, la magnitud y ángulo en la barra oscilante y la magnitud en las barras de generación.
3. Si se trata de una barra de carga se asumirán valores iniciales de la magnitud y ángulo de voltaje en esa barra. En valores por unidad un buen estimado inicial es 1.0 para la magnitud y 0.0 para el ángulo. Las potencias activas y reactivas tendrán valores negativos si se trata de una carga y positivos si se trata de un generador.
4. Si se trata de una barra de generación se toma como valor inicial la magnitud del voltaje especificado y se asume el valor del ángulo. Las potencias activas y reactivas tendrán valores positivos si se trata de un generador y negativos si se trata de una carga. Antes de calcular el voltaje se calcula previamente la potencia reactiva mediante la ecuación.

$$Q_k = - I_{mag}\left[V_k^* \sum_{m=1}^{N} Y_{km}V_m \right] \qquad 2.21$$

usando los mejores valores de voltaje que se conozcan para el momento.

5. Los valores iniciales estimados se colocan en el lado derecho de la ecuación.

$$V_k = \frac{1}{Y_{kk}}\left[\frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} - \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} Y_{km}V_m\right] \qquad 2.22$$

y se calcula el nuevo voltaje en el lado izquierdo.

6. En la barra de generación se corrige el valor calculado en el lado derecho mediante la expresión

$$V_k = \frac{|V_k|_{\text{especificado}}}{|V_k|_{\text{calculado}}} \times V_{k\ \text{calculado}} \qquad 2.23$$

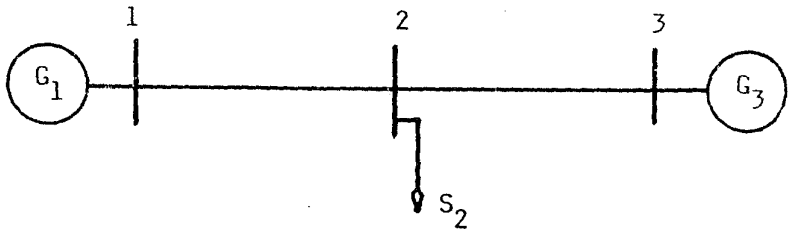
7. Si se especifican los valores máximos y mínimos de la potencia reactiva de los generadores, se calcula la potencia reactiva en la barra de generación en la forma como se indica en la parte 4. Si el valor calculado es mayor que el valor máximo especificado, se tomará el valor máximo. Si el valor calculado es menor que el valor mínimo especificado, se tomará el valor mínimo. En otras situaciones se tomará el valor calculado.

EJEMPLO 7

En la red siguiente usando el método de Gauss-Seidel calcular la magnitud y ángulo del voltaje en cada barra en dos iteraciones. Los datos del sistema son

$V_1 = 1.1\angle 0^o \qquad |V_3| = 1.05 \qquad S_2 = 1.0 + j.8$

$P_3 = .6 \qquad z_{12} = .0118 + j.047 \qquad z_{23} = .069 + j.172$



Como en la barra 2 se define P y Q, será tratada como barra de carga y como en la barra 3 se define $|V|$ y P, será tratada como barra de generación.

Las ecuaciones a usar son:

Barra 2

$$V_2 = \frac{1}{Y_{22}}\left[\frac{P_2 - jQ_2}{V_2^*} - Y_{21}V_1 - Y_{23}V_3\right]$$

Barra 3

$$V_3 = \frac{1}{Y_{33}}\left[\frac{P_3 - jQ_3}{V_3^*} - Y_{31}V_1 - Y_{32}V_2\right]$$

$$Q_3 = -I_{mag}\left[V_3^*(Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3)\right]$$

Las admitancias son

$$y_{12} = \frac{1}{z_{12}} = \frac{1}{.0118 + j.047} = 5.0250 - j20.0150$$

$$y_{23} = \frac{1}{z_{23}} = \frac{1}{.0690 + j.172} = 2.0090 - j5.0080$$

$$y_{12} = 0.0 + j0.0$$

La matriz admitancia de barra es

$$Y = \begin{bmatrix} 5.0250 - j20.0150 & -5.0250 + j20.0150 & 0.0 + j0.0 \\ -5.0250 + j20.0150 & 7.0340 - j25.0230 & -2.0090 + j5.0080 \\ 0.0 + j0.0 & -2.0090 + j5.0080 & 2.0090 - j5.0080 \end{bmatrix}$$

Se inicia la primera iteración con $V_2 = 1.0\angle 0.0$ y $\delta_3 = 0.0$.

$$V_2 = \frac{1}{7.0340 - j25.0230}\left[\frac{-1 + j.8}{1.0 + j0.0} - (-5.0250 + j20.015)(1.1 + j0)\right.$$

$$\left.-(-2.0090 + j5.0080)(1.05 + j0.0)\right]$$

$$= 1.0496 - j.0298 = 1.0501\angle -1.6274^{\circ}$$

$$Q_3 = -I_{mag}\left[(1.05 + j0.0)\left[(0.0 + j0.0)(1.1 + j0.0) + (-2.0090 + j5.0080)(1.0496 - j.0298) + (2.0090 - j5.0080)(1.05 + j0.0)\right]\right] = -.0608$$

$$V_3 = \frac{1}{2.0090 - j5.0080}\left[\frac{.6 + j.0608}{1.05 + j0.0} - (0.0 + j0.0)(1.1 + j0.0) - (-2.0090 + j5.0080)(1.0496 - j.0298)\right]$$

$$= 1.0791 + j.0725 = 1.0815\angle 3.8425^{\circ}$$

Se corrige V_3 con la magnitud especificada y con el ángulo calculado.

$$V_3 = 1.05\angle 3.8425^{\circ} = 1.0476 + j.0704$$

Se inicia la segunda iteración

$$V_2 = \frac{1}{7.0340 - j25.0230}\left[\frac{-1 + j.8}{1.0496 + j.0298} - (-5.0250 + j20.0150)(1.1) - (-2.0090 + j5.0080)(1.0476 + j.0704)\right]$$

$$= 1.0487 - j.0129 = 1.0488\angle -.7039^{\circ}$$

$$Q_3 = -\text{Imag}\left[(1.0476 - j.0704)\left[(0.0 + j0.0)(1.1 + j0.0) + (-2.0090 + j5.0080)(1.0487 - j.0129) + (2.0090 - j5.0080)(1.0476 + j.0704)\right]\right] = -.1519$$

$$V_3 = \frac{1}{2.0090 - j5.0080}\left[\frac{.6 + j.1519}{1.0476 - j.0704} - (0.0 + j0.0)(1.1 + j0.0) - (-2.0090 + j5.0080)(1.0487 - j.0129)\right]$$

$$= 1.0559 + j.0961 = 1.0603\angle 5.2007^{\circ}$$

Corrigiendo nuevamente a V_3

$$V_3 = 1.05\angle 5.2007^{\circ} = 1.0457 + j.0952$$

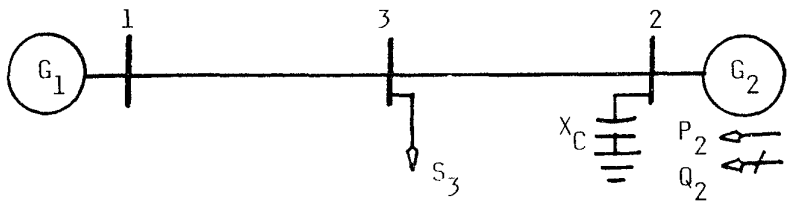
EJEMPLO 8

En la red siguiente usando el método de Gauss-Seidel calcular la magnitud y ángulo del voltaje en cada barra en 2 iteraciones. Los datos del sistema son

$$z_{13} = .0360 + j.1200 \qquad z_{23} = .0102 + j.0315$$

$$S_3 = 1.1 + j1.0 \qquad P_2 = .6 \qquad Q_2 = .8$$

$$V_1 = 1.05\angle 0^{\circ} \qquad X_C = -j.3250$$



Se observa en el ejemplo que en la barra 2 y en la barra 3 se especifican las potencias activas y reactivas, por lo que dichas barras serán tratadas como barras de carga. Se observa además que existe una capacitancia a tierra. El procedimiento para resolver el problema es idéntico al utilizado en el problema anterior, con la diferencia de que la admitancia de la capacitancia a tierra se coloca en la matriz admitancia de barra.

Las ecuaciones a usar son

$$V_2 = \frac{1}{Y_{22}}\left[\frac{P_2 - jQ_2}{V_2^*} - Y_{21}V_1 - Y_{23}V_3\right]$$

$$V_3 = \frac{1}{Y_{33}}\left[\frac{P_3 - jQ_3}{V_3^*} - Y_{31}V_1 - Y_{32}V_2\right]$$

Las admitancias son

$$y_{13} = \frac{1}{z_{13}} = \frac{1}{.0360 + j.1200} = 2.2936 - j7.6453$$

$$y_{23} = \frac{1}{z_{23}} = \frac{1}{.0102 + j.0315} = 9.3041 - j28.7333$$

$$y_{12} = 0.0 + j0.0$$

$$y_{20} = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{-j.3250} = 0.0 + j3.0769$$

La matriz admitancia de barra es

$$Y = \begin{bmatrix} 2.2936 - j7.6453 & 0.0 + j0.0 & -2.2936 + j7.6453 \\ 0.0 + j0.0 & 9.3041 - j25.6564 & -9.3041 + j28.7333 \\ -2.2936 + j7.6453 & -9.3041 + j28.7333 & 11.5977 - j36.3786 \end{bmatrix}$$

Primera iteración:

Se comienza con $V_2 = V_3 = 1.0 + j0.0$

$$V_2 = \frac{1}{9.3041 - j25.6564}\left[\frac{.6 - j.8}{1.0 + j0.0} - (0.0 + j0.0)(1.05 + j0.0) - (-9.3041 + j28.7333)(1.0 + j0.0)\right]$$

$$= 1.1410 - j.0278 = 1.1414\angle -1.3937^\circ$$

$$V_3 = \frac{1}{11.5977 - j36.3786}\left[\frac{-1.1 + j1.0}{1.0 + j0.0} - (2.2936 + j7.6453)(1.05) - (-9.3041 + j28.7333)(1.1410 - j.0278)\right]$$

$$= 1.0884 - j.0412 = 1.0892\angle -2.1655^\circ$$

Segunda iteración:

$$V_2 = \frac{1}{9.3041 - j25.6564}\left[\frac{.6 - j.8}{1.1410 + j.0278} - (0.0 + j0.0)(1.05 + j0.0) - (-9.3041 + j28.7333)(1.0884 - j.0412)\right]$$

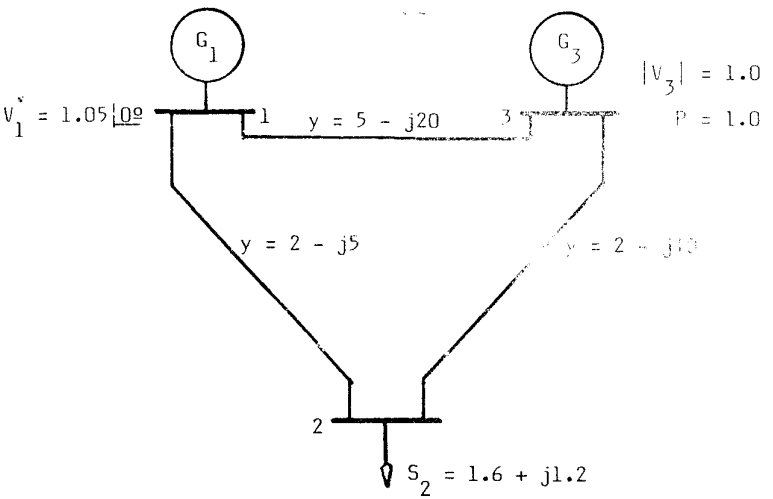
$$= 1.2331 - j.0788 = 1.2356\angle -3.6563^\circ$$

$$V_3 = \frac{1}{11.5977 - j36.3786}\left[\frac{-1.1 + j1.0}{1.0884 + j.0412} - (-2.2936 + j7.6453)(1.05) - (-9.3041 + j28.7333)(1.2331 - j.0788)\right]$$

$$= 1.1635 - j.0784 = 1.1662\angle -3.8542^\circ$$

EJEMPLO 9

Encontrar el estado del sistema siguiente usando el método Gauss-Seidel con un factor de aceleración de 1.5 y con una tolerancia de .0001. Indicar todos los detalles.



La matriz admitancia de barra es

$$Y = \begin{bmatrix} 7 - j25 & -2 + j5 & -5 + j20 \\ -2 + j5 & 4 - j15 & -2 + j10 \\ -5 + j20 & -2 + j10 & 7 - j30 \end{bmatrix}$$

Los valores conocidos son:

Barra Oscilante: $|V_1| = 1.05$ $\delta_1 = 0º$

Barra de Generación: $|V_3| = 1.0$ $P_3 = 1.0$

Barra de Carga $P_2 = 1.6$ $Q_2 = 1.2$

Se asumen los siguientes valores iniciales:

$|V_2| = 1.0$ $\delta_2 = 0º$ $\delta_3 = 0º$

Se comienza el análisis. La barra 2 es una barra de carga, por lo que

$$V_2 = \frac{1}{Y_{22}}\left[\frac{P_2 - jQ_2}{V_2^*} - Y_{21}V_1 - Y_{23}V_3\right]$$

$$V_2^1 = \frac{1}{4 - j15}\left[\frac{-1.6 - j(-1.2)}{1.0 + j0.0} - (-2 + j5)(1.05 + j0.0)\right.$$

$$\left. -(-2 + j10)(1.0 + j0.0)\right]$$

$$= .916 - j.078 = .919\underline{|-4.842º}$$

Acelerando con factor de 1.5 se tiene

$$\Delta V_2^1 = V_2^1 - V_2^0 = .916 - j.078 - (1.0 + j0.0)$$

$$= -.084 - j.078$$

$$V_2^1 = V_2^0 + \alpha\Delta V_2^1 = 1.0 + j0.0 + 1.5(-.084 - j.078)$$

$$= .874 - j.117 = .882\underline{|-7.625º}$$

La barra 3 es una barra de generación, por lo que hay que calcular primero a la potencia reactiva con la mejor información de voltajes que se conozcan en este momento.

$$Q_3 = -\text{Imag}\left[V_3^*(Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3)\right]$$

$$= -\text{Imag}\left[(1.0 + j0.0)[(-5 + j20)(1.05 + j0.0)\right.$$

$$\left. + (-2 + j10)(.874 - j.117) + (7 - j30)(1.0 + j0.0)]\right]$$

$$= .026$$

El voltaje en la barra es entonces

$$V_3^1 = \frac{1}{Y_{33}}\left[\frac{P_3 - jQ_3}{V_3^*} - Y_{31}V_1 - Y_{32}V_2\right]$$

$$V_3^1 = \frac{1}{7 - j30}\left[\frac{1 - j.026}{1.0 + j0.0} - (-5 + j20)(1.05 + j0.0)\right.$$

$$\left. -(-2 + j10)(.874 - j.117)\right]$$

$$= .999 - j.005 = .999\underline{|-.312º}$$

Acelerando se tiene

$$V_3^1 = V_3^0 + \alpha(V_3^1 - V_3^0)$$

$$= 1.0 + j0.0 + 1.5\left[(.999 - j.005) - (1.0 + j0.0)\right]$$

$$= .999 - j.008 = .999\underline{|-.459º}$$

Corrigiendo para tomar el ángulo solamente

$$V_3^1 = 1.0\underline{|-.459º} = 1.000 - j.008$$

Se comprueba ahora si la solución está dentro de la tolerancia permitida.

$$Re|\Delta V_2| = Re|V_2^1 - V_2^0| = |.874 - 1.000| = .126 > .0001$$

$$Im|\Delta V_2| = Im|V_2^1 - V_2^0| = |.000 - .117| = .117 > .0001$$

$$R_e|\Delta V_3| = Re|V_3^1 - V_3^0| = |1.00 - 1.00| = .000 < .0001$$

$$I_m|\Delta V_3| = Im|V_3^1 - V_3^0| = |.000 - .008| = .008 > .0001$$

Como existen algunas diferencias de valores que están fuera de la tolerancia permitida se continúa con el proceso.

Segunda iteración:

Barra 2:

$$V_2^2 = \frac{1}{4 - j15}\left[\frac{-1.6 - j(-1.2)}{.874 + j.117} - (-2 + j5)(1.05 + j0.0) - (-2 + j10)(1.0 - j.008)\right]$$

$$= .8911 - j.0775 = .8945\underline{|-4.9684^\circ}$$

Acelerando se tiene

$$V_2^2 = V_2^1 + \alpha(V_2^2 - V_2^1)$$

$$= .8740 - j.1170 + 1.5[(.8911 - j.0775) - (.8740 - j.117)]$$

$$= .8997 - j.0577 = .9015\underline{|-3.6698^\circ}$$

Barra 3:

$$Q_3 = -Imag[(1.0 + j.008)[(-5 + j20)(1.05 + j0.0) + (-2 + j10)(.8997 - j.0577) + (7 - j30)(1.0 - j.008)]]$$

$$= - .0587$$

$$V_3^2 = \frac{1}{7 - j30}\left[\frac{1.0 + j.0587}{1.0 + j.008} - (-5 + j20)(1.05 + j0.0) - (-2 + j10)(.8997 - j.0577)\right]$$

$$= 1.0054 + j.0145 = 1.0055\underline{|.8263^\circ}$$

Acelerando se tiene

$$V_3^2 = V_3^1 + \alpha(V_3^2 - V_3^1)$$

$$= 1.0 - j.008 + 1.5[(1.0054 + j.0145) - (1.0 - j.0008)]$$

$$= 1.0081 + j.0257 = 1.0084\underline{|1.4623^\circ}$$

Se corrige para tomar solamente el ángulo.

$$V_3^2 = 1.000\underline{|1.4623^\circ} = .9997 + j.0255$$

Después de 11 iteraciones se logra la solución dentro de la tolerancia especificada:

$$V_1 = 1.0500\underline{|0^\circ} = 1.05000 + j.00000$$

$$V_2 = .90158\underline{|-4.4359^\circ} = .89888 - j.06973$$

$$V_3 = 1.0000\underline{|.66600^\circ} = .99993 + j.01162$$

8. EL METODO NEWTON-RAPHSON APLICADO AL PROBLEMA DE FLUJO DE POTENCIA.

Este método consiste en calcular en cualquier barra k, mediante el uso de los Jacobianos, los valores de potencia activa P_k, potencia reactiva Q_k y voltaje V_k, y compararlos con valores especificados. Al igual que el método Gauss-Seidel, en las barras de carga se especifican los valores de P y de Q, siendo las incógnitas la magnitud y ángulo de voltaje, $|V|$ y δ, las cuales pueden conseguirse si se tienen las partes reales e imaginarias del voltaje, es decir, e y

f En las barras de generación se especifican P y $|V|$ y se calcula Q y δ, las cuales se consiguen también si se tiene a la parte real e y la parte imaginaria f del voltaje. El problema se reduce entonces a tener a e y f como incógnitas. El método tiene las ventajas que elimina los cálculos con cantidades complejas y además reduce el número de iteraciones.

Se derivarán expresiones de P, Q y V en una barra k en función de las variables e y f, con el objeto de calcular los valores de las funciones P, Q y V y de conseguir las derivadas parciales de P, Q y V con respecto a las variables e y f, las cuales serán los elementos del Jacobiano.

La corriente que entra al nodo k en un sistema de N barras es

$$I_k = Y_{k1}V_1 + Y_{k2}V_2 + Y_{k3}V_3 + \cdots\cdots + Y_{kN}V_N$$

$$= \sum_{m=1}^{N} Y_{km}V_m \qquad 2.24$$

en donde

$$Y_{km} = |Y_{km}|\underline{\theta_{km}} = G_{km} + jB_{km} \qquad 2.25$$

$$V_m = |V_m| e^{j\delta_m} = e_m + jf_m \qquad 2.26$$

La potencia que entra al nodo k es

$$S_k = P_k + jQ_k = V_k I_k^* = V_k \sum_{m=1}^{N} Y_{km}^* V_m^* \qquad 2.27$$

siendo

$$V_k = |V_k| e^{j\delta_k} = e_k + jf_k \qquad 2.28$$

Substituyendo se tiene

$$S_k = (e_k + jf_k) \sum_{m=1}^{N} (G_{km} - jB_{km})(e_m - jf_m) \qquad 2.29$$

Desarrollando

$$S_k = \sum_{m=1}^{N} e_k(e_m G_{km} - f_m B_{km}) + f_k(e_m B_{km} + f_m G_{km})$$
$$+ j \sum_{m=1}^{N} f_k(e_m G_{km} - f_m B_{km}) - e_k(e_m B_{km} + f_m G_{km}) \qquad 2.30$$

por lo que

$$P_k = \sum_{m=1}^{N} e_k(e_m G_{km} - f_m B_{km}) + f_k(e_m B_{km} + f_m G_{km}) \qquad 2.31$$

$$Q_k = \sum_{m=1}^{N} f_k(e_m G_{km} - f_m B_{km}) - e_k(e_m B_{km} + f_m G_{km}) \qquad 2.32$$

y en forma más conveniente

$$P_k = e_k(e_k G_{kk} - f_k B_{kk}) + f_k(f_k G_{kk} + e_k B_{kk})$$
$$+ \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} e_k(e_m G_{km} - f_m B_{km}) + f_k(f_m G_{km} + e_m B_{km}) \qquad 2.33$$

$$Q_k = f_k(e_k G_{kk} - f_k B_{kk}) - e_k(f_k G_{kk} + e_k B_{kk})$$
$$+ \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} f_k(e_m G_{km} - f_m B_{km}) - e_k(f_m G_{km} + e_m B_{km}) \qquad 2.34$$

Para formar la ecuación de la Sección 5 de la diferencia entre valores especificados y valores calculados en función del Jacobiano se procede de la manera siguiente:

1) Para encontrar la diferencia entre valores especificados y calculados, se calculan con las expresiones anteriores las mismas cantidades que han sido especificadas en cada una de las barras con excepción de la barra oscilante. Esto es, la potencia activa en todas las barras, la potencia reactiva en las barras de carga y la magnitud del voltaje en las barras de generación.

2) Los elementos del Jacobiano son las derivadas de las cantidades referidas en el punto anterior con respecto a las variables e y f.

3) El incremento de las variables es Δe y Δf.
De esta manera se tiene para cada uno de los tipos de barras:
Para barras de generación y para barras de carga:

$$\Delta P_k = \frac{\partial P_k}{\partial e_m}\Delta e_m + \frac{\partial P_k}{\partial f_m}\Delta f_m \qquad 2.35$$

Para las barras de carga:

$$\Delta Q_k = \frac{\partial Q_k}{\partial e_m}\Delta e_m + \frac{\partial Q_k}{\partial f_m}\Delta f_m \qquad 2.36$$

Para las barras de generación:

$$\Delta |V_k|^2 = \frac{\partial |V_k|^2}{\partial e_m}\Delta e_m + \frac{\partial |V_k|^2}{\partial f_m}\Delta f_m \qquad 2.37$$

Lo cual en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} \Delta P_k \\ \Delta Q_k \\ \Delta |V_k|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_k}{\partial e_m} & \frac{\partial P_k}{\partial f_m} \\ \frac{\partial Q_k}{\partial e_m} & \frac{\partial Q_k}{\partial f_m} \\ \frac{\partial |V_k|^2}{\partial e_m} & \frac{\partial |V_k|^2}{\partial f_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_m \\ \Delta f_m \end{bmatrix} \qquad 2.38$$

La posición en la matriz de los elementos del Jacobiano depende del orden de colocación de los elementos en el lado izquierdo de la ecuación y del orden de colocación del vector

$$\begin{bmatrix} \Delta e_m \\ \Delta f_m \end{bmatrix} \qquad 2.39$$

EJEMPLO 10

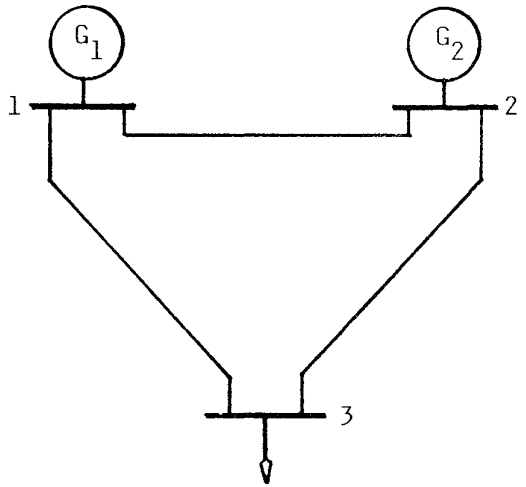
El siguiente es un ordenamiento del sistema de ecuaciones a resolver correspondiente a la red indicada. Calcular cada uno de los elementos de la matriz jacobiana en función de e_m y de f_m y de las admitancias G y B.

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta Q_3 \\ \Delta P_3 \\ \Delta |V_2|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_3 \\ \Delta e_3 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix}$$

Como el sistema es de 3 barras, las ecuaciones de potencia son

$$P_k = \sum_{m=1}^{3} e_k(e_m G_{km} - f_m B_{km}) + f_k(f_m G_{km} + e_m B_{km})$$

$$Q_k = \sum_{m=1}^{3} f_k(e_m G_{km} - f_m B_{km}) - e_k(f_m G_{km} + e_m B_{km}).$$



Se deben calcular las cantidades mencionadas en el lado izquierdo de la ecuación, por lo que

$$P_2 = e_2(e_1G_{21} - f_1B_{21}) + f_2(f_1G_{21} + e_1B_{21})$$
$$+ e_2(e_2G_{22} - f_2B_{22}) + f_2(f_2G_{22} + e_2B_{22})$$
$$+ e_2(e_3G_{23} - f_3B_{23}) + f_2(f_3G_{23} + e_3B_{23})$$

$$Q_3 = f_3(e_1G_{31} - f_1B_{31}) - e_3(f_1G_{31} + e_1B_{31})$$
$$+ f_3(e_2G_{32} - f_2B_{32}) - e_3(f_2G_{32} + e_2B_{32})$$
$$+ f_3(e_3G_{33} - f_3B_{33}) - e_3(f_3G_{33} + e_3B_{33})$$

$$P_3 = e_3(e_1G_{31} - f_1B_{31}) + f_3(f_1G_{31} + e_1B_{31})$$
$$+ e_3(e_2G_{32} - f_2B_{32}) + f_3(f_2G_{32} + e_2B_{32})$$
$$+ e_3(e_3G_{33} - f_3B_{33}) + f_3(f_3G_{33} + e_3B_{33})$$

$$|V_2|^2 = e_2^2 + f_2^2$$

Los elementos de la matriz jacobiana, los cuales son derivadas parciales, dependen del ordenamiento de la ecuación. En este caso particular

$$a_{11} = \frac{\partial P_2}{\partial e_2} = e_1G_{21} - f_1B_{21} + 2e_2G_{22} + e_3G_{23} - f_3B_{23}$$

$$a_{12} = \frac{\partial P_2}{\partial f_3} = - e_2B_{23} + f_2G_{23}$$

$$a_{13} = \frac{\partial P_2}{\partial e_3} = e_2G_{23} + f_2B_{23}$$

$$a_{14} = \frac{\partial P_2}{\partial f_2} = f_1G_{21} + e_1B_{21} + 2f_2G_{22} + e_3B_{23} + f_3G_{23}$$

$$a_{21} = \frac{\partial Q_3}{\partial e_2} = - e_3B_{32} + f_3G_{32}$$

$$a_{22} = \frac{\partial Q_3}{\partial f_3} = e_1G_{31} - f_1B_{31} + e_2G_{32} - f_2B_{32} - 2f_3B_{33}$$

$$a_{23} = \frac{\partial Q_3}{\partial e_3} = -f_1G_{31} - e_1B_{31} - f_2G_{32} - e_2B_{32} - 2e_3B_{33}$$

$$a_{24} = \frac{\partial Q_3}{\partial f_2} = - e_3G_{32} - f_3B_{32}$$

$$a_{31} = \frac{\partial P_3}{\partial e_2} = e_3G_{32} + f_3B_{32}$$

$$a_{32} = \frac{\partial P_3}{\partial f_3} = f_1G_{31} + e_1B_{31} + f_2G_{32} + e_2B_{32} + 2f_3G_{33}$$

$$a_{33} = \frac{\partial P_3}{\partial e_3} = e_1G_{31} - f_1B_{31} + e_2G_{32} - f_2B_{32} + 2e_3G_{33}$$

$$a_{34} = \frac{\partial P_3}{\partial f_2} = - e_3B_{32} + f_3G_{32}$$

$$a_{41} = \frac{\partial |V_2|^2}{\partial e_2} = 2e_2$$

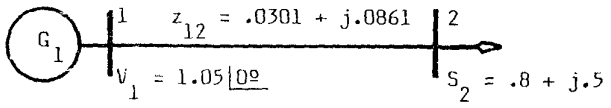
$$a_{42} = \frac{\partial |V_2|^2}{\partial f_3} = 0$$

$$a_{43} = \frac{\partial |V_2|^2}{\partial e_3} = 0$$

$$a_{44} = \frac{\partial |V_2|^2}{\partial f_2} = 2f_2$$

EJEMPLO 11

En la red siguiente calcular el voltaje V_2 usando el método Newton-Raphson con una tolerancia de voltajes de .0001.



La admitancia es

$$y_{12} = \frac{1}{z_{12}} = \frac{1}{.0301 + j.0861} = 3.6181 - j10.3495$$

La matriz admitancia de barra es

$$Y = \begin{bmatrix} 3.6181 - j10.3495 & -3.6181 + j10.3495 \\ -3.6181 + j10.3495 & 3.6181 - j10.3495 \end{bmatrix}$$

Las potencias en la barra 2 son

$$P_2 = e_2(e_1G_{21} - f_1B_{21}) + f_2(f_1G_{21} + e_1B_{21}) + e_2(e_2G_{22} - f_2B_{22}) + f_2(f_2G_{22} + e_2B_{22})$$

$$= e_2[3.6181(e_2 - e_1) + 10.3495(f_2 - f_1)] + f_2[3.6181(f_2 - f_1) - 10.3495(e_2 - e_1)]$$

$$Q_2 = f_2(e_1G_{21} - f_1B_{21}) - e_2(f_1G_{21} + e_1B_{21}) + f_2(e_2G_{22} - f_2B_{22}) - e_2(f_2G_{22} + e_2B_{22})$$

$$Q_2 = f_2[3.6181(e_2 - e_1) + 10.3495(f_2 - f_1)] - e_2[3.6181(f_2 - f_1) - 10.3495(e_2 - e_1)]$$

La ecuación es

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix}$$

Los elementos del jacobiano son

$$a_{11} = \frac{\partial P_2}{\partial e_2} = e_1G_{21} - f_1B_{21} + 2e_2G_{22} = -3.7990 + 7.2363e_2$$

$$a_{12} = \frac{\partial P_2}{\partial f_2} = f_1G_{21} + e_1B_{21} + 2f_2G_{22} = 10.8670 + 7.2363f_2$$

$$a_{21} = \frac{\partial Q_2}{\partial e_2} = -f_1G_{21} - e_1B_{21} - 2e_2B_{22} = -10.8670 + 20.6991e_2$$

$$a_{22} = \frac{\partial Q_2}{\partial f_2} = e_1G_{21} - f_1B_{21} - 2f_2B_{22} = -3.7990 + 20.6991f_2$$

Primera iteración:

$e_1 = 1.05$ $f_1 = 0.0$ $e_2 = 1.0$ $f_2 = 0.0$

con lo que

$P_2 = -.1809$ $Q_2 = -.5175$

$\Delta P_2 = -.8 - (-.1809) = -.6191$

$\Delta Q_2 = -.5 - (-.5175) = .0175$

y

$$\begin{bmatrix} -.6191 \\ .0175 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4373 & 10.8670 \\ 9.8321 & -3.7990 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.0180 \\ -.0513 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$e_2^1 = e_2^0 + \Delta e_2 = 1.0 - .0180 = .9820$$

$$f_2^1 = f_2^0 + \Delta f_2 = 0.0 - .0513 = -.0513$$

y

$$V_2 = .9820 - j.0513 = .9833\underline{|-2.9904º}$$

Segunda iteración:

$$P_2 = .9820(-.2460 - .5309) - .0513(-.1856 + .7038)$$

$$= .9820(-.7769) - .0513(.5182) = -.7895$$

$$Q_2 = -.0513(-.7769) - .9820(.5182) = -.4690$$

$$\Delta P_2 = -.8 - (-.7895) = -.0105$$

$$\Delta Q_2 = -.5 - (-.4690) = -.0310$$

$$\begin{bmatrix} -.0105 \\ -.0310 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3070 & 10.4958 \\ 9.4595 & -4.8609 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.0033 \\ .0000 \end{bmatrix}$$

$$e_2^2 = e_2^1 + \Delta e_2 = .9820 - .0033 = .9787$$

$$f_2^2 = f_2^1 + \Delta f_2 = -.0513 + .0000 = -.0513$$

$$V_2 = .9787 - j.0513 = .9800\underline{|-3.0005º}$$

Tercera iteración:

$$P_2 = .9787(-.7889) - .0513(.5523) = -.8004$$

$$Q_2 = -.0513(-.7889) - .9787(.5523) = -.5001$$

$$\Delta P_2 = -.8 - (-.8004) = .0004$$

$$\Delta Q_2 = -.5 - (-.5001) = .0001$$

$$\begin{bmatrix} .0004 \\ .0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2832 & 10.4958 \\ 9.3912 & -4.8609 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Como la diferencia de voltajes en dos iteraciones sucesivas está dentro de la tolerancia especificada de 0.0001, el proceso concluye, siendo la solución

$$V_2 = .9787 - j.0513 = .9800\underline{|-3.0005º}$$

Se observa que el método converge muy rápidamente.

Hasta aquí se ha explicado la forma de utilizar el método Newton-Raphson para encontrar el estado del sistema, detallando como encontrar y or-

denar la matriz jacobiana. Se explicará ahora una forma de ordenar dicha matriz de manera que pueda adaptarse al uso de las computadoras. En caso de no haber interés por este tipo de cálculo, se puede omitir el resto de la sección sin perder continuidad.

Se define lo siguiente:

$$J^1_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial e_m} \qquad J^2_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial f_m} \qquad J^3_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial e_m}$$

$$J^4_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial f_m} \qquad J^5_{km} = \frac{\partial |V_k|^2}{\partial e_m} \qquad J^6_{km} = \frac{\partial |V_k|^2}{\partial f_m} \qquad 2.40$$

Las ecuaciones anteriores se escriben en la siguiente forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \hline \Delta Q \\ \hline \Delta |V|^2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} J^1 & J^2 \\ \hline J^3 & J^4 \\ \hline J^5 & J^6 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \Delta e \\ \hline \Delta f \end{bmatrix} \qquad 2.41$$

en donde J^1, J^2, J^3, J^4, J^5 y J^6 son matrices y ΔP, ΔQ. $\Delta|V|^2$, Δe y Δf son vectores. Es decir para un sistema de N barras con M barras de carga se tiene

$$J^1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial e_2} & \frac{\partial P_2}{\partial e_3} & \cdots & \frac{\partial P_2}{\partial e_N} \\ \frac{\partial P_3}{\partial e_2} & \frac{\partial P_3}{\partial e_3} & \cdots & \frac{\partial P_3}{\partial e_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_N}{\partial e_2} & \frac{\partial P_N}{\partial e_3} & \cdots & \frac{\partial P_N}{\partial e_N} \end{bmatrix} \qquad 2.42$$

la cual se calcula para todas las barras a excepción de la barra oscilante.

$$J^2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial f_2} & \frac{\partial P_2}{\partial f_3} & \cdots & \frac{\partial P_2}{\partial f_N} \\ \frac{\partial P_3}{\partial f_2} & \frac{\partial P_3}{\partial f_3} & \cdots & \frac{\partial P_3}{\partial f_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial P_N}{\partial f_2} & \frac{\partial P_N}{\partial f_3} & \cdots & \frac{\partial P_N}{\partial f_N} \end{bmatrix} \qquad 2.43$$

la cual se calcula para todas las barras a excepción de la barra oscilante

$$J^3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_2}{\partial e_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial e_3} & \cdots & \frac{\partial Q_2}{\partial e_N} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial e_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial e_3} & \cdots & \frac{\partial Q_3}{\partial e_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Q_M}{\partial e_2} & \frac{\partial Q_M}{\partial e_3} & \cdots & \frac{\partial Q_M}{\partial e_N} \end{bmatrix} \qquad 2.44$$

la cual se calcula para las barras de carga solamente

$$J^4 = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_2}{\partial f_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial f_3} \cdots\cdots & \frac{\partial Q_2}{\partial f_N} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial f_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial f_3} \cdots\cdots & \frac{\partial Q_3}{\partial f_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial Q_M}{\partial f_2} & \frac{\partial Q_M}{\partial f_3} \cdots\cdots & \frac{\partial Q_M}{\partial f_N} \end{bmatrix} \qquad 2.45$$

la cual se calcula para las barras de carga solamente.

$$J^5 = \begin{bmatrix} \frac{\partial |V_{M+1}|^2}{\partial e_2} & \frac{\partial |V_{M+1}|^2}{\partial e_3} \cdots & \frac{\partial |V_{M+1}|^2}{\partial e_N} \\ \frac{\partial |V_{M+2}|^2}{\partial e_2} & \frac{\partial |V_{M+2}|^2}{\partial e_3} \cdots & \frac{\partial |V_{M+2}|^2}{\partial e_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial |V_N|^2}{\partial e_2} & \frac{\partial |V_N|^2}{\partial e_3} \cdots & \frac{\partial |V_N|^2}{\partial e_N} \end{bmatrix} \qquad 2.46$$

la cual se calcula para las barras de generación solamente.

$$J^6 = \begin{bmatrix} \frac{\partial |V_{M+1}|^2}{\partial f_2} & \frac{\partial |V_{M+1}|^2}{\partial f_3} \cdots & \frac{\partial |V_{M+1}|^2}{\partial f_N} \\ \frac{\partial |V_{M+2}|^2}{\partial f_2} & \frac{\partial |V_{M+2}|^2}{\partial f_3} \cdots & \frac{\partial |V_{M+2}|^2}{\partial f_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial |V_N|^2}{\partial f_2} & \frac{\partial |V_N|^2}{\partial f_3} & \frac{\partial |V_N|^2}{\partial f_N} \end{bmatrix} \qquad 2.47$$

la cual se calcula para las barras de generación solamente.

$$\Delta e = \begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta e_3 \\ \vdots \\ \Delta e_N \end{bmatrix} \qquad \Delta f = \begin{bmatrix} \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \\ \vdots \\ \Delta f_N \end{bmatrix}$$

Se calculan para las barras de generación.

2.48

$$\Delta P = \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \vdots \\ \Delta P_N \end{bmatrix} \qquad \Delta Q = \begin{bmatrix} \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \vdots \\ \Delta Q_N \end{bmatrix} \qquad \Delta |V|^2 = \begin{bmatrix} \Delta |V_{M+1}|^2 \\ \Delta |V_{M+2}|^2 \\ \vdots \\ \Delta |V_N|^2 \end{bmatrix}$$

Se calculan para todas las barras.

Se calculan para las barras de carga

Se calculan para las barras de generación.

En un sistema de N barras, tomando a la barra 1 como barra oscilante, las siguientes hasta M como barras de carga y el resto hasta N las barras de generación, la ecuación queda en la forma

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \vdots \\ \Delta P_N \\ \hline \Delta Q_2 \\ \Delta Q_3 \\ \vdots \\ \Delta Q_M \\ \hline \Delta|V_{M+1}|^2 \\ \Delta|V_{M+2}|^2 \\ \vdots \\ \Delta|V_N|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^1_{22} & J^1_{23} \cdots J^1_{2N} & J^2_{22} & J^2_{23} \cdots J^2_{2N} \\ J^1_{32} & J^1_{33} \cdots J^1_{3N} & J^2_{32} & J^2_{33} \cdots J^2_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J^1_{N2} & J^1_{N3} \cdots J^1_{NN} & J^2_{N2} & J^2_{N3} \cdots J^2_{NN} \\ \hline J^3_{22} & J^3_{23} \cdots J^3_{2N} & J^4_{22} & J^4_{23} \cdots J^4_{2N} \\ J^3_{32} & J^3_{33} \cdots J^3_{3N} & J^4_{32} & J^4_{33} \cdots J^4_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J^3_{M2} & J^3_{M3} \cdots J^3_{MN} & J^4_{M2} & J^4_{M3} \cdots J^4_{MN} \\ \hline J^5_{M+1,2} & J^5_{M+1,3} \cdots J^5_{M+1,N} & J^6_{M+1,2} & J^6_{M+1,3} \cdots J^6_{M+1,N} \\ J^5_{M+2,2} & J^5_{M+2,3} \cdots J^5_{M+2,N} & J^6_{M+2,2} & J^6_{M+2,3} \cdots J^6_{M+1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J^5_{N2} & J^5_{N3} \cdots J^5_{NN} & J^6_{N2} & J^6_{N3} \cdots J^6_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta e_3 \\ \vdots \\ \Delta e_N \\ \hline \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \\ \vdots \\ \Delta f_M \\ \hline \Delta f_{M+1} \\ \Delta f_{M+2} \\ \vdots \\ \Delta f_N \end{bmatrix} \qquad 2.49$$

Al igual que en casos anteriores, el problema consiste en calcular, mediante las fórmulas indicadas, los valores de P_2, P_3, ...P_N, Q_2, Q_3, ... Q_M, $|V_{M+1}|^2$, $|V_{M+2}|^2$, ... $|V_N|^2$, con los valores de voltajes que estén especificados. Los valores de voltajes no especificados se asumirán para la primera iteración. Con los valores especificados de P_2, P_3 ... P_N, Q_2, Q_3, ... Q_M, $|V_{M+1}|^2$, $|V_{M+2}|^2$, ... $|V_N|^2$ y los valores calculados se consigue la diferencia del lado izquierdo de la ecuación. Además con los valores de voltajes especificados o asumidos inicialmente se calculan los elementos del jacobiano. De la ecuación matricial se calculan entonces los valores de Δe y de Δf en el lado derecho de la ecuación. Los nuevos valores de voltajes de barra son

$$\begin{aligned} e^1 &= e^0 + \Delta e \\ f^1 &= f^0 + \Delta f \end{aligned} \qquad 2.50$$

Si los valores de Δe y Δf están dentro de una tolerancia establecida, el problema estará resuelto, siendo la solución los valores de voltajes de la iteración anterior. De no estar los incrementos de voltajes dentro de la tolerancia indicada, se usarán los nuevos valores de voltajes para calcular de nuevo los elementos del jacobiano y repetir el proceso.

A continuación se describe un método detallado que facilita el cálculo de los elementos del jacobiano. Primeramente se debe tomar en cuenta cuando k es igual a m y cuando es diferente. Si k es igual a m se calculan las corrientes de barras usando las potencias calculadas y los voltajes especificados o asumidos para facilitar la evaluación de estos elementos del jacobiano. De esta manera se tienen las siguientes expresiones:

$$J^1_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial e_m} = e_k G_{km} + f_k B_{km} \qquad m \neq k \qquad 2.51$$

$$J^1_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial e_k} = 2e_k G_{kk} - f_k B_{kk} + f_k B_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N} (e_m G_{km} - f_m B_{km})$$

Pero la corriente que entra al nodo k es

$$I_k = c_k + jd_k = \sum_{m=1}^{N} Y_{km}V_m = \sum_{m=1}^{N} (G_{km} + jB_{km})(e_m + jf_m)$$

$$= e_kG_{kk} - f_kB_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} (e_mG_{km} - f_mB_{km})$$

$$+ j(f_kG_{kk} + e_kB_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} (f_mG_{km} + e_mB_{km}))$$

por lo que

$$c_k = e_kG_{kk} - f_kB_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} (e_mG_{km} - f_mB_{km})$$

y

$$d_k = f_kG_{kk} + e_kB_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} (f_mG_{km} + e_mB_{km})$$

J^1_{kk} puede entonces reescribirse en la forma

$$\boxed{J^1_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial e_k} = e_kG_{kk} + f_kB_{kk} + c_k} \qquad 2.52$$

$$\boxed{J^2_{km} = \frac{\partial P_k}{\partial f_m} = -e_kB_{km} + f_kG_{km} \quad m \neq k} \qquad 2.53$$

$$J^2_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial f_k} = 2f_kG_{kk} - e_kB_{kk} + e_kB_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} (f_mG_{km} + e_mB_{km})$$

de donde

$$\boxed{J^2_{kk} = \frac{\partial P_k}{\partial f_k} = f_kG_{kk} - e_kB_{kk} + d_k} \qquad 2.54$$

$$\boxed{J^3_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial e_m} = f_kG_{km} - e_kB_{km} \quad m \neq k} \qquad 2.55$$

$$J^3_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial e_k} = -2e_kB_{kk} - f_kG_{kk} + f_kG_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} (-e_mB_{km} - f_mG_{km})$$

de donde

$$\boxed{J^3_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial e_k} = -e_kB_{kk} + f_kG_{kk} - d_k} \qquad 2.56$$

$$\boxed{J^4_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial f_m} = -e_kG_{km} - f_kB_{km} \quad m \neq k} \qquad 2.57$$

$$J^4_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial f_k} = -2f_kB_{kk} + e_kG_{kk} - e_kG_{kk} + \sum_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{N} (e_mG_{km} - f_mB_{km})$$

de donde

$$\boxed{J^4_{kk} = \frac{\partial Q_k}{\partial f_k} = -e_kG_{kk} - f_kB_{kk} + c_k} \qquad 2.58$$

$$J^5_{km} = \frac{\partial |V_k|^2}{\partial e_m} = 0 \quad m \neq k \qquad 2.59$$

$$J^5_{kk} = \frac{\partial |V_k|^2}{\partial e_k} = 2e_k \qquad 2.60$$

$$J^6_{km} = \frac{\partial |V_k|^2}{\partial f_m} = 0 \quad m \neq k \qquad 2.61$$

$$J^6_{kk} = \frac{\partial |V_k|^2}{\partial f_k} = 2f_k \qquad 2.62$$

EJEMPLO 12

Resolver el ejemplo 9 usando el método Newton-Raphson conjuntamente con las técnicas descritas en párrafos anteriores.

Se recuerda que:

La matriz admitancia de barra es

$$Y = \begin{bmatrix} 7 - j25 & -2 + j5 & -5 + j20 \\ -2 + j5 & 4 - j15 & -2 + j10 \\ -5 + j20 & -2 + j10 & 7 - j30 \end{bmatrix}$$

Los valores especificados son

$$|V_1| = 1.05 \quad \delta_1 = 0º \quad |V_3| = 1.0 \quad P_3 = 1.0$$

$$P_2 = 1.6 \quad Q_2 = 1.2$$

Los valores iniciales asumidos son

$$|V_2| = 1.00 \quad \delta_2 = 0º \quad \delta_3 = 0º$$

La ecuación requerida es

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta |V_3|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^1_{22} & J^1_{23} & J^2_{22} & J^2_{23} \\ J^1_{32} & J^1_{33} & J^2_{32} & J^2_{33} \\ J^3_{22} & J^3_{23} & J^4_{22} & J^4_{23} \\ J^5_{32} & J^5_{33} & J^6_{32} & J^6_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta e_3 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{bmatrix}$$

Los valores iniciales son entonces

$$e_1 = 1.05 \quad e_2 = e_3 = 1.0 \quad f_1 = f_2 = f_3 = 0.0$$

Además substituyendo los valores las ecuaciones de potencia son:

$$P_2 = e_2(-2e_1 - 5f_1 + 4e_2 + 15f_2 - 2e_3 - 10f_3) + f_2(-2f_1 + 5e_1 + 4f_2 - 15e_2 - 2f_3 + 10e_3)$$

$$P_3 = e_3(-5e_1 - 20f_1 - 2e_2 - 10f_2 + 7e_3 + 30f_3) + f_3(-5f_1 + 20e_1 - 2f_2 + 10e_2 + 7f_3 - 30e_3)$$

$$Q_2 = f_2(-2e_1 - 5f_1 + 4e_2 + 15f_2 - 2e_3 - 10f_3) - e_2(-2f_1 + 5e_1 + 4f_2 - 15e_2 - 2f_3 + 10e_3)$$

$$Q_3 = f_3(-5e_1 - 20f_1 - 2e_2 - 10f_2 + 7e_3 + 30f_3) - e_3(-5f_1 + 20e_1 - 2f_2 + 10e_2 + 7f_3 - 30e_3)$$

Los elementos del jacobiano son

$$J^1_{22} = e_2G_{22} + f_2B_{22} + c_2 = 4e_2 - 15f_2 + c_2$$

$$J_{23}^{1} = e_2G_{23} + f_2B_{23} = -2e_2 + 10f_2$$

$$J_{32}^{1} = e_3G_{32} + f_3B_{32} = -2e_3 + 10f_3$$

$$J_{33}^{1} = e_3G_{33} + f_3B_{33} + c_3 = 7e_3 - 30f_3 + c_3$$

$$J_{22}^{2} = f_2G_{22} - e_2B_{22} + d_2 = 4f_2 + 15e_2 + d_2$$

$$J_{23}^{2} = f_2G_{23} - e_2B_{23} = -2f_2 - 10e_2$$

$$J_{32}^{2} = f_3G_{32} - e_3B_{32} = -2f_3 - 10e_3$$

$$J_{33}^{2} = f_3G_{33} - e_3B_{33} + d_3 = 7f_3 + 30e_3 + d_3$$

$$J_{22}^{3} = f_2G_{22} - e_2B_{22} - d_2 = 4f_2 + 15e_2 - d_2$$

$$J_{23}^{3} = f_2G_{23} - e_2B_{23} = -2f_2 - 10e_2$$

$$J_{22}^{4} = -e_2G_{22} - f_2B_{22} + c_2 = -4e_2 + 15f_2 + c_2$$

$$J_{23}^{4} = -e_2G_{23} - f_2B_{23} = 2e_2 - 10f_2$$

$$J_{32}^{5} = 0.0 \qquad J_{33}^{5} = 2e_3$$

$$J_{32}^{6} = 0.0 \qquad J_{33}^{6} = 2f_3$$

Primera iteración:

$P_2 = 1.0(-2 \times 1.05 - 5 \times 0.0 + 4 \times 1 + 15 \times 0.0 - 2 \times 1 - 10 \times 0)$

$= -.1$

$Q_2 = -1.0(-2 \times 0.0 + 5 \times 1.05 + 4 \times 0.0 - 15 \times 1 - 2 \times 0.0 + 10 \times 1) = -.25$

$P_3 = 1.0(-5 \times 1.05 - 20 \times 0.0 - 2 \times 1 - 10 \times 0.0 + 7 \times 1 + 30 \times 0.0)$

$= -.25$

$Q_3 = -1.0(-5 \times 0.0 + 20 \times 1.05 - 2 \times 0.0 + 10 \times 1 + 7 \times 0.0 - 30 \times 1)$

$= -1.0$

$$\Delta P_3 = P_3(\text{especificada}) - P_3(\text{calculada}) = 1.0 - (-.25) = 1.25$$

$$\Delta P_2 = P_2(\text{especificada}) - P_2(\text{calculada}) = -1.6 - (-.1) = -1.5$$

$$\Delta Q_2 = Q_2(\text{especificada}) - Q_2(\text{calculada}) = -1.2 - (-.25) = -.95$$

$$|V_3| = 1.0 \qquad \Delta|V_3|^2 = 0.0$$

Con la potencia calculada y los voltajes especificados se calcula la corriente que entra a la barra para simplificar el cálculo de algunos elementos del jacobiano.

$$I_2 = \frac{P_2 - jQ_2}{V_2^*} = c_2 + jd_2$$

$$= \frac{-.1 - (-j.25)}{1.0} = -.1 + j.25$$

por lo que

$$c_2 = -.1 \qquad d_2 = .25$$

$$I_3 = \frac{P_3 - jQ_3}{V_3^*} = c_3 + jd_3$$

$$= \frac{-.25 - (-j1.0)}{1.0} = -.25 + j1.0$$

por lo que

$$c_3 = -.25 \qquad d_3 = 1.0$$

$$J_{22}^1 = 4 \times 1 - 15 \times 0.0 - .1 = 3.9$$

$$J_{23}^1 = -2 \times 1 + 10 \times 0.0 = -2.0$$

$$J_{32}^1 = -2 \times 1 + 10 \times 0.0 = -2.0$$

$$J_{33}^1 = 7 \times 1 - 30 \times 0.0 - .25 = 6.75$$

$$J_{22}^2 = 4 \times 0.0 + 15 \times 1 + .25 = 15.25$$

$$J_{23}^2 = -2 \times 0.0 - 10 \times 1 = -10.0$$

$$J_{32}^2 = -2 \times 0.0 - 10 \times 1 = -10.0$$

$$J_{33}^2 = 7 \times 0.0 + 30 \times 1 + 1 = 31.0$$

$$J_{22}^3 = 4 \times 0.0 + 15 \times 1 - .25 = 14.75$$

$$J_{23}^3 = -2 \times 0.0 - 10 \times 1 = -10.0$$

$$J_{22}^4 = -4 \times 1 + 15 \times 0.0 - .1 = -4.1$$

$$J_{23}^4 = 2 \times 1 - 10 \times 0.0 = 2.0$$

$$J_{32}^5 = 0.0 \qquad J_{33}^5 = 2.0 \qquad J_{32}^6 = 0.0 \qquad J_{33}^6 = 0.0$$

La ecuación es entonces

$$\begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.25 \\ -.95 \\ 0.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.9 & -2.0 & 15.25 & -10.0 \\ -2.0 & 6.75 & -10.0 & 31.0 \\ 14.75 & -10.0 & -4.1 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta e_3 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\Delta e_2 = -.0851 \quad \Delta e_3 = 0.0 \quad \Delta f_2 = -.0682 \quad \Delta f_3 = .0128$$

Los nuevos valores de voltajes son

$$e_2^1 = e_2^0 + \Delta e_2 = 1.0 - .0851 = .9149$$

$$e_3^1 = e_3^2 + \Delta e_3 = 1.0 + .0000 = 1.0000$$

$$f_2^1 = f_2^0 + \Delta f_2 = 0.0000 - .0682 = -.0682$$

$$f_3^1 = f_3^2 + \Delta f_3 = 0.0000 + .0128 = .0128$$

$$V_2 = e_2 + jf_2 = .9149 - j.0682 = .9174\angle -4.2632^\circ$$

$$V_3 = e_3 + jf_3 = 1.000 + j.0128 = 1.0001\angle 0.7333^\circ$$

Se corrige a V_3 por ser un voltaje en barra de generación

$$V_3 = \frac{|V_3|_{especificado}}{|V_3|_{calculado}} \times V_3 \text{ calculado}$$

$$= \frac{1.0000}{1.0001} \times 1.0001\angle 0.7333^\circ = 1.0000\angle 0.7333^\circ$$

$$= 0.9999 + j.0128$$

Los valores de e y de f a usar en la próxima iteración son entonces

$$e_1 = 1.05 \quad f_1 = 0.0000 \quad e_2 = .9149 \quad f_2 = -.0682$$

$$e_3 = 0.9999 \quad f_3 = .0128$$

Con estos valores se vuelve a calcular P y Q y los jacobianos para repetir el procedimiento del cálculo de los voltajes hasta que sus incrementos estén dentro de la tolerancia establecida.

Segunda iteración:

$$P_2 = .9149[-2 \times 1.05 - 5 \times 0.0 + 4 \times .9149 + 15 \times (-.0682) - 2 \times .9999 - 10 \times .0128] - .0682[-2 \times 0.0 + 5 \times 1.05 + 4 \times (-.0682) - 15 \times .9149 - 2 \times .0128 + 10 \times .9999]$$

$$= .9149 \times (-1.5912) - .0682 \times 1.2271 = -1.5395$$

$$P_3 = .9999[-5 \times 1.05 - 20 \times 0.0 - 2 \times .9149 - 10 \times (-.0682) + 7 \times .9999 + 30 \times .0128] + .0128[-5 \times 0.0 + 20 \times 1.05 - 2 \times (-.0682) + 10 \times .9149 + 7 \times .0128 - 30 \times .9999]$$

$$= .9999 \times .9855 + .0128 \times .3780 = .9902$$

$$Q_2 = -.0682 \times (-1.5912) - .9149 \times 1.2271 = -1.0142$$

$$Q_3 = .0128 \times .9855 - .9999 \times .3780 = -.3653$$

$$\Delta P_2 = -1.6 - (-1.5395) = -.0605$$

$$\Delta P_3 = 1.000 - .9902 = .0098$$

$$\Delta Q_2 = -1.2 - (-1.0142) = -.1858$$

$$I_2 = \frac{-1.5395 - (-j1.0142)}{.9149 + j.0682} = -1.5913 + j1.2272$$

por lo que

$$c_2 = -1.5913 \qquad d_2 = 1.2272$$

$$I_3 = \frac{.9902 - (-j.3653)}{.9999 - j.0128} = .9853 + j.3779$$

por lo que

$$c_3 = .9853 \qquad d_3 = .3779$$

$$J^1_{22} = 4 \times .9149 - 15 \times (-.0682) - 1.5913 = 3.0913$$

$$J^1_{23} = -2 \times .9149 + 10 \times (-.0682) = -2.5118$$

$$J^1_{32} = -2 \times .9999 + 10 \times .0128 = -1.8718$$

$$J^1_{33} = 7 \times .9999 - 30 \times .0128 + .9853 = 7.6007$$

$$J_{22}^2 = 4 \times (-.0682) + 15 \times .9149 + 1.2272 = 14.6779$$

$$J_{23}^2 = -2 \times (-.0682) - 10 \times .9149 = -9.0126$$

$$J_{32}^2 = -2 \times .0128 - 10 \times .9999 = -10.0246$$

$$J_{33}^2 = 7 \times .0128 + 30 \times .9999 + .3779 = 30.4645$$

$$J_{22}^3 = 4 \times (-.0682) + 15 \times .9149 - 1.2272 = 12.2235$$

$$J_{23}^3 = -2 \times (-.0682) - 10 \times .9149 = -9.0126$$

$$J_{22}^4 = -4 \times .9149 + 15 \times (-.0682) - 1.5913 = -6.2739$$

$$J_{23}^4 = 2 \times .9149 - 10 \times (-.0682) = 2.5118$$

$$J_{32}^5 = 0.0 \qquad J_{33}^5 = 2 \times .9999 = 1.9998$$

$$J_{32}^6 = 0.0 \qquad J_{33}^6 = 2 \times .0128 = .0256$$

La ecuación es entonces

$$\begin{bmatrix} -.0605 \\ .0098 \\ -.1858 \\ .0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0913 & -2.5118 & 14.6779 & -9.0126 \\ -1.8718 & 7.6007 & -10.0246 & 30.4645 \\ 12.2235 & -9.0126 & -6.2739 & 2.5118 \\ .0000 & 1.9998 & .0000 & .0256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta e_3 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\Delta e_2 = -.0157 \quad \Delta e_3 = 0.0 \quad \Delta f_2 = -.0015 \quad \Delta f_3 = -.0011$$

Los nuevos valores de voltaje son

$$e_2^2 = e_2^1 + \Delta e_2 = .9149 - .0157 = .8992$$

$$e_3^2 = e_3^1 + \Delta e_3 = .9999 + .0000 = .9999$$

$$f_2^2 = f_2^1 + \Delta f_2 = -.0682 - .0015 = -.0697$$

$$f_3^2 = f_3^1 + \Delta f_3 = .0128 - .0011 = .0117$$

$$V_2 = e_2 + jf_2 = .8992 - j.0697 = .9019\underline{|-4.4323^o}$$

$$V_3 = e_3 + jf_3 = .9999 + j.0117 = 1.0000\underline{|.67040^o}$$

No es necesario corregir a V_3 porque su magnitud es 1.000.

Como todos los valores de los incrementos de voltajes están fuera de la tolerancia establecida, se repite el procedimiento. La convergencia se obtiene en la tercera iteración con

$$V_2 = .8989 - j.0697 = .9016\underline{|-4.4338^o}$$

$$V_3 = .9999 + j.0117 = 1.0000\underline{|.67040^o}$$

En las páginas anteriores se ha explicado en detalles la forma de encontrar el estado de un sistema de potencia por medio de los métodos Gauss-Seidel y Newton-Raphson. En ambos métodos se especifican las condiciones de las barras y en forma iterativa se consigue la solución final. Sinembargo no siempre el problema converge a una solución. Si al problema se le ponen demasiadas condiciones, es posible que no tenga solución física y por lo tanto no podrá tener solución matemática. También es posible que aunque teniendo

el problema solución física, los valores iniciales asumidos estén muy lejos de dicha solución y los cálculos pudieran alejarse de ella.

9. TRATAMIENTO ESPECIAL A LOS TIPOS DE BARRAS

Se ha estudiado que las barras de generación son aquellas en donde se especifica la potencia activa y la magnitud del voltaje y que las barras de carga son aquellas en donde se especifica la potencia activa y la potencia reactiva haciendo caso omiso en ambas situaciones si en la barra está colocado un generador o está colocada una carga, respectivamente.

Se dan situaciones en donde en una barra en donde está colocado un generador se desee fijar las condiciones de potencia activa y reactiva que suministra el generador y, por lo tanto, tendrá que tratarse dicha barra como barra de carga. En este caso la magnitud y el ángulo del voltaje de la barra serán la solución del problema. También pudiera ser que en una barra en donde está colocada una carga conocida se desee fijar la magnitud del voltaje de dicha barra. En este caso la barra tendrá que tratarse como barra de generación, fijando la magnitud del voltaje y la potencia activa; la solución será el ángulo del voltaje y la potencia reactiva de la barra. Esta potencia reactiva es la potencia neta que debe entrar o salir de la barra para que se pueda mantener en ella la magnitud del voltaje especificado[1]. Como ya de esa barra sale una potencia reactiva de carga que probablemente no coincide con la potencia reactiva neta solución del problema, se tendrá que inyectar o sacar por otros medios la diferencia entre la potencia reactiva neta que entra a la barra y la potencia reactiva de la carga que entra a la barra.

Si la potencia reactiva neta que entra a la barra es mayor que la potencia reactiva de la carga que entra a la barra, se tendrá que colocar una bobina para sacar la diferencia entre ellas.

Si la potencia reactiva neta que entra a la barra es menor que la potencia reactiva de la carga que entra a la barra, se tendrá que colocar un condensador para inyectar la diferencia entre ellas.

De todas maneras la potencia del dispositivo a colocar en la barra será la diferencia entre la potencia neta y la potencia de la carga, entrando ambas a la barra.

1. No olvide el lector que las potencias positivas entran a la barra y las potencias negativas salen de ella.

$$Q = Q_{barra} - Q_{carga} \qquad 2.63$$

Si el resultado es positivo se tendrá que colocar un condensador para inyectar la diferencia y si el resultado es negativo se tendrá que colocar una bobina para sacar la diferencia.

EJEMPLO 13

Calcular la potencia reactiva y la impedancia necesaria, colocar en una barra si la potencia reactiva neta de la barra es -.24316 pu. y la potencia reactiva de la carga es .15 pu. y el voltaje es 1.02 pu.

$$Q = -.24316 - (-.15) = -.09316$$

Como el resultado es negativo se tendrá que colocar a una bobina para sacar la potencia reactiva de .09316 pu.

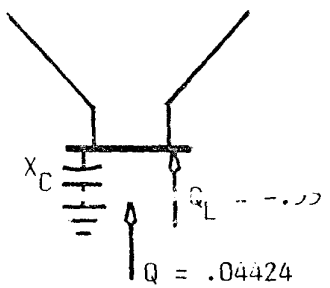
$$X_L = \frac{|V|^2}{Q} = \frac{(1.02)^2}{.09316} = 11.16788 \text{ pu}$$

EJEMPLO 14

En una barra de un sistema en donde está colocada una carga de $S = .61 + j.35$, el voltaje es $V = .87206 \angle -9.1768°$ se desea colocar un condensador para fijar la magnitud del voltaje en $|V| = .96000$. Calcular la potencia reactiva que se debe inyectar y la reactancia y la susceptancia del condensador necesario.

Se resuelve el problema con un programa de computación digital tratando a la barra como barra de generación, es decir especificando la potencia activa de .61 pu. y la magnitud del voltaje de .9600 pu. El resultado de la solución es Q = .04424, por lo que

$$Q_C = Q - Q_L = .04424 - (-.35) = .39424 \text{ pu.}$$



$$X_C = \frac{|V|^2}{Q_C} = \frac{(.96000)^2}{.39424} = 2.33766 \text{ pu.}$$

$$B = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{2.33766} = .42778 \text{ pu.}$$

10. FLUJO DE POTENCIA ENTRE BARRAS

Una vez conocido el voltaje en cada una de las barras de un sistema de potencia, se puede calcular el flujo de potencia activa y reactiva entre las diferentes barras, lo cual permite determinar la potencia activa y reactiva del generador de la barra oscilante, la potencia reactiva de los generadores de las barras de generación y las pérdidas en las líneas. El flujo de potencia activa se representa por el símbolo → y el flujo de potencia reactiva se representa por el símbolo ↠ . La dirección de estos flujos estará determinado en el cálculo por la dirección con que se calculen las corrientes. Si el resultado del cálculo es negativo significa que la dirección del flujo de potencia es contraria a la calculada. Las potencias se calculan normalmente saliendo de cada extremo de las barras en donde está colocado el enlace y las pérdidas en el enlace es la suma de estas dos cantidades. Las fórmulas utilizadas dependen del elemento colocado entre las dos barras, es decir, línea corta, línea media, línea larga o transformador, las cuales han sido descritas en detalles en el Capítulo I.

10.1 FLUJO DE POTENCIAS EN LINEAS CORTAS

Sea la línea corta de la figura 2.1 colocada entre las barras k y m, en donde existen voltajes V_k y V_m respectivamente.

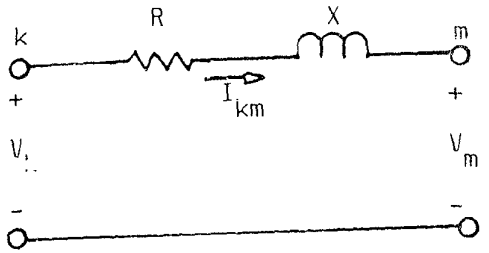


Fig. 2.1

La corriente que fluye desde la barra k hasta la barra m es

$$I_{km} = \frac{V_k - V_m}{z_{km}} = (V_k - V_m)y_{km} \qquad 2.64$$

siendo

$$z_{km} = R + jX \qquad y_{km} = \frac{1}{z_{km}} = G_{km} - jB_{km}$$

La potencia que fluye desde la barra k hasta la barra m es

$$S^k_{km} = V_k I^*_{km} = V_k(V_k - V_m)^* y^*_{km} = P_{km} + jQ_{km} \qquad 2.65$$

La corriente que fluye desde la barra m hasta la barra k es

$$I_{mk} \quad \frac{V_m - V_k}{z_{km}} = (V_m - V_k)y_{km} \qquad 2.66$$

La potencia que sale de la barra m hacia la barra k es

$$S^m_{mk} = V_m I^*_{mk} = V_m(V_m - V_k)^* y^*_{km} = P_{mk} + jQ_{mk} \qquad 2.67$$

EJEMPLO 15

Con los resultados del ejemplo 9 calcular:

a) El flujo de potencia activa y reactiva en cada una de las líneas.
b) La potencia activa y reactiva del generador de la barra oscilante.
c) La potencia reactiva del generador de la barra de generación.
d) Las pérdidas totales en las líneas.

Las admitancias e impedancias de las líneas son:

$$y_{12} = 2 - j5 = 5.38516|\underline{-68.19859º}$$

$$y_{13} = 5 - j20 = 20.61553|\underline{-75.96376º}$$

$$y_{23} = 2 - j10 = 10.19804|\underline{-78.69007º}$$

$$z_{12} = \frac{1}{y_{12}} = .18570|\underline{68.19859º} = .06897 + j.17242$$

$$z_{13} = \frac{1}{y_{13}} = .04851|\underline{75.96376º} = .01177 + j.04706$$

$$z_{23} = \frac{1}{y_{23}} = .09806|\underline{78.69007º} = .01923 + j.09613$$

El estado del sistema según los resultados del Ejemplo 9 es

$$V_1 = 1.05000|\underline{0.00000º} = 1.05000 + j0.0000$$

$$V_2 = .90158|\underline{-4.4359º} = .89888 - j.06973$$

$$V_3 = 1.00000|\underline{.666000º} = .99993 + j.01162$$

a) Flujo de potencias:

$$S_{12}^1 = V_1 I_{12}^* = V_1(V_1 - V_2)^* y_{12}^*$$

$$= 1.05|\underline{0º} \times (1.05|\underline{0º} - .90158|\underline{-4.4359º})^* \times (5.38516|\underline{-68.19859º})^*$$

$$= 1.05|\underline{0º} \times .89625|\underline{43.42898º} = .68342 + j.64694$$

$$S_{21}^2 = V_2 I_{21}^* = V_2(V_2 - V_1)^* y_{12}^*$$

$$= .90158|\underline{-4.4359º} \times .89625|\underline{-136.57102º} = -.62803 - j.50884$$

$$S_{13}^1 = V_1 I_{13}^* = V_1(V_1 - V_3)^* y_{13}^*$$

$$= 1.05|\underline{0º} \times (1.05|\underline{0º} - 1.0|\underline{.6660º})^* \times (20.61553|\underline{-75.96376º})^*$$

$$= 1.05|\underline{0º} \times 1.05965|\underline{89.02939º} = .01885 + j1.11247$$

$$S_{31}^3 = V_3 I_{31}^* = V_3(V_3 - V_1)^* y_{13}^*$$

$$= 1.0|\underline{.666º} \times 1.05965|\underline{-90.97061º} = -.00563 - j1.05964$$

$$S_{23}^2 = V_2 I_{23}^* = V_2(V_2 - V_3)^* y_{23}^*$$

$$= .90158|\underline{-4.4359º} \times (.90158|\underline{-4.4359} - 1.0|\underline{.6660º})^* \times (10.19804|\underline{-78.69007º})^*$$

$$= .90158|\underline{-4.4359º} \times 1.32295|\underline{219.85437º} = -.97202 - j.69125$$

$$S_{32}^3 = V_3 I_{32}^* = V_3(V_3 - V_2)^* y_{32}^*$$

$$= 1.0|\underline{.666º} \times 1.32295|\underline{39.85437º} = 1.00567 + j.85954$$

b) Potencia en el generador de la barra oscilante:

$$S_1 = S_{12} + S_{13} = .68342 + j.64694 + .01885 + j1.11247$$

$$S_1 = .70227 + j1.75941$$

es decir

$$P_1 = .70227 \qquad Q_1 = 1.75941$$

c) Potencia en el generador en la barra de generación:

$$S_3 = S_{31} + S_{32} = -.00563 - j1.05964 + 1.00567 + j.85954$$
$$= 1.0000 - j.2001$$

es decir

$$P_3 = 1.0000 \qquad Q_3 = -.2001$$

d) Pérdidas totales en la línea:

Las pérdidas en las líneas se pueden calcular por suma de los flujos de potencia en ambas direcciones en las líneas o usando las expresiones

$$P_{pérdidas} = R|I|^2 \qquad Q_{pérdidas} = X|I|^2$$

Suma de los flujos de potencia:

$$S_{pérdidas} = (S_{12} + S_{21}) + (S_{13} + S_{31}) + (S_{23} + S_{32})$$
$$= (.68342 + j.64694 - .62803 - j.50884)$$
$$+ (.01885 + j1.11247 - .00563 - j1.05964)$$
$$+ (-.97202 - j.69125 + 1.00567 + j.85954)$$
$$S_{pérdidas} = .10226 + j.35982$$

es decir

$$P_{pérdidas} = .10226 \qquad Q_{pérdidas} = .35982$$

o también

$$P_{pérdidas} = R_{12}|I_{12}|^2 + R_{13}|I_{13}|^2 + R_{23}|I_{23}|^2$$

$$= .06897 \times (.89625)^2 + .01177 \times (1.05965)^2$$
$$+ .01923 \times (1.32295)^2 = .10227$$

$$Q_{pérdidas} = X_{12}|I_{12}|^2 + X_{13}|I_{13}|^2 + X_{23}|I_{23}|^2$$

$$= .17242 \times (.89625)^2 + .04706 \times (1.05965)^2$$
$$+ .09613 \times (1.32295)^2 = .35959$$

La corriente del generador G_1 que entra a la barra 1 es

$$I_1 = \frac{S_1^*}{V_1^*} = \frac{.70227 - j1.75941}{1.05 - j0.0} = 1.80418\underline{|-68.24052^\circ}$$

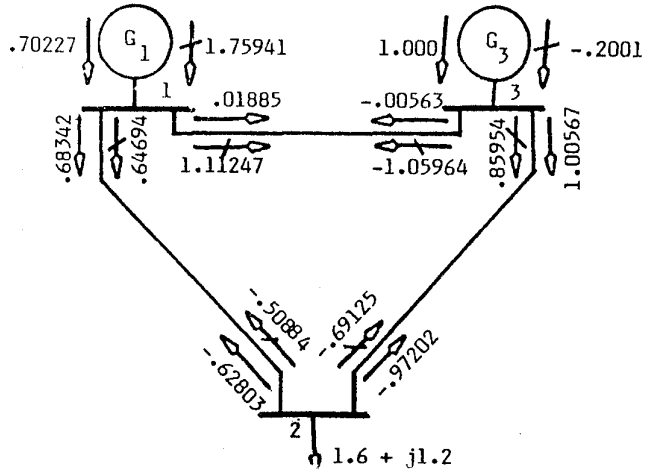
La corriente del generador G_3 que entra a la barra 3 es

$$I_3 = \frac{S_3^*}{V_3^*} = \frac{1.0000 + j.20020}{.99993 - j.01162} = 1.01982\underline{|11.98144^\circ}$$

La corriente de la carga que sale de la barra 2 es

$$I_2 = \frac{S_2^*}{V_2^*} = \frac{1.6000 - j1.2000}{.89888 + j.06973} = 2.21833\underline{|-41.30580^\circ}$$

Los flujos de potencia se muestran en la figura siguiente



10.2 FLUJO DE POTENCIAS EN LINEAS MEDIAS

Sea la línea media de la figura 2.2 colocada entre las barras k y m, en donde existen los voltajes V_k y V_m respectivamente.

La corriente que entra a la barra k es

$$I_k = I_{km} + V_k \times Y/2 = (V_k - V_m)y_{km} + V_k \times Y/2 \qquad 2.68$$

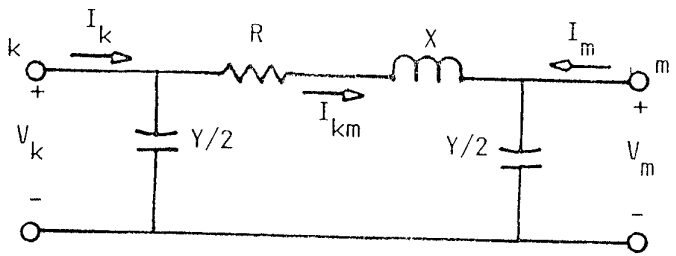


Fig. 2.2

La potencia que entra a la barra k es

$$S_k = P_k + jQ_k = V_k I_k^* = V_k(V_k - V_m)^* y_{km}^* + V_k(V_k \times Y/2)^*$$

$$= V_k(V_k - V_m)^* y_{km}^* + |V_k|^2 \times Y/2^* \qquad 2.69$$

La corriente que entra a la barra m es

$$I_m = I_{mk} + V_m \times Y/2 = (V_m - V_k)y_{km} + V_m \times Y/2 \qquad 2.70$$

La potencia que entra a la barra m es

$$S_m = P_m + jQ_m = V_m I_m^* = V_m(V_m - V_k)^* y_{km}^* + V_m(V_m \times Y/2)^*$$

$$= V_m(V_m - V_k)^* y_{km}^* + |V_m|^2 \times Y/2^* \qquad 2.71$$

EJEMPLO 16

Los voltajes en los terminales de una línea media son

$$V_1 = 1.06\angle 0.0^\circ \qquad V_2 = .98627\angle -6.6949^\circ$$

Las características de la línea son

$$z_{12} = .0540 + j.2230 \qquad Y = j.0492$$

Calcular:

a) La potencia que entra a cada barra.
b) Las pérdidas en la línea.

$$y_{12} = \frac{1}{z_{12}} = 4.35834\angle -76.38771^\circ \qquad Y = .0492\angle 90.0^\circ$$

$$S_1^1 = V_1(V_1 - V_2)^* y_{12}^* + |V_1|^2 \times Y/2$$

$$= 1.06\angle 0.0^\circ \times (1.06\angle 0.0^\circ - .98627\angle -6.6949^\circ)^*$$

$$\times (4.35834\angle -76.38771^\circ)^* + (1.06)^2 \times (.0492\angle 90^\circ)^*/2$$

$$= 1.06\angle 0.0^\circ \times .61165\angle 21.37103^\circ + .02764\angle -90.0^\circ$$

$$= .60377 + j.20872$$

$$S_2^2 = V_2(V_2 - V_1)^* y_{12}^* + |V_2|^2 \times Y/2$$

$$= .98627\angle -6.6949^\circ \times .61165\angle 201.37030$$

$$+ (.98627)^2 \times .0246\angle -90^\circ = -.58357 - j.17676$$

$$S_{\text{pérdidas}} = S_1 + S_2 = .60377 + j.20872 - .58357$$

$$- j.17676 = .02020 + j.03196$$

10.3 FLUJO DE POTENCIAS ENTRE DOS BARRAS EN DONDE SE ENCUENTRA UN TRANSFORMADOR CON RELACION DE TRANSFORMACION FUERA DE LA NOMINAL.

Sea el transformador con relación de transformación fuera de la nominal de la figura 2.3 colocado entre las barras k y m, en donde existen los voltajes V_k y V_m respectivamente.

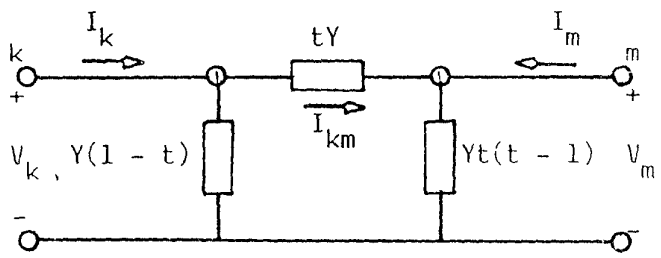


Fig. 2.3

La corriente que entra a la barra k es

$$I_k = I_{km} + V_k Y(1 - t) = (V_k - V_m)tY + V_k Y(1 - t) \qquad 2.72$$

La potencia que entra a la barra k es

$$S_k = V_k I_k^* = V_k(V_k - V_m)^* tY^* + V_k V_k^* Y^*(1 - t)$$

$$= V_k(V_k - V_m)^* ty^* + |V_k|^2 Y^*(1 - t) \qquad 2.73$$

La corriente que entra a la barra m es

$$I_m = I_{mk} + V_m Yt(t - 1) = (V_m - V_k)tY + V_m Yt(t - 1) \qquad 2.74$$

La potencia que entra a la barra m es

$$S_m = V_m I_m^* = V_m(V_m - V_k)^* tY^* + V_m V_m^* Y^* t(t - 1)$$

$$= V_m(V_m - V_k)^* tY^* + |V_m|^2 Y^* t(t - 1) \qquad 2.75$$

EJEMPLO 17

Un transformador con relación de transformación fuera de la nominal y t = .987 e impedancia z = j.2520 está colocado entre las barras 1 y 2 de un sistema de potencia, las cuales tienen los siguientes voltajes

$$V_1 = 1.01534\angle -7.0150^\circ \qquad V_2 = 1.03011\angle -12.8322^\circ$$

Calcular:

a) La potencia que entra a cada barra.
b) Las pérdidas de potencia entre las dos barras.

$$Y = \frac{1}{z} = \frac{1}{j.2520} = 3.96825\angle -90.0^\circ$$

$$S_1 = V_1(V_1 - V_2)^* tY^* + |V_1|^2 (1 - t)Y^*$$

$$S_1 = 1.01534\angle -7.0150^\circ \times (1.01534\angle -7.015^\circ$$
$$- 1.03011\angle -12.8322^\circ)^* \times .987 \times (3.96825\angle -90.0^\circ)^*$$
$$+ (1.01534)^2 \times (1.0 - .987) \times (3.96825\angle -90.0^\circ)^*$$
$$= 1.01534\angle -7.0150^\circ \times .41061\angle 1.83362^\circ + .05318\angle 90^\circ$$
$$= .41521 + j.01555$$

$$S_2 = V_2(V_2 - V_1)^* tY^* + |V_2|^2 t(t - 1)Y^*$$
$$= 1.03011\angle -12.8322^\circ \times .41061\angle 181.83362^\circ$$
$$+ (1.03011)^2 \times .987 \times (.987 - 1) \times 3.96825\angle 90^\circ$$
$$= -.41521 + j.02666$$

$$S_{\text{pérdidas}} = S_1 + S_2 = .41521 + j.01555 - .41521$$
$$+ j.02666 = .00000 + j.04221$$

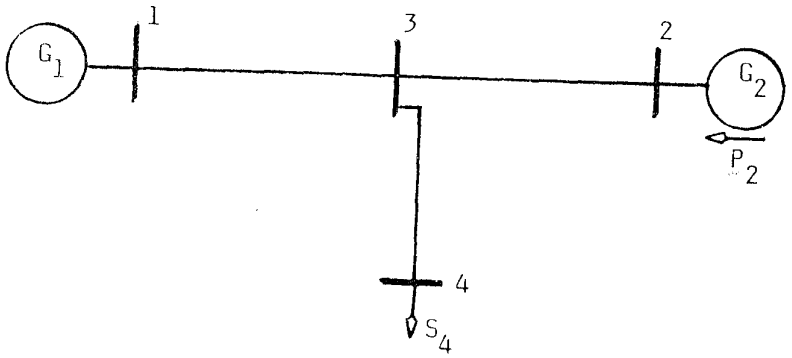
PROBLEMAS

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando el método Newton-Raphson y con valores iniciales de $x_1 = x_2 = 1.0$

$$2x_1^2 + x_2 + 7 = 3x_1x_2$$

$$2x_1 + x_2^2 + 2 = 5x_2$$

2. En la red siguiente usando el método Gauss-Seidel calcular el voltaje en cada barra en 3 iteraciones.



Los datos del sistema son:

$V_1 = 1.06\angle 0º \quad |V_2| = 1.082 \quad P_2 = .48 \quad S_4 = .8 + j.6$

$z_{13} = .0264 + j.1104 \quad z_{34} = .0212 + j.0834$

$z_{23} = .0126 + j.0417$

3. En la red del problema anterior:

a) Usando el método Newton-Raphson calcular el estado del sistema.
b) Calcular la potencia de cada generador.
c) Calcular las pérdidas de potencia en las líneas.

4. Repetir el problema N° 2 si

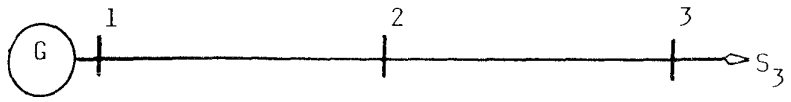
$V_1 = 1.06\angle 0º \quad P_2 = .50 \quad Q_2 = .70 \quad S_4 = .8 + j.6$

$Z_{13} = .0264 + j.1104 \quad Z_{34} = .0212 + j.0834$

$Z_{23} = .0126 + j.0417$

5. Repetir el problema N° 3 con los datos del problema N° 4.
6. En la red siguiente usando el método de Gauss-Seidel calcular:

a) El estado del sistema (magnitud y ángulo del voltaje en las 3 barras).
b) La reactancia necesaria colocar en la barra 3 para lograr el voltaje indicado.



Los datos son:

$V_1 = 1.0\angle 0º \quad |V_3| = .952 \quad S_3 = .784 + j.532$

$Z_{12} = .012 + j.050 \quad Z_{23} = .008 + j.035$

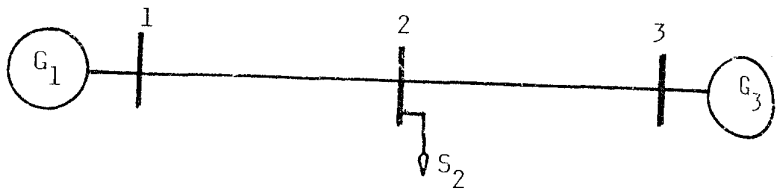
7. Repetir el problema N° 6 usando el método Newton-Raphson.
8. Repetir el problema N° 6 si la línea 1-2 se substituye por un transformador con una impedancia de Z = j.040 pu.
9. En la red siguiente usando el método Gauss-Seidel calcular el estado del sistema en dos iteraciones. Los datos del sistema son:

$V_1 = 1.1\angle 0º \quad |V_3| = 1.05 \quad S_2 = 1.0 + j.8$

$z_{12} = .0118 + j.047 \quad z_{23} = .069 + j.172 \quad P_3 = .6$

Las admitancias de las capacitancias a tierra:

$Y_{12} = j.082 \quad Y_{23} = j.054$



10. En la red del problema N° 9 calcular:
    a) El estado del sistema usando el método Newton-Raphson.
    b) Las potencias de cada generador.
    c) Las pérdidas de potencia en las líneas.

11. En la red siguiente calcular:
    a) El estado del sistema usando el método Gauss-Seidel.
    b) Las potencias de cada generador.
    c) Las pérdidas de potencias en las líneas.

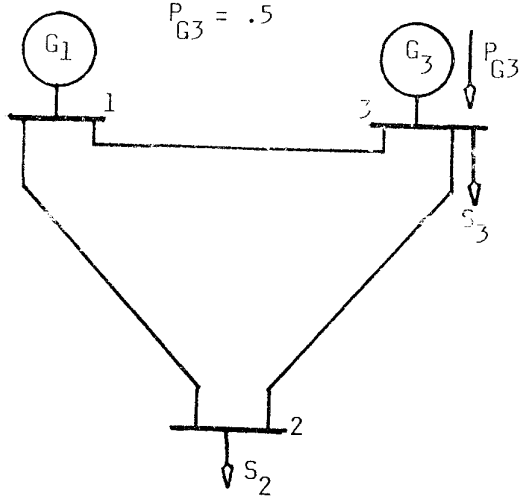
    Los datos del sistema son:

$V_1 = 1.05\angle 0^\circ \quad |V_3| = .96 \quad S_2 = 1.2 + j.8$

$S_3 = .4 + j.5 \quad Z_{12} = .0700 + j.1750$

$Z_{13} = .0120 + j.0500 \quad Z_{23} = .0190 + j.0980$

$P_{G3} = .5$



12. Repetir el problema N° 11 usando el método Newton-Raphson.
13. Repetir el problema No. 12 si la línea 1-3 tiene una admitancia a tierra de Y = .0326.
14. Repetir el problema N° 12 si las potencias que suministra el generador G_3 son $P_3 = .5$ y $Q_3 = -1.0$ desconociendo a $|V_3|$.

CAPITULO III

FORMACION DE LA MATRIZ IMPEDANCIA DE BARRA

1. INTRODUCCION

El desarrollo de la matriz impedancia de barra y de la matriz admitancia de barra representa uno de los conceptos más útiles de los mismos tiempos para el análisis de los sistemas de potencia, porque es una idea que se adapta muy bien en el cálculo con el computador digital.

La idea de la formación de la matriz impedancia de barra es la misma en todos los casos, aunque en un sistema de potencia esa matriz puede variar dependiendo de las aproximaciones y de las consideraciones que se hagan en la resolución de un problema determinado. Existen varios métodos para formar la matriz impedancia de barra. En este libro se describen tres de ellos, algunos de los cuales pueden implementarse con relativa facilidad en la programación digital.

2. FORMACION DE LA MATRIZ IMPEDANCIA DE BARRA POR EL METODO NODAL.

Este es un método que puede aplicarse fácilmente por inspección, sinembargo la idea es que pueda usarse en grandes sistemas con la ayuda del computador. Para ello es necesario fijar ciertos criterios y seguir ciertas normás establecidas en la topología de redes.

2.1 TOPOLOGIA DE REDES[1]

Topología de redes es el estudio de redes eléctricas por medio de sus propiedades geométricas, analizando las interconexiones entre las barras.

Para una detallada presentación de Topologia de Redes, vea ANALISIS MODERNO DE REDES ELECTRICAS, M. Rodriguez, 1986.

Mediante esta forma los enlaces de la red se representan topológicamente por líneas continuas. Este tipo de representación se llama GRAFICO.

El gráfico está ORIENTADO si en él se indican las direcciones de las corrientes de la red. En la figura 3.1 se muestra una red con su gráfico orientado.

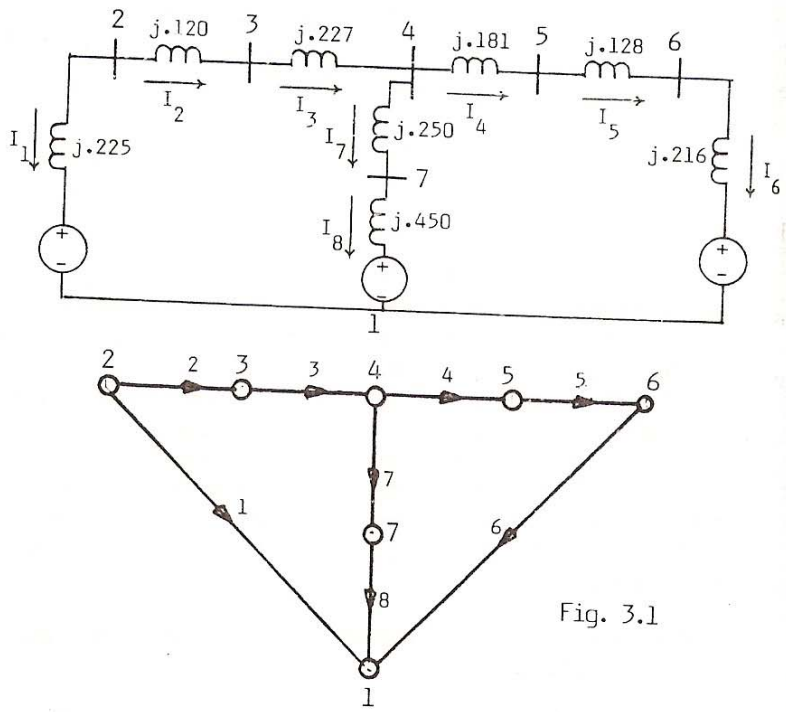


Fig. 3.1

Un SUBGRAFICO es cualquier conjunto formado por algunos elementos del gráfico. Un subgráfico es CONECTADO cuando existe un paso entre cualquiera de los dos nodos del gráfico, es decir no existe ningún nodo completamente aislado. En la figura 3.2 se muestran algunos subgráficos conectados correspondientes al gráfico de la figura 3.1.

Un ARBOL de un gráfico es un subgráfico conectado que conecta a todos los nodos sin tener ningún paso cerrado. En la figura 3.3 se muestran algunos árboles del gráfico de la figura 3.1.

Los elementos del gráfico que forman el árbol se llaman RAMAS y los elementos del gráfico que no están incluidos en el árbol se llaman UNIONES. En la figura 3.4 el árbol está formado por las ramas 2, 3, 4, 5, 7 y 8 (represen-

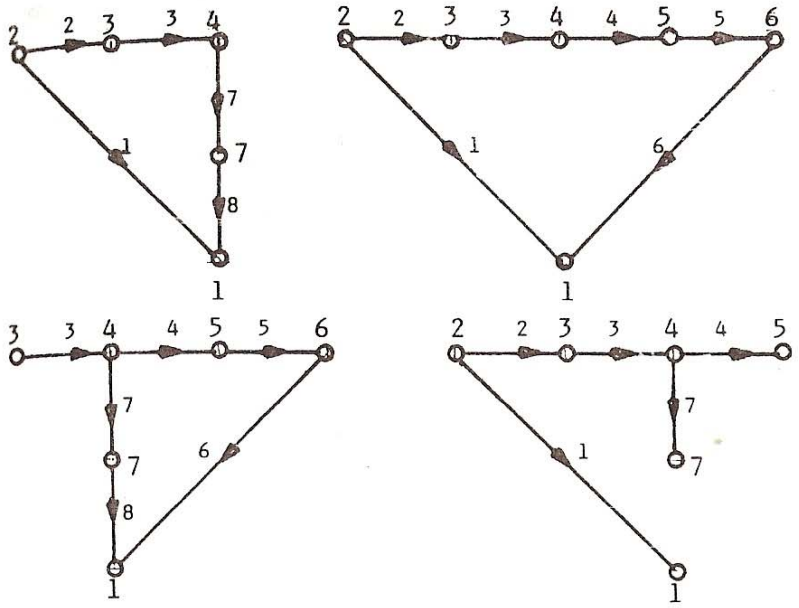


Fig. 3.2

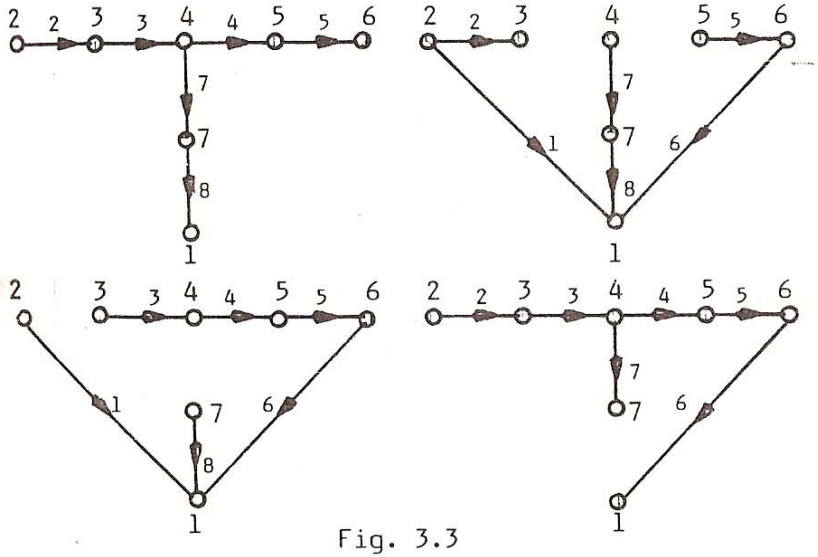


Fig. 3.3

tadas por líneas continuas) y las uniones son los elementos 1 y 6 (representadas por segmentos de líneas).

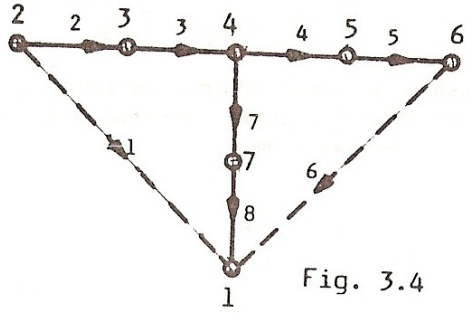


Fig. 3.4

2.2 LA MATRIZ INCIDENCIA

Las ecuaciones de corrientes en cada uno de los nodos en el gráfico de la figura 3.1, el cual es el mismo de la figura 3.4, son:

Nodo 2: $I_1 + I_2 = 0$
Nodo 3: $-I_2 + I_3 = 0$
Nodo 4: $-I_3 + I_4 + I_7 = 0$
Nodo 5: $-I_4 + I_5 = 0$
Nodo 6: $-I_5 + I_6 = 0$
Nodo 7: $-I_7 + I_8 = 0$
Nodo 1: $-I_1 - I_6 - I_8 = 0$

lo cual puede escribirse en forma matricial

$$\begin{array}{c} \\ \text{NODOS} \end{array} \begin{array}{c} \text{ELEMENTOS} \\ \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o también

$$\underset{\sim}{A}_a \underset{\sim}{I}_e = \underset{\sim}{0} \qquad 3.1$$

Siendo $\underset{\sim}{A}_a$ la matriz incidencia aumentada e $\underset{\sim}{I}_e$ el vector corriente de elementos. Se observa que la suma de cada una de las columnas de la matriz incidencia aumentada es igual a cero.

La matriz incidencia aumentada se puede construir directamente del gráfico formando los componentes a_{ij} de la matriz de la siguiente manera:

$a_{ij} = 1$ Si el elemento j del gráfico es incidente al nodo i y su orientación se aleja de i.

$a_{ij} = -1$ Si el elemento j del gráfico es incidente al nodo i y su orientación se acerca a i.

$a_{ij} = 0$ Si el elemento j no es incidente al nodo i.

El número de ecuaciones de corrientes de nodos independientes, necesarias para resolver el problema, es igual al número total de nodos menos uno, es decir el nodo que se toma como referencia. En este caso se reduce la matriz incidencia aumentada en una fila, la cual es la fila correspondiente al nodo que se ha tomado como referencia. La matriz resultante es simplemente la matriz INCIDENCIA. La matriz incidencia correspondiente al gráfico de la red de la figura 3.1, tomando al nodo 1 como referencia, es entonces la enseñada en la figura 3.5.

$$A = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Fig 3.5

2.3 LA MATRIZ IMPEDANCIA PRIMITIVA

La matriz impedancia primitiva o matriz impedancia de elementos es una matriz de dimensión igual al número de elementos por número de elementos, formada por las impedancias de los elementos de la red. Los valores Z_{kk} de la diagonal de la matriz son las impedancias de los elementos k. Los valores Z_{km} fuera de la diagonal de la matriz son las impedancias mutuas entre el elemento k y el elemento m. La matriz impedancia de elemento de la red de la figura 3.1 es

$$\underset{\sim}{Z}_e = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.225 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j.120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j.227 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j.181 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j.128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j.216 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j.250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j.450 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.4 LA MATRIZ IMPEDANCIA DE BARRA

Cada elemento de la red puede estar formado por una impedancia en serie con su fuente de voltaje, tal como se indica en la figura 3.6.

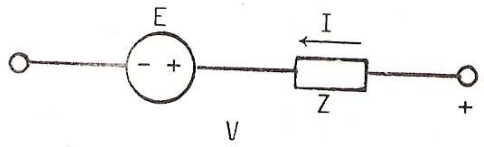


Fig 3.6

La caída de tensión en el elemento es ZI y el voltaje en el elemento con el sentido de la corriente indicada en la figura 3.6 es

$$V = E + ZI \qquad 3.2$$

En un sistema de m elementos el voltaje en los elementos es

$$\underset{\sim}{V}_e = \underset{\sim}{E}_e + \underset{\sim}{Z}_e \underset{\sim}{I}_e \qquad 3.3$$

en donde $\underset{\sim}{V}_e$ es el vector voltaje de elementos, $\underset{\sim}{E}_e$ es el vector fuente de voltaje de elementos, $\underset{\sim}{Z}_e$ es la matriz impedancia de elementos e $\underset{\sim}{I}_e$ es el vector corriente de elementos. Es decir

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \cdots & Z_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_m \end{bmatrix} \qquad 3.4$$

De la ecuación anterior se obtiene el vector corriente de elementos

$$\underset{\sim}{I}_e = \underset{\sim}{Z}_e^{-1} [\underset{\sim}{E}_e - \underset{\sim}{V}_e] \qquad 3.5$$

multiplicando por la matriz incidencia se tiene

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{I}_e = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{Z}_e^{-1} [\underset{\sim}{E}_e - \underset{\sim}{V}_e] \qquad 3.6$$

pero

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{I}_e = \underset{\sim}{0}$$

por lo que

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{Z}_e^{-1}\,\underset{\sim}{V}_e = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{Z}_e^{-1}\,\underset{\sim}{E}_e \qquad 3.7$$

Los voltajes de elementos están relacionados con los voltajes de nodos de la manera siguiente:

$$\underset{\sim}{V}_e = \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{V}_n \qquad 3.8$$

Substituyendo en la ecuación anterior se tiene

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{Z}_e^{-1}\,\underset{\sim}{A}^T\,\underset{\sim}{V}_n = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{Z}_e^{-1}\,\underset{\sim}{E}_e$$

o también

$$\underset{\sim}{Y}_n\,\underset{\sim}{V}_n = \underset{\sim}{I}_n \qquad 3.9$$

despejando

$$\underset{\sim}{V}_n = \underset{\sim}{Y}_n^{-1}\,\underset{\sim}{I}_n = \underset{\sim}{Z}_n\,\underset{\sim}{I}_n \qquad 3.10$$

en donde

$$\underset{\sim}{Y}_n = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{Z}_e^{-1}\,\underset{\sim}{A}^T \qquad 3.11$$

$$\underset{\sim}{I}_n = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{Z}_e^{-1}\,\underset{\sim}{E}_e \qquad 3.12$$

$$\underset{\sim}{Z}_n = \underset{\sim}{Y}_n^{-1} \qquad 3.13$$

siendo

$\underset{\sim}{Y}_n$ la matriz admitancia de nodo, admitancia de barra o admitancia de BUS

$\underset{\sim}{Z}_n$ la matriz impedancia de nodo, impedancia de barra o impedancia de BUS.

$\underset{\sim}{V}_n$ el vector voltaje de nodo a la referencia.

$\underset{\sim}{I}_n$ el vector corriente que entra al nodo.

$\underset{\sim}{A}^T$ la transpuesta de la matriz incidencia.

EJEMPLO 1

Obtener la matriz admitancia de nodo y la matriz impedancia de nodo de la red de la figura 3.1.

$$\underset{\sim}{Y}_n = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{Z}_e^{-1}\,\underset{\sim}{A}^T$$

$$= -j\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.444 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 \\ .000 & 8.333 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 \\ .000 & .000 & 4.405 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 \\ .000 & .000 & .000 & 5.525 & .000 & .000 & .000 & .000 \\ .000 & .000 & .000 & .000 & 7.813 & .000 & .000 & .000 \\ .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & 4.629 & .000 & .000 \\ .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & 4.000 & .000 \\ .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & 2.222 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -j12.777 & j8.333 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 \\ j8.333 & -j12.738 & j4.405 & .000 & .000 & .000 & .000 & .000 \\ .000 & j4.405 & -j13.930 & j5.525 & .000 & .000 & j4.000 & \\ .000 & .000 & j5.525 & -j13.337 & j7.813 & .000 & & \\ .000 & .000 & .000 & j7.813 & -j12.442 & .000 & & \\ .000 & .000 & j4.000 & .000 & .000 & -j6.222 & & \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz admitancia de nodo se consigue la matriz impedancia de nodo, es decir

$$Z = j \begin{array}{c} \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} .1670 & .1359 & .0774 & .0508 & .0318 & .0498 \\ .1359 & .2085 & .1187 & .0778 & .0488 & .0763 \\ .0774 & .1187 & .1968 & .1290 & .0809 & .1265 \\ .0508 & .0778 & .1290 & .2030 & .1276 & .0829 \\ .0318 & .0488 & .0809 & .1276 & .1605 & .0520 \\ .0498 & .0763 & .1265 & .0829 & .0520 & .2420 \end{bmatrix} \end{array}$$

3.- FORMACION DE LA MATRIZ IMPEDANCIA DE BARRA POR EL METODO DE INYECCION DE CORRIENTES.

El método consiste en aplicar una corriente en uno de los nodos de la red pasiva, eliminando las fuentes internas, y encontrar el voltaje en todos los nodos debido a esa corriente. La relación V/I en los diferentes nodos son los términos de la matriz impedancia de barra.

En la Sección anterior se encontró que la relación entre el vector voltaje de nodo, el vector corriente de nodo y la matriz impedancia de nodo es

$$\underset{\sim}{V}_n = \underset{\sim}{Z}_n \underset{\sim}{I}_n \qquad 3.14$$

En un sistema de n nodos se tiene

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \ldots + Z_{1n}I_n \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \ldots + Z_{2n}I_n \qquad 3.15 \\ &\vdots \\ V_n &= Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \ldots + Z_{nn}I_n \end{aligned}$$

Para encontrar una columna de la matriz Z_n, por ejemplo la columna 1, se aplica una corriente al nodo 1, I_1, y se consiguen los voltajes en todos los nodos, con las corrientes inyectadas a los nodos restantes iguales a cero. De esta manera

$$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2 = I_3 = \ldots = I_n = 0}$$

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2 = I_3 = \ldots = I_n = 0}$$

$$\vdots$$

$$Z_{n1} = \left.\frac{V_n}{I_1}\right|_{I_2 = I_3 = \ldots = I_n = 0}$$

Generalizando, para encontrar los términos de una columna i, se aplica una corriente al nodo i y se miden los voltajes en los otros nodos. El término Z_{ji} de la matriz es

$$Z_{ji} = \left.\frac{V_j}{I_i}\right|_{I_m = 0} \qquad \begin{array}{l} m = 1, 2, \ldots. n \quad m \neq i \\ j = 1, 2, \ldots. n \end{array} \qquad 3.16$$

EJEMPLO 2

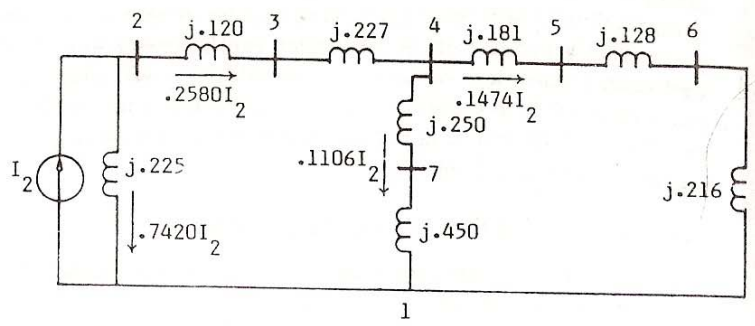
Obtener la matriz impedancia de nodo de la red de la figura 3.1 por el método de inyección de corrientes.

Columna 1:

Como el nodo 1 es la referencia, todos los valores de la columna 1 y de la fila 1 de la matriz impedancia de nodo son iguales a cero. Estos valores no aparecerán en la matriz.

Columna 2:

Se inyecta a la red la corriente I_2 en el nodo 2 y se calculan los voltajes en todos los nodos. Por divisor de corriente se consiguen las corrientes indicadas en la figura siguiente, con las cuales se obtienen los diferentes voltajes de nodos.



Los voltajes de nodos son

$$V_2 = j.225 \times .7420\ I_2 = j.1670I_2$$

$$V_3 = j.700 \times .1106\ I_2 + j.227 \times .2580I_2 = j.1359I_2$$

$$V_4 = (j.250 + j.450) \times .1106I_2 = j.0774I_2$$

$$V_5 = (j.216 + j.128) \times .1474I_2 = j.0508I_2$$

$$V_6 = j.216 \times .1474I_2 = j.0318I_2$$

$$V_7 = j.450 \times .1106I_2 = j.0498I_2$$

por lo que

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} = \frac{j.1670I_2}{I_2} = j.1670$$

$$Z_{32} = \frac{V_3}{I_2} = \frac{j.1359I_2}{I_2} = j.1359$$

$$Z_{42} = \frac{V_4}{I_2} = \frac{j.0774I_2}{I_2} = j.0774$$

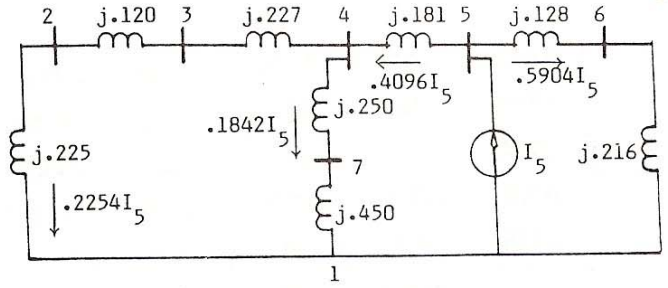
$$Z_{52} = \frac{V_5}{I_2} = \frac{j.0508I_2}{I_2} = j.0508$$

$$Z_{62} = \frac{V_6}{I_2} = \frac{j.0318I_2}{I_2} = j.0318$$

$$Z_{72} = \frac{V_7}{I_2} = \frac{j.0498I_2}{I_2} = j.0498$$

Columna 5:

De igual manera para encontrar la columna 5 se inyecta la corriente I_5 al nodo 5 de la red pasiva y se calculan los voltajes en todos los nodos. Las corrientes en cada parte de la red en función de la corriente inyectada se muestran en la figura siguiente.



Los voltajes en función de la corriente aplicada son

$$V_2 = j.225 \times .2254I_5 = j.0508I_5$$

$$V_3 = (j.225 + j.120) \times .2254I_5 = j.0778I_5$$

$$V_4 = (j.225 + j.120 + j.227) \times .2254I_5 = j.1290I_5$$

$$V_5 = (j.216 + j.128) \times .5904I_5 = j.2030I_5$$

$$V_6 = j.216 \times .5904I_5 = j.1276I_5$$

$$V_7 = j.450 \times .1842I_5 = j.0829I_5$$

por lo que

$$Z_{25} = \frac{V_2}{I_5} = j.0508 \qquad Z_{35} = \frac{V_3}{I_5} = j.0778$$

$$Z_{45} = \frac{V_4}{I_5} = j.1290 \qquad Z_{55} = \frac{V_5}{I_5} = j.2030$$

$$Z_{65} = \frac{V_6}{I_5} = j.1276 \qquad Z_{75} = \frac{V_7}{I_5} = j.0829$$

Repitiendo el procedimiento con los demás nodos se obtienen todas las columnas de la matriz impedancia de nodo.

$$\underset{\sim}{Z} = j \begin{array}{c} \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} .1670 & .1359 & .0774 & .0508 & .0318 & .0498 \\ .1359 & .2085 & .1187 & .0778 & .0488 & .0763 \\ .0774 & .1187 & .1968 & .1290 & .0809 & .1265 \\ .0508 & .0778 & .1290 & .2030 & .1276 & .0829 \\ .0318 & .0488 & .0809 & .1276 & .1605 & .0520 \\ .0498 & .0763 & .1265 & .0829 & .0520 & .2420 \end{bmatrix} \end{array}$$

4. FORMACION DE LA MATRIZ IMPEDANCIA DE BARRA POR ALGORITMO.

Existe un algoritmo muy útil para la formación de la matriz impedancia de barra, el cual consiste en ir formando la matriz paso a paso agregando un elemento de la red a la vez y modificándola cada vez que se agrega ese elemento. Se comienza por seleccionar un nodo de referencia, el cual será el punto de partida, y se coloca un elemento que esté unido a ese nodo de referencia. El elemento agregado crea un nuevo nodo. El próximo elemento se colocará a partir del nodo de referencia o a partir del nodo creado. No se puede agregar ningún elemento entre dos nodos si al menos uno de ellos no tiene continuidad hacia el nodo de referencia. Al agregar un elemento hay que determinar si

pertenece a una rama o a una unión del gráfico correspondiente a la red. Las fórmulas utilizadas son diferentes en cada caso. No es necesario que las ramas y las uniones y por lo tanto el árbol estén explícitamente especificados. El árbol automáticamente se va formando a medida que se van agregando los elementos de la red. Si el elemento que se agrega no forma un circuito cerrado con los otros elementos de la red, ese elemento será una rama y si forma el circuito cerrado será una unión.

4.1 FORMA DE AGREGAR ELEMENTOS RAMAS

Sea un elemento rama con nodos terminales p y q y con impedancia $Z_{pq,\,pq}$, tal como se indica en la figura 3.7.

p es el nodo inicial, el cual puede ser el nodo de referencia o un nodo ya creado. $Z_{pq,\,pq}$ son también los términos de la matriz impedancia primitiva.

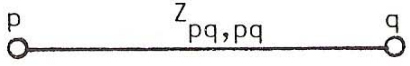


Fig. 3.7

El nodo de referencia es siempre el número 1.

Si p es el nodo de referencia el valor de la diagonal de la matriz impedancia de barra es

$$Z_{qq} = Z_{pq,pq} \qquad 3.17$$

y los valores fuera de la diagonal correspondientes a la fila q y a la columna i son iguales a cero, es decir

$$Z_{qi} = Z_{iq} = 0 \qquad i = 2,\ 3,\ \ldots\ j \qquad 3.18$$

siendo j la dimensión de la matriz que se va a construir e i los números de los nodos ya formados.

Si p no es el nodo de referencia el valor de la diagonal de la matriz es

$$Z_{qq} = Z_{pq} + Z_{pq,pq} \qquad 3.19$$

y los valores fuera de la diagonal son

$$Z_{qi} = Z_{pi} \quad y \quad Z_{pq} = Z_{qp} \qquad i = 2,\ 3,\ \ldots\ j \qquad 3.20$$

Cada vez que se agrega un elemento rama la matriz se aumenta en una fila y en una columna. La dimensión de la matriz es igual al número de ramas por número de ramas.

4.2 FORMA DE AGREGAR ELEMENTOS UNIONES

Si se agrega un elemento unión, es decir se agrega un elemento entre dos nodos ya formados con lo que se cierra un circuito, se creará en la parte ya formada de la matriz una fila y una columna u, o sea

$$\left[\begin{array}{ccc|c} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1u} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2u} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \hline Z_{u1} & Z_{u2} & \cdots & Z_{uu} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} Z_1 & Z_2 \\ \hline Z_3 & Z_4 \end{array}\right] \qquad 3.21$$

en donde los valores fuera de la diagonal son

$$Z_{ui} = Z_{iu} = Z_{pi} - Z_{qi} \qquad i = 1, 2, \ldots u - 1 \qquad 3.22$$

y el valor de la diagonal es

$$Z_{uu} = Z_{pu} - Z_{qu} + Z_{pq,pq} \qquad 3.23$$

En este caso la matriz queda aumentada en una fila y en una columna; pero como la matriz impedancia de barra no puede aumentarse con la adición de una unión, cada vez que se agrega una unión debe reducirse la matriz mediante la expresión

$$\underset{\sim}{Z}' = \underset{\sim}{Z}_1 - \underset{\sim}{Z}_2 \, \underset{\sim}{Z}_4^{-1} \, \underset{\sim}{Z}_3 \qquad 3.24$$

en donde $\underset{\sim}{Z}_1$ es la matriz antes de agregarse la unión, Z_2 es el vector

$$\begin{bmatrix} Z_{1u} \\ Z_{2u} \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_{u-1,u} \end{bmatrix}$$

$\underset{\sim}{Z}_3$ es el vector transpuesto

$$\begin{bmatrix} Z_{u1} & Z_{u2} & \cdots & Z_{u,u-1} \end{bmatrix}$$

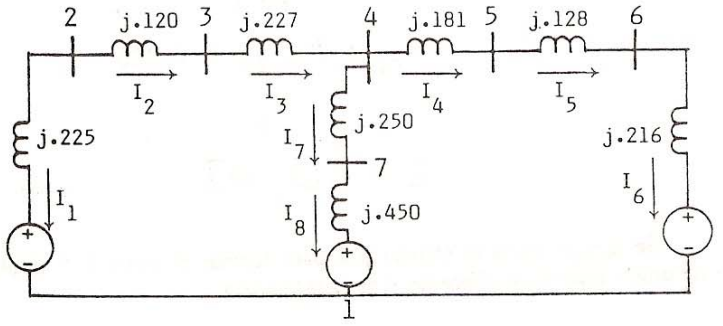
y $\underset{\sim}{Z}_4$ es Z_{uu}.

Se pueden agregar todas las uniones al mismo tiempo en la forma descrita anteriormente (siempre y cuando estén formados los nodos en donde colocarlas) y por último hacer una sola reducción, con lo cual $\underset{\sim}{Z}_1$ es la misma matriz anterior y $\underset{\sim}{Z}_2$, $\underset{\sim}{Z}_3$ y $\underset{\sim}{Z}_4$ serían matrices.

Las filas y columnas de la matriz impedancia de barra relacionadas con el nodo de referencia tendrán siempre un valor de cero.

EJEMPLO 3

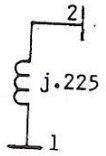
Formar la matriz impedancia de barra de la red pasiva de la figura 3.1, la cual se repite por conveniencia en la figura siguiente, usando el método del algoritmo.



La matriz impedancia primitiva es

$$Z_e = \begin{array}{c} \\ 1\text{-}2 \\ 2\text{-}3 \\ 3\text{-}4 \\ 4\text{-}5 \\ 5\text{-}6 \\ 1\text{-}6 \\ 4\text{-}7 \\ 1\text{-}7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1\text{-}2 & 2\text{-}3 & 3\text{-}4 & 4\text{-}5 & 5\text{-}6 & 1\text{-}6 & 4\text{-}7 & 1\text{-}7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.225 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j.120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j.227 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j.181 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j.128 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j.216 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j.250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & j.450 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se comienza con el nodo de referencia y se agrega cualquier elemento unido a este nodo. En este caso se agregará el elemento 1, creando el nodo 2.



Se tiene entonces que p = 1, q = 2, por lo que con

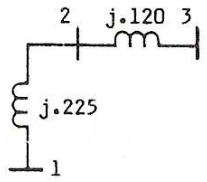
$$Z_{qq} = Z_{pq,pq}$$

$$Z_{22} = Z_{12,12} = j.225$$

y

$$\underset{\sim}{Z} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ j.225 \end{bmatrix}$$

Se agrega ahora el elemento 2 para formar el nodo 3. Este elemento está unido a un nodo diferente al de la referencia.



Se tiene entonces que p = 2, q = 3 $\quad 1 = 2$ $\quad j = 2$

por lo que con

$$Z_{qi} = Z_{pi} \qquad Z_{pq} = Z_{qp} \qquad Z_{qq} = Z_{pq} + Z_{pq,pq}$$

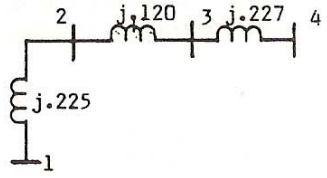
$$Z_{32} = Z_{22} = j.225$$

$$Z_{23} = Z_{32} = j.225$$

$$Z_{33} = Z_{23} + Z_{23,23} = j.225 + j.120 = j.345$$

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.225 & j.225 \\ j.225 & j.345 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se agrega el elemento 3 para formar el nodo 4.



$p = 3 \qquad q = 4 \qquad i = 2,3$

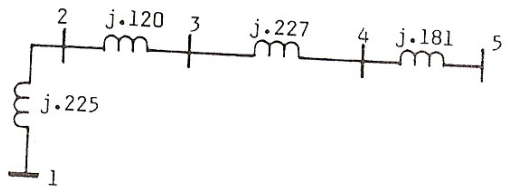
$Z_{42} = Z_{32} = j.225$ $\qquad Z_{24} = Z_{42} = j.225$

$Z_{43} = Z_{33} = j.345$ $\qquad Z_{34} = Z_{43} = j.345$

$Z_{44} = Z_{34} + Z_{34,34} = j.345 + j.227 = j.572$

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.225 & j.225 & j.225 \\ j.225 & j.345 & j.345 \\ j.225 & j.345 & j.572 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se agrega el elemento 4 para crear el nodo 5.



$p = 4 \qquad q = 5 \qquad i = 2,3,4$

$Z_{52} = Z_{42} = j.225$ $\qquad Z_{25} = Z_{52} = j.225$

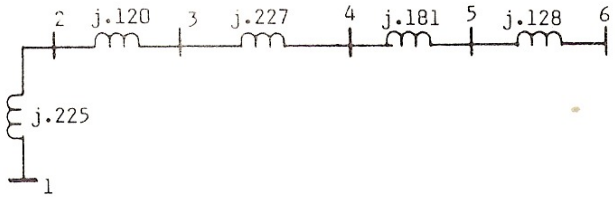
$Z_{53} = Z_{43} = j.345$ $\qquad Z_{35} = Z_{53} = j.345$

$Z_{54} = Z_{44} = j.572$ $\qquad Z_{45} = Z_{54} = j.572$

$Z_{55} = Z_{45} + Z_{45,45} = j.572 + j.181 = j.753$

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.225 & j.225 & j.225 & j.225 \\ j.225 & j.345 & j.345 & j.345 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.572 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.753 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se agrega el elemento 5 para crear el nodo 6.



$p = 5 \qquad q = 6 \qquad i = 2, 3, 4, 5$

$Z_{62} = Z_{52} = j.225$ $\qquad Z_{26} = Z_{62} = j.225$

$Z_{63} = Z_{53} = j.345$ $\qquad Z_{36} = Z_{63} = j.345$

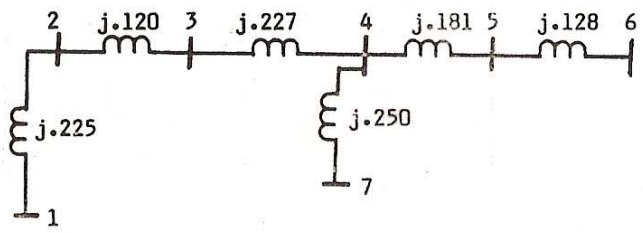
$Z_{64} = Z_{54} = j.572$ $\qquad Z_{46} = Z_{64} = j.572$

$Z_{65} = Z_{55} = j.753$ $\qquad Z_{56} = Z_{65} = j.753$

$Z_{66} = Z_{56} + Z_{56,56} = j.753 + j.128 = j.881$

$$Z = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.225 & j.225 & j.225 & j.225 & j.225 \\ j.225 & j.345 & j.345 & j.345 & j.345 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.572 & j.572 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.753 & j.753 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.753 & j.881 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se agrega el elemento 7 para crear el nodo 7.



$p = 4 \qquad q = 7 \qquad i = 2, 3, 4, 5, 6$

$Z_{72} = Z_{42} = j.225 \qquad Z_{27} = Z_{72} = j.225$

$Z_{73} = Z_{43} = j.345 \qquad Z_{37} = Z_{73} = j.345$

$Z_{74} = Z_{44} = j.572 \qquad Z_{47} = Z_{74} = j.572$

$Z_{75} = Z_{45} = j.572 \qquad Z_{57} = Z_{75} = j.572$

$Z_{76} = Z_{46} = j.572 \qquad Z_{67} = Z_{76} = j.572$

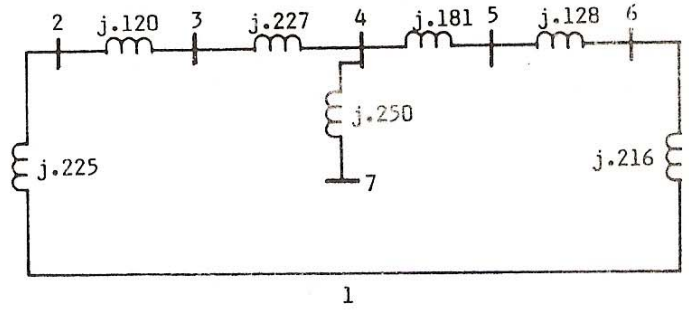
$Z_{77} = Z_{47} + Z_{47,47} = j.572 + j.250 = j.822$

$$Z = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.225 & j.225 & j.225 & j.225 & j.225 & j.225 \\ j.225 & j.345 & j.345 & j.345 & j.345 & j.345 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.572 & j.572 & j.572 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.753 & j.753 & j.572 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.753 & j.881 & j.572 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.572 & j.572 & j.822 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se agrega el elemento 6. Al agregar el elemento se cierra un circuito, por lo tanto el elemento es una unión y las fórmulas a utilizar son

$$Z_{ui} = Z_{iu} = Z_{pi} - Z_{qi} \qquad i = 2, \ldots u - 1$$

$$Z_{uu} = Z_{pu} - Z_{qu} + Z_{pq,pq}$$



$p = 1 \qquad q = 6 \qquad i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$Z_{u2} = Z_{2u} = Z_{12} - Z_{62} = 0 - j.225 = -j.225$

$Z_{u3} = Z_{3u} = Z_{13} - Z_{63} = 0 - j.345 = -j.345$

$Z_{u4} = Z_{4u} = Z_{14} - Z_{64} = 0 - j.572 = -j.572$

$Z_{u5} = Z_{5u} = Z_{15} - Z_{65} = 0 - j.753 = -j.753$

$Z_{u6} = Z_{6u} = Z_{16} - Z_{66} = 0 - j.881 = -j.881$

$Z_{u7} = Z_{7u} = Z_{17} - Z_{67} = 0 - j.572 = -j.572$

$Z_{uu} = Z_{1u} - Z_{6u} + Z_{16,16} = 0 - (-j.881) + j.216 = j1.097$

La matriz aumentada es entonces

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} j.225 & j.225 & j.225 & j.225 & j.225 & j.225 & -j.225 \\ j.225 & j.345 & j.345 & j.345 & j.345 & j.345 & -j.345 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.572 & j.572 & j.572 & -j.572 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.753 & j.753 & j.572 & -j.753 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.753 & j.881 & j.572 & -j.881 \\ j.225 & j.345 & j.572 & j.572 & j.572 & j.822 & -j.572 \\ \hline -j.225 & -j.245 & -j.572 & -j.753 & -j.881 & -j.572 & j1.097 \end{array}\right] \end{array}$$

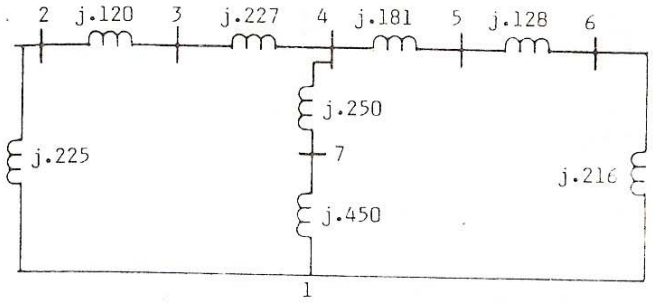
Reduciendo se tiene

$$\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{Z}_1 - \underset{\sim}{Z}_2 \underset{\sim}{Z}_4^{-1} \underset{\sim}{Z}_3$$

$$= j\left[\begin{bmatrix} .225 & .225 & .225 & .225 & .225 & .225 \\ .225 & .345 & .345 & .345 & .345 & .345 \\ .225 & .345 & .572 & .572 & .572 & .572 \\ .225 & .345 & .572 & .753 & .753 & .572 \\ .225 & .345 & .572 & .753 & .881 & .572 \\ .225 & .345 & .572 & .572 & .572 & .822 \end{bmatrix} - \frac{1}{1.097}\begin{bmatrix} .225 \\ .345 \\ .572 \\ .753 \\ .881 \\ .572 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .225 & .345 & .572 \\ .753 & .881 & .572 \end{bmatrix}\right]$$

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.1789 & j.1542 & j.1077 & j.0695 & j.0443 & j.1077 \\ j.1542 & j.2365 & j.1651 & j.1082 & j.0679 & j.1651 \\ j.1077 & j.1651 & j.2737 & j.1794 & j.1126 & j.2737 \\ j.0695 & j.1082 & j.1794 & j.2361 & j.1483 & j.1794 \\ j.0443 & j.0679 & j.1126 & j.1483 & j.1735 & j.1126 \\ j.1077 & j.1651 & j.2737 & j.1794 & j.1126 & j.5237 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se agrega el elemento 8. Al agregar el elemento 8 se cierra un circuito y por lo tanto el elemento es una unión.



$p = 1 \qquad q = 7 \qquad i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$$Z_{u2} = Z_{2u} = Z_{12} - Z_{72} = 0 - j.1077 = -j.1077$$

$$Z_{u3} = Z_{3u} = Z_{13} - Z_{73} = 0 - j.1651 = -j.1651$$

$$Z_{u4} = Z_{4u} = Z_{14} - Z_{74} = 0 - j.2737 = -j.2737$$

$$Z_{u5} = Z_{5u} = Z_{15} - Z_{75} = 0 - j.1794 = -j.1794$$

$$Z_{u6} = Z_{6u} = Z_{16} - Z_{76} = 0 - j.1126 = -j.1126$$

$$Z_{u7} = Z_{7u} = Z_{17} - Z_{77} = 0 - j.5237 = -j.5237$$

$$Z_{uu} = Z_{1u} - Z_{7u} + Z_{17,17} = 0 - (-j.5237) + j.450 = j.9737$$

La matriz aumentada es entonces

	2	3	4	5	6	7	u
2	.1789	.1542	.1077	.0695	.0443	.1077	-.1077
3	.1542	.2365	.1651	.1082	.0679	.1651	-.1651
4	.1077	.1651	.2737	.1794	.1126	.2737	-.2737
5	.0695	.1082	.1794	.2361	.1483	.1794	-.1794
6	.0443	.0679	.1126	.1483	.1735	.1126	-.1126
7	.1077	.1651	.2737	.1794	.1126	.5237	-.5237
u	-.1077	-.1651	-.2737	-.1794	-.1126	-.5237	.9737

Reduciendo se tiene

$$\underset{\sim}{Z} = j\begin{bmatrix} .1789 & .1542 & .1077 & .0695 & .0443 & .1077 \\ .1542 & .2365 & .1651 & .1082 & .0679 & .1651 \\ .1077 & .1651 & .2737 & .1794 & .1126 & .2737 \\ .0695 & .1082 & .1794 & .2361 & .1483 & .1794 \\ .0443 & .0679 & .1126 & .1483 & .1735 & .1126 \\ .1077 & .1651 & .2737 & .1794 & .1126 & .5237 \end{bmatrix}$$

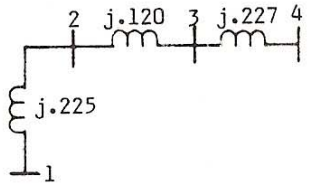
$$- \frac{j}{.9737}\begin{bmatrix} -.1077 \\ -.1651 \\ -.2737 \\ -.1794 \\ -.1126 \\ -.5237 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -.1077 & -.1651 & -.2737 & -.1794 & -.1126 & -.5237 \end{bmatrix}$$

	2	3	4	5	6	7
2	.1670	.1359	.0774	.0508	.0318	.0498
3	.1359	.2085	.1187	.0778	.0488	.0763
4	.0774	.1187	.1968	.1290	.0809	.1265
5	.0508	.0778	.1290	.2030	.1276	.0829
6	.0318	.0488	.0809	.1276	.1605	.0520
7	.0498	.0763	.1265	.0829	.0520	.2420

$= j$

EJEMPLO 4

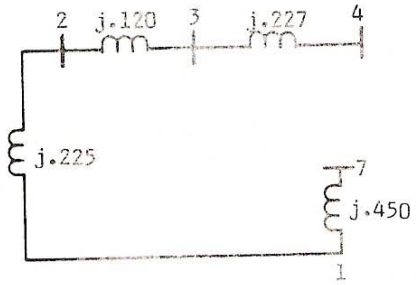
Repetir el Ejemplo 3 agregando los elementos en orden diferente.
Se coloca hasta el elemento 3 en el mismo orden anterior, por lo que se tiene



	2	3	4
2	j.225	j.225	j.225
3	j.225	j.345	j.345
4	j.225	j.345	j.572

$Z =$

Se agrega ahora el elemento 8 para formar el nodo 7.



$p = 1 \qquad q = 7 \qquad i = 2, 3, 4$

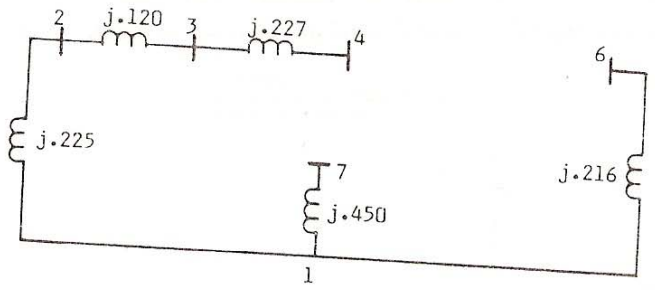
$Z_{72} = Z_{27} = Z_{12} = 0 \qquad Z_{73} = Z_{37} = Z_{13} = 0$

$Z_{74} = Z_{47} = Z_{14} = 0 \qquad Z_{77} = Z_{17,17} = j.450$

	2	3	4	7
2	j.225	j.225	j.225	0
3	j.225	j.345	j.345	0
4	j.225	j.345	j.572	0
7	0	0	0	j.450

$Z =$

Se agrega ahora el elemento 6 para formar el nodo 6.



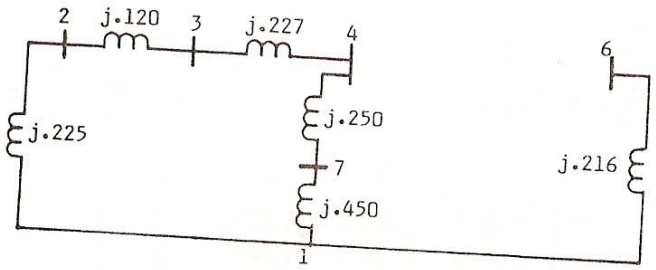
$p = 1 \qquad q = 6 \qquad i = 2, 3, 4, 7$

$$Z_{62} = Z_{63} = Z_{64} = Z_{67} = Z_{26} = Z_{36} = Z_{46} = Z_{76} = 0$$

$$Z_{66} = Z_{16,16} = j.216$$

$$Z = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.225 & j.225 & j.225 & 0 & 0 \\ j.225 & j.345 & j.345 & 0 & 0 \\ j.225 & j.345 & j.572 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j.450 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j.216 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se agrega el elemento 7 entre los nodos 4 y 7. Al agregar el elemento 7 se cierra un circuito y por lo tanto el elemento es una unión.



$p = 4 \qquad q = 7 \qquad i = 2, 3, 4, 7, 6$

$$Z_{u2} = Z_{2u} = Z_{42} - Z_{72} = j.225 - 0 = j.225$$

$$Z_{u3} = Z_{3u} = Z_{43} - Z_{73} = j.345 - 0 = j.345$$

$$Z_{u4} = Z_{4u} = Z_{44} - Z_{74} = j.572 - 0 = j.572$$

$$Z_{u7} = Z_{7u} = Z_{47} - Z_{77} = 0 - j.450 = -j.450$$

$$Z_{u6} = Z_{6u} = Z_{46} - Z_{76} = 0 - 0 = 0$$

$$Z_{uu} = Z_{4u} - Z_{7u} + Z_{47,47} = j.572 - (-j.450) + j.250$$

$$= j1.272$$

La matriz aumentada es

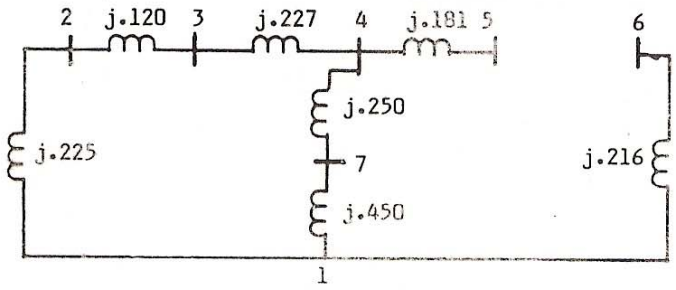
$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} j.225 & j.225 & j.225 & 0 & 0 & j.225 \\ j.225 & j.345 & j.345 & 0 & 0 & j.345 \\ j.225 & j.345 & j.572 & 0 & 0 & j.572 \\ 0 & 0 & 0 & j.450 & 0 & -j.450 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j.216 & 0 \\ \hline j.225 & j.345 & j.572 & -j.450 & 0 & j1.272 \end{array}\right] \end{array}$$

La matriz reducida es

$$Z = j \begin{bmatrix} .225 & .225 & .225 & 0 & 0 \\ .225 & .345 & .345 & 0 & 0 \\ .225 & .345 & .572 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .450 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .216 \end{bmatrix} - \frac{j}{1.272} \begin{bmatrix} .225 \\ .345 \\ .572 \\ -.45 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .225 & .345 & .572 & -.450 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.1852 & j.1640 & j.1238 & j.0796 & 0 \\ j.1640 & j.2514 & j.1899 & j.1221 & 0 \\ j.1238 & j.1899 & j.3148 & j.2024 & 0 \\ j.0796 & j.1221 & j.2024 & j.2908 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j.2160 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se agrega el elemento 4 para crear el nodo 5



$p = 4 \qquad q = 5 \qquad i = 2, 3, 4, 7, 6$

$Z_{52} = Z_{42} = j.1238 \qquad Z_{25} = Z_{52} = j.1238$

$Z_{53} = Z_{43} = j.1899 \qquad Z_{35} = Z_{53} = j.1899$

$Z_{54} = Z_{44} = j.3148 \qquad Z_{45} = Z_{54} = j.3148$

$Z_{57} = Z_{47} = j.2024 \qquad Z_{75} = Z_{57} = j.2024$

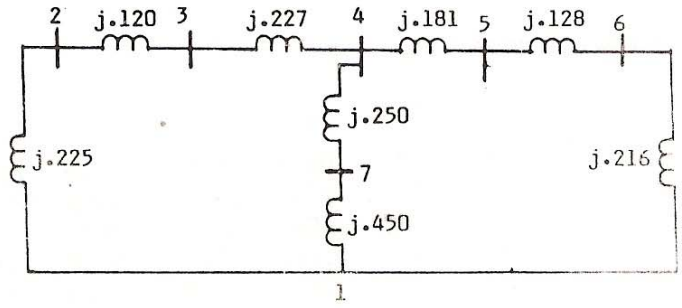
$Z_{56} = Z_{46} = 0 \qquad Z_{65} = Z_{56} = 0$

$Z_{55} = Z_{45} + Z_{45,45} = j.3148 + j.181 = j.4958$

$$Z = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.1852 & j.1640 & j.1238 & j.0796 & 0 & j.1238 \\ j.1540 & j.2514 & j.1899 & j.1221 & 0 & j.1899 \\ j.1238 & j.1899 & j.3148 & j.2024 & 0 & j.3148 \\ j.0796 & j.1221 & j.2024 & j.2908 & 0 & j.2024 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j.2160 & 0 \\ j.1238 & j.1899 & j.3148 & j.2024 & 0 & j.4958 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se agrega el elemento 5 entre los nodos 5 y 6. Al agregar el elemento 5 se cierra un circuito y por lo tanto el elemento es una unión.

$p = 5 \qquad q = 6 \qquad i = 2, 3, 4, 7, 6, 5$



$Z_{u2} = Z_{2u} = Z_{52} - Z_{62} = j.1238 - 0 = j.1238$

$Z_{u3} = Z_{3u} = Z_{53} - Z_{63} = j.1899 - 0 = j.1899$

$Z_{u4} = Z_{4u} = Z_{54} - Z_{64} = j.3148 - 0 = j.3148$

$Z_{u7} = Z_{7u} = Z_{57} - Z_{67} = j.2024 - 0 = j.2024$

$Z_{u6} = Z_{6u} = Z_{56} - Z_{66} = 0 - j.216 = -j.2160$

$Z_{u5} = Z_{5u} = Z_{55} - Z_{65} = j.4958 - 0 = j.4958$

$Z_{uu} = Z_{5u} - Z_{6u} + Z_{56,56} = j.4958 - (-j.2160) + j.128$

$= j.8398$

La matriz aumentada es

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7\ j \\ 6 \\ 5 \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} .1852 & .1640 & .1238 & .0796 & 0 & .1238 & .1238 \\ .1640 & .2514 & .1899 & .1221 & 0 & .1899 & .1899 \\ .1238 & .1899 & .3148 & .2024 & 0 & .3148 & .3148 \\ .0796 & .1221 & .2024 & .2908 & 0 & .2024 & .2024 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .2160 & 0 & -.216 \\ .1238 & .1899 & .3148 & .2024 & 0 & .4958 & .4958 \\ \hline .1238 & .1899 & .3148 & .2024 & -.2160 & .4958 & .8398 \end{array}\right] \end{array}$$

Finalmente la matriz reducida es

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .1670 & .1359 & .0774 & .0498 & .0318 & .0508 \\ .1359 & .2085 & .1187 & .0763 & .0488 & .0778 \\ .0774 & .1187 & .1968 & .1265 & .0809 & .1290 \\ .0498 & .0763 & .1265 & .2420 & .0520 & .0829 \\ .0318 & .0488 & .0809 & .0520 & .1605 & .1276 \\ .0508 & .0778 & .1290 & .0829 & .1276 & .2030 \end{bmatrix} \end{array} \quad j$$

Este resultado es el mismo obtenido en el Ejemplo 3, con la diferencia del orden de filas y columnas, debido al orden como se agregaron los nodos.

4.3 FORMACION DE LA IMPEDANCIA DE BARRA POR ALGORITMO TOMANDO EN CUENTA LAS INDUCTANCIAS MUTUAS

Si existen inductancias mutuas entre líneas, la mejor manera de obtener la matriz impedancia de barra es formando primero a la matriz admitancia de barra a través de $Y_n = AZ_e^{-1} A^T$ y luego invirtiéndola. Sin embargo, si se desea obtener dicha matriz impedancia de barra por algoritmo, las fórmulas de la sección anterior quedan modificadas de la siguiente manera.

Se agregan elementos ramas:

a) p es el nodo de referencia

$$Z_{qi} = Z_{iq} = \frac{\overline{Y}_{pq,rs}\left[\overline{Z}_{ri} - \overline{Z}_{si}\right]}{Y_{pq,pq}} \qquad 3.25$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots j$$

$$Z_{qq} = \frac{1 + \overline{Y}_{pq,rs}\left[\overline{Z}_{rq} - \overline{Z}_{sq}\right]}{Y_{pq,pq}} \qquad 3.26$$

b) p no es el nodo de referencia

$$Z_{qi} = Z_{iq} = Z_{pi} + \frac{\overline{Y}_{pq,rs}\left[\overline{Z}_{ri} - \overline{Z}_{si}\right]}{Y_{pq,pq}} \qquad 3.27$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots j$$

$$Z_{qq} = Z_{pq} + \frac{1 + \overline{Y}_{pq,rs}\left[\overline{Z}_{rq} - \overline{Z}_{sq}\right]}{Y_{pq,pq}} \qquad 3.28$$

Se agregan elementos uniones:

a) p es el nodo de referencia

$$Z_{ui} = Z_{iu} = -Z_{qi} + \frac{\overline{Y}_{pq,rs}\left[\overline{Z}_{ri} - \overline{Z}_{si}\right]}{Y_{pq,pq}} \qquad 3.29$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots u-1$$

$$Z_{uu} = -Z_{qu} + \frac{1 + \overline{Y}_{pq,rs}\left[\overline{Z}_{ru} - \overline{Z}_{su}\right]}{Y_{pq,pq}} \qquad 3.30$$

b) p no es el nodo de referencia

$$Z_{ui} = Z_{iu} = Z_{pi} - Z_{qi} + \frac{\overline{Y}_{pq,rs}\left[\overline{Z}_{ri} - \overline{Z}_{si}\right]}{Y_{pq,pq}} \qquad 3.31$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots u-1$$

$$Z_{uu} = Z_{pu} - Z_{qu} + \frac{1 + \overline{Y}_{pq,rs}\left[\overline{Z}_{ru} - \overline{Z}_{su}\right]}{Y_{pq,pq}} \qquad 3.32$$

Los subíndices pq se refieren al elemento agregado y rs se refieren a los nodos en donde estén colocados los elementos que estén mutuados con pq, r es el nodo de entrada y s el de salida.

$Y_{pq,\,pq}$ es la admitancia del elemento que se agrega.

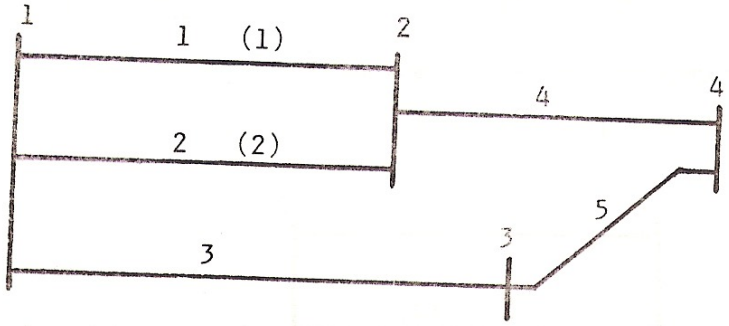
$Y_{pq,\,rs}$ es el vector fila de las admitaciones mutuas entre el elemento agregado y los elementos rs de la red parcial. Su dimensión m es igual al número de elementos que estén colocados entre r y s

$Z_{ri} - Z_{si}$ es un vector columna de la matriz impedancia de barra ya formada. Su dimensión es m x 1.

$Z_{ru} - Z_{su}$ es un vector columna de la matriz impedancia de barra aumentada. Su dimensión es m x 1

EJEMPLO 5

Obtener la matriz impedancia de barra de la siguiente red.



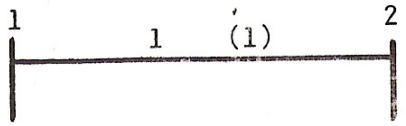
Los valores de las impedancias son

	INDUCTANCIA PROPIA		INDUCTANCIA MUTUA	
ELEMENTO	NODOS	IMPEDANCIA	NODOS	IMPEDANCIA
1	1-2(1)	.5	1-2(2)	.2
2	1-2(2)	.6		
3	1-3	.4	1-2(2)	.1
4	2-4	.2		
5	3-4	.5		

La matriz impedancia primitiva es[1]

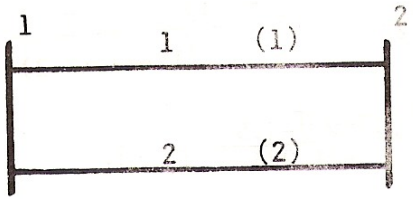
$$\underset{\sim}{Z}_e = \begin{array}{c} \\ 1\text{-}2(1) \\ 1\text{-}2(2) \\ 1\text{-}3 \\ 2\text{-}4 \\ 3\text{-}4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1\text{-}2(1) & 1\text{-}2(2) & 1\text{-}3 & 2\text{-}4 & 3\text{-}4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.5 & j.2 & 0 & 0 & 0 \\ j.2 & j.6 & j.1 & 0 & 0 \\ 0 & j.1 & j.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Al igual que en casos anteriores se comienza con el nodo de referencia y se agrega cualquier elemento unido a este nodo. En este caso el nodo 1 será el nodo de referencia y se agrega el elemento 1 para formar el nodo 2.



$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} 2 \\ 2 \begin{bmatrix} j.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se agrega ahora el elemento 2. Al agregar el elemento 2 se cierra un circuito y por lo tanto el elemento es una unión.



p = 1 q = 2 i = 2

[1] Se recomienda que los elementos mutuados tengan numeración sucesiva, preferiblemente los primeros números.

Como el elemento 2 está mutuado con el ya agregado elemento 1, se obtiene una submatriz impedancia primitiva y su correspondiente submatriz admitancia primitiva que contenga solamente a los dos elementos mencionados.

$$Z_e = \begin{array}{c} \\ 1\text{-}2(1) \\ 1\text{-}2(2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1\text{-}2(1) & 1\text{-}2(2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.5 & j.2 \\ j.2 & j.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Y_e = Z_e^{-1} = \begin{array}{c} \\ 1\text{-}2(1) \\ 1\text{-}2(2) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1\text{-}2(1) & 1\text{-}2(2) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -j2.308 & j.769 \\ j.769 & -j1.923 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$pq = 12(2) \qquad rs = 12(1)$$

$$\bar{Y}_{pq,rs} = \bar{Y}_{12(2),12(1)} = \begin{array}{c} \\ 1\text{-}2(2) \end{array} \begin{array}{c} 1\text{-}2(1) \\ \begin{bmatrix} j.769 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Y_{pq,pq} = Y_{12(2),12(2)} = -j1.923$$

$$\left[\bar{Z}_{ri} - \bar{Z}_{si}\right] = \left[\bar{Z}_{12} - \bar{Z}_{22}\right] = \left[0 - j.5\right] = \left[-j5\right]$$

$$Z_{u2} = Z_{2u} = -Z_{22} + \frac{\bar{Y}_{12(2),12(1)}\left[\bar{Z}_{12} - \bar{Z}_{22}\right]}{Y_{12(2),12(2)}}$$

$$= -j.5 + \frac{[j.769][-j.5]}{-j1.923} = -j.3$$

$$Z_{uu} = -Z_{2u} + \frac{1 + \bar{Y}_{12(2),12(1)}\left[\bar{Z}_{1u} - \bar{Z}_{2u}\right]}{Y_{12(2),12(2)}}$$

$$= j.3 + \frac{1 + [j.769][0 + j.3]}{-j1.923} = j.700$$

La matriz impedancia de barra aumentada es

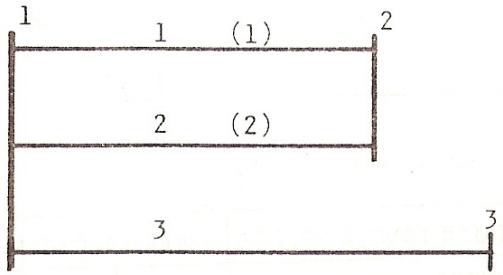
$$\underset{\sim}{Z}' = \begin{array}{c} \\ 2 \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} j.5 & -j.3 \\ \hline -j.3 & j.7 \end{array}\right] \end{array}$$

Reduciendo se tiene

$$\underset{\sim}{Z} = [j.5] - \frac{1}{j.7}[-j.3][-j.3] = \begin{array}{c} 2 \\ \left[j.371\right] \end{array}$$

Se agrega el elemento 3 para crear el nodo 3.

$p = 1 \qquad q = 3 \qquad i = 2$



Como el elemento 3 está mutuado con el elemento 1-2(2) se consiguen las matrices impedancias y admitancias primitivas parciales.

$$Z_e = \begin{array}{c} \\ 1\text{-}2(1) \\ 1\text{-}2(2) \\ 1\text{-}3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1\text{-}2(1) & 1\text{-}2(2) & 1\text{-}3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.5 & j.2 & 0 \\ j.2 & j.6 & j.1 \\ 0 & j.1 & j.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$Y_e = \begin{array}{c} \\ 1\text{-}2(1) \\ 1\text{-}2(2) \\ 1\text{-}3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1\text{-}2(1) & 1\text{-}2(2) & 1\text{-}3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -j2.323 & j.808 & -j.202 \\ j.808 & -j2.020 & j.505 \\ -j.202 & j.505 & -j2.626 \end{bmatrix} \end{array}$$

$pq = 13 \qquad rs = 12(1) \text{ y } 12(2)$

$$\overline{Y}_{pq,rs} = [\, Y_{13,12(1)} \quad Y_{13,12(2)} \,] = [\, -j.202 \quad j.505 \,]$$

$$Y_{pq,pq} = Y_{13,13} = -j2.626$$

$$[\overline{Z}_{ri} - \overline{Z}_{si}] = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{12} - \overline{Z}_{22} \\ \overline{Z}_{12} - \overline{Z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - j.371 \\ 0 - j.371 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j.371 \\ -j.371 \end{bmatrix}$$

$$Z_{32} = Z_{23} = \frac{[-j.202 \quad j.505] \begin{bmatrix} -j.371 \\ -j.371 \end{bmatrix}}{-j2.626} = j.043$$

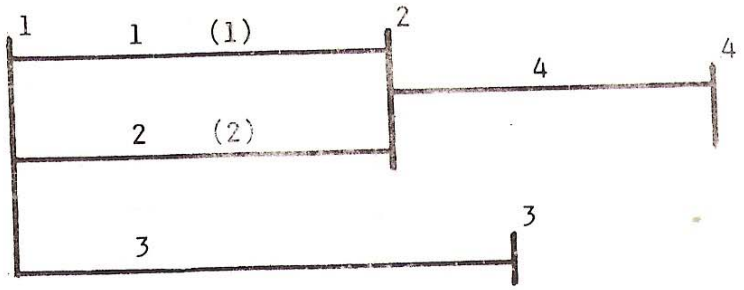
$$[Z_{rq} - Z_{sq}] = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{13} - \overline{Z}_{23} \\ \overline{Z}_{13} - \overline{Z}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - j.043 \\ 0 - j.043 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j.043 \\ -j.043 \end{bmatrix}$$

$$Z_{33} = \frac{1 + [-j.202 \quad j.505] \begin{bmatrix} -j.043 \\ -j.043 \end{bmatrix}}{-j2.626} = j.386$$

y por lo tanto

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.371 & j.043 \\ j.043 & j.386 \end{bmatrix} \end{array}$$

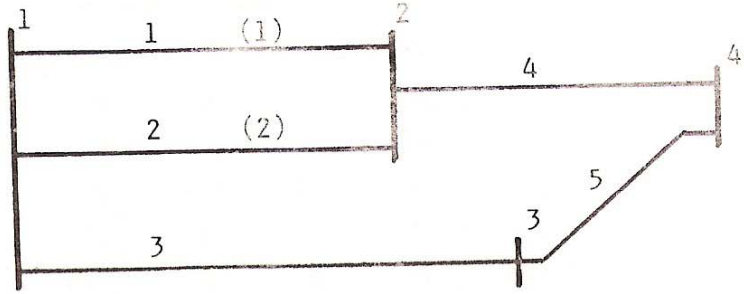
Se agrega el elemento 4 para crear el nodo 4.



Como el elemento 4, el cual es una rama, no está mutuado con ningún otro elemento, por experiencia anterior se puede escribir directamente la matriz de impedancia de barra parcial.

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.371 & j.043 & j.371 \\ j.043 & j.386 & j.043 \\ j.371 & j.043 & j.571 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se agrega el elemento 5, el cual es una unión sin mutuas.



La matriz impedancia de barra aumentada es

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & u \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} j.371 & j.043 & j.371 & -j.328 \\ j.043 & j.386 & j.043 & j.343 \\ j.371 & j.043 & j.571 & -j.528 \\ -j.328 & j.343 & -j.528 & j1.371 \end{array}\right] \end{array}$$

y finalmente después de la reducción la matriz impedancia de barra es

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} j.293 & j.125 & j.245 \\ j.125 & j.300 & j.175 \\ j.245 & j.175 & j.368 \end{array}\right] \end{array}$$

EJEMPLO 6

Repetir el Ejemplo 5 si el elemento 5 está mutuado con el elemento 4 por una reactancia de j.15.

Hasta la inclusión del elemento 4 para formar el nodo 4 la matriz impedancia de barra es

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} j.371 & j.043 & j.371 \\ j.043 & j.386 & j.043 \\ j.371 & j.043 & j.571 \end{array}\right] \end{array}$$

Las matrices impedancia primitiva y admitancia primitiva son

$$\underset{\sim}{Z}_e = \begin{array}{c} \\ 1\text{-}2(1) \\ 1\text{-}2(2) \\ 1\text{-}3 \\ 2\text{-}4 \\ 3\text{-}4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1\text{-}2(1) & 1\text{-}2(2) & 1\text{-}3 & 2\text{-}4 & 3\text{-}4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} j.5 & j.2 & 0 & 0 & 0 \\ j.2 & j.6 & j.1 & 0 & 0 \\ 0 & j.1 & j.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j.2 & j.15 \\ 0 & 0 & 0 & j.15 & j.5 \end{array}\right] \end{array}$$

Como el elemento 5 agregado está acoplado solamente al elemento 4, será suficiente invertir a esa submatriz

$$\underset{\sim}{Z}_e = \begin{array}{c} \\ 2\text{-}4 \\ 3\text{-}4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2\text{-}4 & 3\text{-}4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} j.2 & j.15 \\ j.15 & j.5 \end{array}\right] \end{array} \qquad \underset{\sim}{Y}_e = \begin{array}{c} \\ 2\text{-}4 \\ 3\text{-}4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2\text{-}4 & 3\text{-}4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} -j6.452 & j1.935 \\ j1.935 & -j2.581 \end{array}\right] \end{array}$$

$p = 3 \qquad q = 4 \qquad i = 2, 3, 4 \qquad rs = 24$

$$\overline{Y}_{pq,rs} = [\, Y_{34,24} \,] = [\, j1.935 \,]$$

$$Y_{pq,pq} = Y_{34,34} = -j2.581$$

$$Z_{u2} = Z_{2u} = Z_{32} - Z_{42} + \frac{[\, \overline{Y}_{34,24}][\overline{Z}_{22} - \overline{Z}_{42}\,]}{Y_{34,34}}$$

$$= j.043 - j.371 + \frac{[j1.935][j.371 - j.371]}{-j2.581}$$

$$= -j.328$$

$$Z_{u3} = Z_{3u} = Z_{33} - Z_{43} + \frac{[\, \overline{Y}_{34,24}][\overline{Z}_{23} - \overline{Z}_{43}\,]}{Y_{34,34}}$$

$$= j.386 - .043 + \frac{[\, j1.935][j.043 - j.043]}{-j2.581}$$

$$= j.343$$

$$Z_{u4} = Z_{4u} = Z_{34} - Z_{44} + \frac{[\, \overline{Y}_{34,24}][\overline{Z}_{24} - \overline{Z}_{44}\,]}{Y_{34,34}}$$

$$= j.043 - j.571 + \frac{[j1.935][j.371 - j.571]}{-j2.581}$$

$$= -j.378$$

$$Z_{uu} = Z_{3u} - Z_{4u} + \frac{1 + [\bar{Y}_{34,24}][\bar{Z}_{2u} - \bar{Z}_{4u}]}{Y_{34,34}}$$

$$= j.343 + j.378 + \frac{1 + [j1.935][-j.328 + j.378]}{-j2.581}$$

$$= j1.071$$

La matriz impedancia de barra aumentada es

	2	3	4	u
2	j.371	j.043	j.371	-j.328
3	j.043	j.386	j.043	j.343
4	j.371	j.043	j.571	-j.378
u	-j.328	j.343	-j.378	j1.071

y finalmente después de la reducción la matriz impedancia de barra es

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.271 & j.148 & j.255 \\ j.148 & j.276 & j.164 \\ j.255 & j.164 & j.438 \end{bmatrix} \end{array}$$

EJEMPLO 7

Resolver el Ejemplo 6 a través de la matriz incidencia y la matriz impedancia de elemento.

La matriz impedancia de elemento es

$$\underset{\sim e}{Z} = \begin{array}{c} \\ 1\text{-}2(1) \\ 1\text{-}2(2) \\ 1\text{-}3 \\ 2\text{-}4 \\ 3\text{-}4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1\text{-}2(1) & 1\text{-}2(2) & 1\text{-}3 & 2\text{-}4 & 3\text{-}4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.5 & j.2 & 0 & 0 & 0 \\ j.2 & j.6 & j.1 & 0 & 0 \\ 0 & j.1 & j.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j.2 & j.15 \\ 0 & 0 & 0 & j.15 & j.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Invirtiendo se tiene

$$\underset{\sim e}{Y} = j \begin{array}{c} \\ 1\text{-}2(1) \\ 1\text{-}2(2) \\ 1\text{-}3 \\ 2\text{-}4 \\ 3\text{-}4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1\text{-}2(1) & 1\text{-}2(2) & 1\text{-}3 & 2\text{-}4 & 3\text{-}4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2.323 & -.808 & .202 & .000 & .000 \\ -.808 & 2.020 & -.505 & .000 & .000 \\ .202 & -.505 & 2.626 & .000 & .000 \\ .000 & .000 & .000 & 6.452 & -1.935 \\ .000 & .000 & .000 & -1.935 & 2.581 \end{bmatrix} \end{array}$$

La matriz incidencia es

$$\underset{\sim}{A} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1\text{-}2(1) & 1\text{-}2(2) & 1\text{-}3 & 2\text{-}4 & 3\text{-}4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

La matriz admitancia de nodo es

$$\underset{\sim n}{Y} = \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim e}{Y}^{-1}\, \underset{\sim}{A}^{T}$$

$$\underset{\sim}{Y}_n = -j\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.323 & -.808 & .202 & .000 & .000\\ -.808 & 2.020 & -.505 & .000 & .000\\ .202 & -.505 & 2.626 & .000 & .000\\ .000 & .000 & .000 & 6.452 & -1.935\\ .000 & .000 & .000 & -1.935 & 2.581\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}2 & 3 & 4\end{array}\\ \begin{bmatrix}-j9.179 & j2.238 & j4.517\\ j2.238 & -j5.207 & j0.646\\ j4.517 & j0.646 & -j5.163\end{bmatrix}\end{array}$$

y finalmente

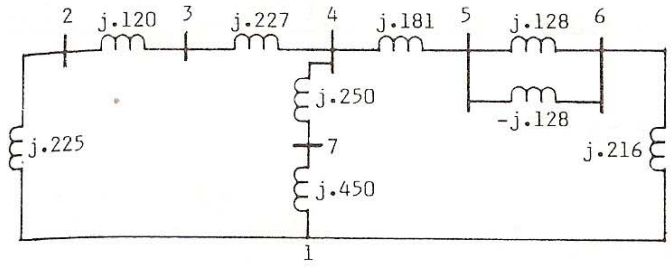
$$\underset{\sim}{Z}_n = \underset{\sim}{Y}_n^{-1} = \begin{array}{c} \\ 2\\ 3\\ 4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}2 & 3 & 4\end{array}\\ \begin{bmatrix}j.271 & j.148 & j.255\\ j.148 & j.276 & j.164\\ j.255 & j.164 & j.438\end{bmatrix}\end{array}$$

4.4. MODIFICACION DE LA MATRIZ IMPEDANCIA DE BARRA AL SACAR UN ELEMENTO DE LA RED.

Al sacar un elemento de la red la matriz impedancia de barra de todo el sistema queda modificada. Una forma de conseguir la nueva matriz es construyéndola por algoritmo sin incluir al elemento que se desea sacar. Sin embargo si no existen inductancias mutuas, una forma rápida y sencilla de modificar a la matriz para sacar al elemento en cuestión, consiste en agregar un nuevo elemento en paralelo con el que se desea sacar y considerarla como una unión con valor negativo al del elemento.

EJEMPLO 8

En el problema del Ejemplo 3 sacar al elemento 5 y conseguir la nueva matriz impedancia de barra.



p = 5 q = 6 i = 2, 3, 4, 5, 6, 7

$Z_{u2} = Z_{2u} = Z_{52} - Z_{62} = j.0508 - j.0318 = j.0190$

$Z_{u3} = Z_{3u} = Z_{53} - Z_{63} = j.0778 - j.0488 = j.0290$

$Z_{u4} = Z_{4u} = Z_{54} - Z_{64} = j.1290 - j.0809 = j.0481$

$Z_{u5} = Z_{5u} = Z_{55} - Z_{65} = j.2030 - j.1276 = j.0754$

$Z_{u6} = Z_{6u} = Z_{56} - Z_{66} = j.1276 - j.1605 = -j.0329$

$Z_{u7} = Z_{7u} = Z_{57} - Z_{67} = j.0829 - j.0520 = j.0309$

$Z_{uu} = Z_{5u} - Z_{6u} + Z_{56,56} = j.0754 - (-j.0329) - j.128$

$= -j.0197$

La matriz aumentada es

$$\begin{array}{c} \\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\\ j\\ 6\\ 7\\ \\ u\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & u\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccccccc|c}.1670 & .1359 & .0774 & .0508 & .0318 & .0498 & .0190\\ .1359 & .2085 & .1187 & .0778 & .0488 & .0763 & .0290\\ .0774 & .1187 & .1968 & .1290 & .0809 & .1265 & .0481\\ .0508 & .0778 & .1290 & .2030 & .1276 & .0829 & .0754\\ .0318 & .0488 & .0809 & .1276 & .1605 & .0520 & -.0329\\ .0498 & .0763 & .1265 & .0829 & .0520 & .2420 & .0309\\ \hline .0190 & .0290 & .0481 & .0750 & -.0329 & .0309 & -.0197\end{array}\right]\end{array}$$

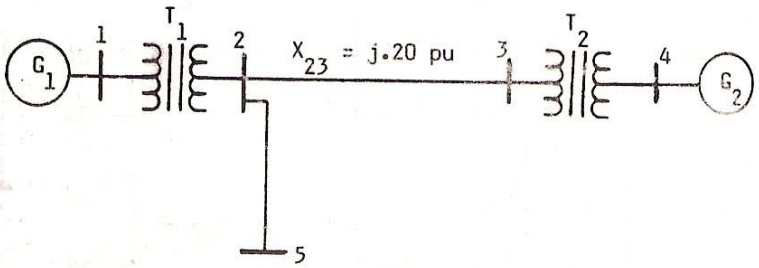
y finalmente la matriz reducida es

$$Z = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.1852 & j.1640 & j.1238 & j.1238 & 0 & j.0796 \\ j.1640 & j.2514 & j.1899 & j.1899 & 0 & j.1221 \\ j.1238 & j.1899 & j.3148 & j.3148 & 0 & j.2024 \\ j.1238 & j.1899 & j.3148 & j.4958 & 0 & j.2024 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j.2159 & 0 \\ j.0796 & j.1221 & j.2024 & j.2024 & 0 & j.2908 \end{bmatrix} \end{array}$$

EJEMPLO 9

El sistema de potencia que se indica tiene la siguiente matriz de impedancia de barra. Calcular los valores de las impedancias de cada uno de los elementos del sistema.

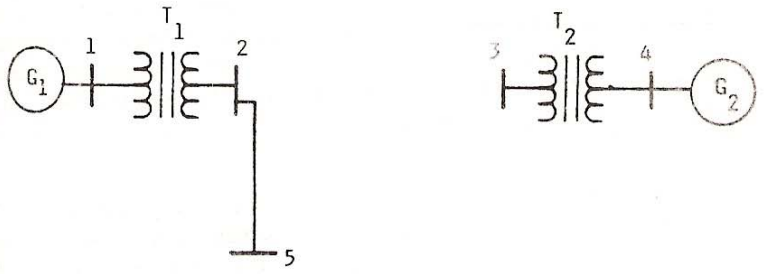
$$Z = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3\ j \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .0900 & .0750 & .0550 & .0350 & .0750 \\ .0750 & .1875 & .1375 & .0875 & .1875 \\ .0550 & .1375 & .2475 & .1575 & .1375 \\ .0350 & .0875 & .1575 & .2275 & .0875 \\ .0750 & .1875 & .1375 & .0875 & .4000 \end{bmatrix} \end{array}$$



Sacando del sistema a la línea 2-3 se tiene

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & u \\ .0900 & .0750 & .0550 & .0350 & .0750 & .0200 \\ .0750 & .1875 & .1375 & .0875 & .1875 & .0500 \\ .0550 & .1375 & .2475 & .1575 & .1375 & -.1100 \\ .0350 & .0875 & .1575 & .2275 & .0875 & -.0700 \\ .0750 & .1875 & .1375 & .0875 & .400 & .0500 \\ \hline .0200 & .0500 & -.1100 & -.0700 & .0500 & -.0400 \end{array}\right]$$

$$Z = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3\ j \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .1000 & .1000 & .0000 & .0000 & .1000 \\ .1000 & .2500 & .0000 & .0000 & .2500 \\ .0000 & .0000 & .5500 & .3500 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .3500 & .3500 & .0000 \\ .1000 & .2500 & .0000 & .0000 & .4625 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$Z_{55} = Z_{L25} + Z_{T1} + Z_{G1} = .4625$$

$$Z_{22} = Z_{T1} + Z_{G1} = .2500$$

$$Z_{11} = Z_{G1} = .1000 \text{ pu}$$

Por lo que

$$Z_{T1} = .2500 - .1000 = .1500 \text{ pu}$$

$$Z_{L25} = .4625 - .2500 = .2125 \text{ pu}$$

De igual manera

$$Z_{33} = Z_{T2} + Z_{G2} = .5500$$

$$Z_{44} = Z_{G2} = .3500 \text{ pu}$$

$$Z_{T2} = .5500 - .3500 = .2000 \text{ pu}$$

5. REDUCCION DE REDES MEDIANTE EL METODO DE PARTICION DE MATRICES.

En algunas ocasiones se desea información solamente en ciertas barras de todo el sistema de potencia. En estos casos no es necesario trabajar con todos los nodos del sistema y se puede reducir la red a una equivalente que contenga solamente los nodos de interés, quedando los otros nodos internamente en el sistema. Esto es posible si no existen fuentes de corrientes unidas a los nodos que se van a eliminar. Básicamente existen dos métodos para la reducción de nodos: 1) La transformación estrella-triángulo y 2) Partición de matrices.

El método de partición de matrices se adapta perfectamente al uso de las computadoras. En este método se ordena la ecuación que relaciona al vector corriente de nodos y al vector voltaje de nodos con la matriz admitancia de nodos, de manera tal que los nodos a eliminar tengan los últimos números y con la condición que sus corrientes inyectadas sean iguales a cero.

Se tiene por ejemplo un sistema de 5 nodos en donde se conoce la relación entre el vector corriente de nodos, vector voltaje de nodos y matriz admitancia de nodos y se desea eliminar a los nodos 4 y 5, para encontrar posteriormente la matriz admitancia de nodo para los nodos 1,2 y 3 solamente. Se tiene entonces que

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

Partiendo la ecuación alrededor de los nodos que se desean eliminar se tiene

$$\left[\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} \\ \hline Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \hline V_4 \\ V_5 \end{array}\right]$$

o también

$$\left[\begin{array}{c} \underset{\sim}{I}_A \\ \hline \underset{\sim}{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underset{\sim}{Y}_{AA} & \underset{\sim}{Y}_{AB} \\ \hline \underset{\sim}{Y}_{BA} & \underset{\sim}{Y}_{BB} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \underset{\sim}{V}_A \\ \hline \underset{\sim}{V}_B \end{array}\right]$$

en donde

$$\underset{\sim}{Y}_{AA} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{Y}_{AB} = \begin{bmatrix} Y_{14} & Y_{15} \\ Y_{24} & Y_{25} \\ Y_{34} & Y_{35} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{Y}_{BA} = \begin{bmatrix} Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{Y}_{BB} = \begin{bmatrix} Y_{44} & Y_{45} \\ Y_{54} & Y_{55} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{I}_A = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{V}_A = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{V}_B = \begin{bmatrix} V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

Desarrollando se tiene

$$\underset{\sim}{I}_A = \underset{\sim}{Y}_{AA}\,\underset{\sim}{V}_A + \underset{\sim}{Y}_{AB}\,\underset{\sim}{V}_B \qquad \underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{Y}_{BA}\,\underset{\sim}{V}_A + \underset{\sim}{Y}_{BB}\,\underset{\sim}{V}_B$$

de donde

$$\underset{\sim}{V}_B = -\,\underset{\sim}{Y}_{BB}^{-1}\,\underset{\sim}{Y}_{BA}\,\underset{\sim}{V}_A$$

e

$$\underset{\sim}{I}_A = \underset{\sim}{Y}_{AA}\,\underset{\sim}{V}_A - \underset{\sim}{Y}_{AB}\,\underset{\sim}{Y}_{BB}^{-1}\,\underset{\sim}{Y}_{BA}\,\underset{\sim}{V}_A = \left[\underset{\sim}{Y}_{AA} - \underset{\sim}{Y}_{AB}\,\underset{\sim}{Y}_{BB}^{-1}\,\underset{\sim}{Y}_{BA}\right]\underset{\sim}{V}_A$$

$$= \underset{\sim}{Y}'_{AA}\,\underset{\sim}{V}_A$$

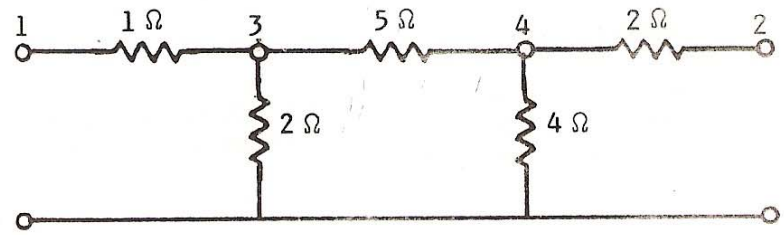
Es decir

$$\underset{\sim}{Y}'_{AA} = \underset{\sim}{Y}_{AA} - \underset{\sim}{Y}_{AB}\,\underset{\sim}{Y}_{BB}^{-1}\,\underset{\sim}{Y}_{BA} = \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} & Y'_{13} \\ Y'_{21} & Y'_{22} & Y'_{23} \\ Y'_{31} & Y'_{32} & Y'_{33} \end{bmatrix} \qquad 3.33$$

$$= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{14} & Y_{15} \\ Y_{24} & Y_{25} \\ Y_{34} & Y_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{44} & Y_{45} \\ Y_{54} & Y_{55} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 10

Reducir la siguiente red de manera de eliminar los nodos 3 y 4 y construir la red de tipo π.



La matriz admitancia de barra es

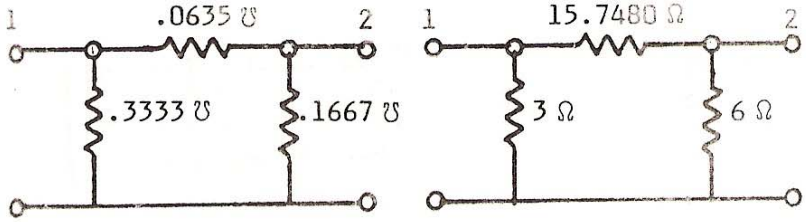
$$\underset{\sim}{Y} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & .5 & 0 & -.5 \\ \hline -1 & 0 & 1.7 & -.2 \\ 0 & -.5 & -.2 & .95 \end{array}\right] \end{array}$$

La reducción de la matriz es

$$\underset{\sim}{Y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.7 & -.2 \\ -.2 & .95 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} .3968 & -.0635 \\ -.0635 & .2302 \end{bmatrix}$$

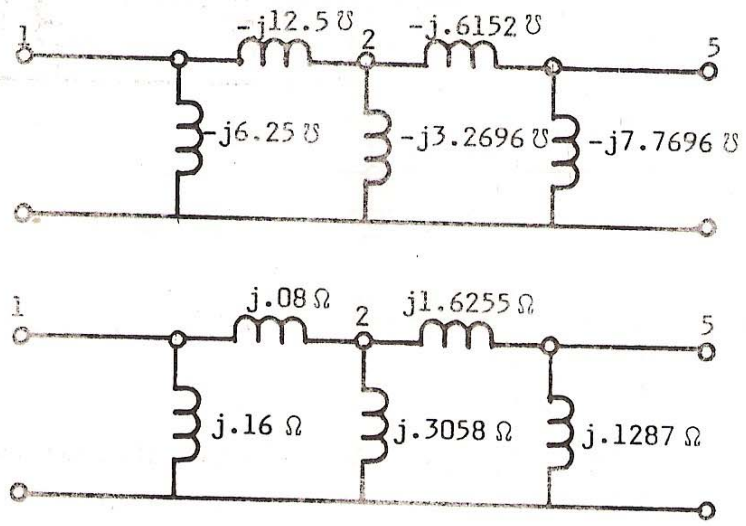
El circuito π es entonces



$$= -j \left[\begin{bmatrix} 20 & 0 & -10 \\ 0 & 9 & 0 \\ -10 & 0 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.25 & 0 & 2.5 \\ 0 & .6152 & .6152 \\ 2.5 & .6152 & 5.6152 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -j18.7500 & 0 & j12.500 \\ 0 & -j8.3842 & j0.6152 \\ j12.5000 & j0.6152 & -j16.3848 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los diagramas de admitancias e impedancias son



EJEMPLO 13

Encontrar la matriz admitancia de nodo y la matriz impedancia de nodo y construir los diagramas de admitancias e impedancias de nodo de la red del Ejemplo 1 si se eliminan los nodos 3, 4 y 5.

La matriz admitancia de nodo de la red del Ejemplo 1 es

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ -j \begin{bmatrix} 12.7778 & -8.3333 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -8.3333 & 12.7386 & -4.4053 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -4.4053 & 13.9301 & -5.5249 & 0.0 & -4.0000 \\ 0.0 & 0.0 & -5.5249 & 13.3374 & -7.8125 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -7.8125 & 12.4421 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -4.0000 & 0.0 & 0.0 & 6.2222 \end{bmatrix} \end{array}$$

Reordenando los nodos de manera que los nodos 3, 4 y 5 queden de último, se tiene

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 6 & 7 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ -j \left[\begin{array}{ccc|ccc} 12.7788 & 0.0 & 0.0 & -8.3333 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12.4421 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -7.8125 \\ 0.0 & 0.0 & 6.2222 & 0.0 & -4.0000 & 0.0 \\ \hline -8.3333 & 0.0 & 0.0 & 12.7386 & -4.4053 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -4.0000 & -4.4053 & 13.9301 & -5.5249 \\ 0.0 & -7.8125 & 0.0 & 0.0 & -5.5249 & 13.3374 \end{array}\right] \end{array}$$

La matriz admitancia de nodo para los nodos 2, 6 y 7 es

$$Y' = -j \begin{bmatrix} 12.7788 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12.4421 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 6.2222 \end{bmatrix}$$

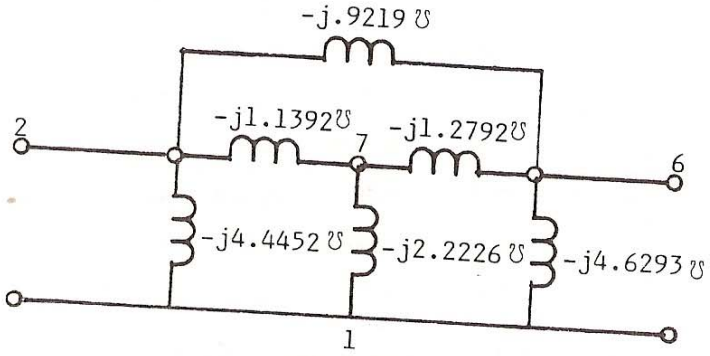
$$-j \begin{bmatrix} -8.3333 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -7.812 \\ 0.0 & -4.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12.7386 & -4.4053 & 0.0 \\ -4.4053 & 12.9301 & -5.5249 \\ 0.0 & -5.5249 & 13.3374 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -4.0 \\ 0 & -7.8 & 0.0 \end{bmatrix}$$

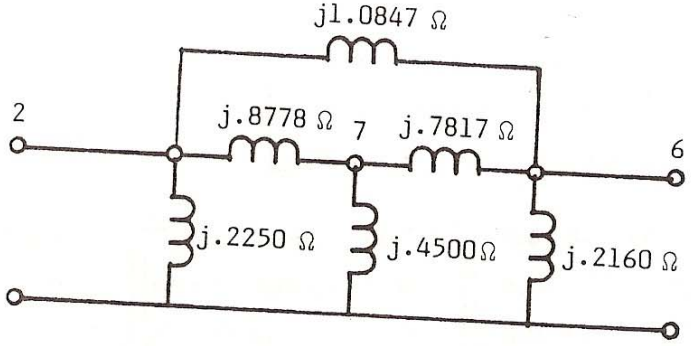
$$= \begin{array}{c} \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -j6.5063 & j.9219 & j1.1392 \\ j.9219 & -j6.8304 & j1.2792 \\ j1.1392 & j1.2792 & -j4.6410 \end{bmatrix} \end{array}$$

La matriz impedancia de nodos para los mismos nodos es

$$Z' = Y'^{-1} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.1670 & j.0318 & j.0498 \\ j.0318 & j.1605 & j.0520 \\ j.0498 & j.0520 & j.2420 \end{bmatrix} \end{array}$$

Y los diagramas de admitancias e impedancias son





6. MATRIZ IMPEDANCIA DE BARRA CON CAMBIO DE REFERENCIA

Un problema interesante es el de obtener la matriz impedancia de nodo con un nuevo nodo de referencia a partir de otra matriz impedancia de nodo con un nodo diferente de referencia. En 1939 Gabriel Kron introdujo un método relativo a transformaciones topológicas mediante el cual es posible encontrar nuevas componentes (I^2, V^2, Z^2) con un nodo de referencia cualquiera a partir de las componentes (I^1, V^1, Z^1) de otra referencia.

Sea un sistema de 4 nodos como el indicado en la figura 3.8, en donde se ha tomado el nodo 1 como referencia y en donde además se conoce la matriz impedancia de nodo Z^1, el vector voltaje, V^1, y el vector corriente, I^1, con esa referencia.

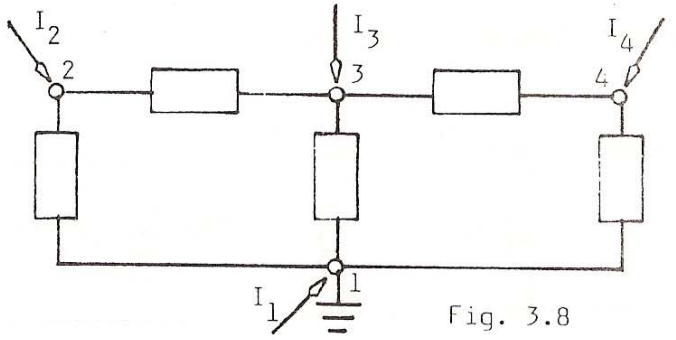


Fig. 3.8

El vector corriente de nodo y el vector voltaje de nodo con esta referencia, lo cual se llamará marco de referencia 1, son

$$\underset{\sim}{I}^1 = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}^1 \qquad \underset{\sim}{V}^1 = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}^1 \qquad 3.34$$

Además se tiene que

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

de donde

$$I_4 = - I_1 - I_2 - I_3$$

Se desea ahora encontrar las nuevas cantidades de vector corriente de nodo, vector voltaje de nodo y matriz impedancia de nodo, tomando como referencia al nodo 4, lo cual se llamará marco de referencia 2, como se indica en la figura 3.9.

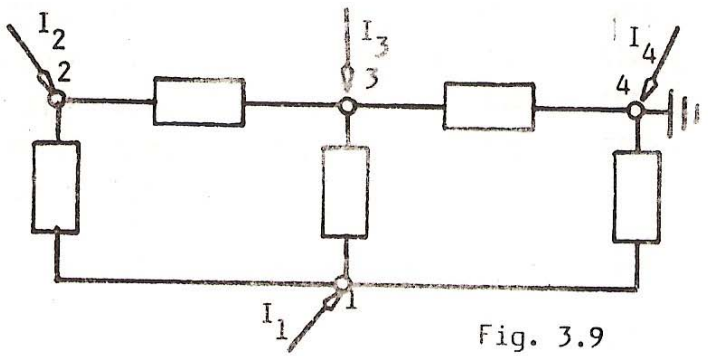


Fig. 3.9

El vector corriente de nodo y el vector voltaje de nodo en el marco de referencia 2 son

$$I^2 = \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_1 \end{bmatrix}^2 \qquad V^2 = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_1 \end{bmatrix}^2 \qquad 3.35$$

La relación entre las corrientes en los marcos de referencia 1 y 2 es entonces

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_1 \end{bmatrix}^2$$

o también

$$\underset{\sim}{I}^1 = \underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{I}^2 \qquad 3.36$$

en donde C es la matriz de conexión o la matriz que conecta a ambos marcos de referencia.

La potencia en los dos marcos de referencia debe ser invariante, por lo que

$$S = (\underset{\sim}{V}^1)^T\,\underset{\sim}{I}^{1*} = (\underset{\sim}{V}^2)^T\,\underset{\sim}{I}^{2*} = (\underset{\sim}{V}^1)^T\,(\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{I}^2)^* \qquad 3.37$$

de donde

$$(\underset{\sim}{V}^2)^T = (\underset{\sim}{V}^1)^T\,\underset{\sim}{C}^* \qquad 3.38$$

y finalmente

$$\underset{\sim}{V}^2 = \underset{\sim}{C}^{*T}\,\underset{\sim}{V}^1 \qquad 3.39$$

En este caso

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} V_2 - V_4 \\ V_3 - V_4 \\ -V_4 \end{bmatrix}^1$$

Además se tiene que

$$\underset{\sim}{V}^1 = \underset{\sim}{Z}^1\,\underset{\sim}{I}^1 = \underset{\sim}{Z}^1\,\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{I}^2 \qquad 3.40$$

Por otra parte

$$\underset{\sim}{V}^1 = (\underset{\sim}{C}^{*T})^{-1}\,\underset{\sim}{V}^2 = (\underset{\sim}{C}^{*T})^{-1}\,\underset{\sim}{Z}^2\,\underset{\sim}{I}^2$$

Igualando se tiene

$$\underset{\sim}{Z}^1\,\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{I}^2 = (\underset{\sim}{C}^{*T})^{-1}\,\underset{\sim}{Z}^2\,\underset{\sim}{I}^2 \qquad 3.41$$

de donde

$$\underset{\sim}{Z}^2 = \underset{\sim}{C}^{*T}\,\underset{\sim}{Z}^1\,\underset{\sim}{C}$$

EJEMPLO 14

Encontrar la matriz impedancia de nodo de la red del Ejemplo 1 tomando como referencia al nodo 4.

Los vectores corrientes de ambos marcos de referencia se ordenan de manera tal que los nodos de referencia reemplazados y reemplazantes queden de último.

Para encontrar la matriz de conexión se tiene que

$$(I_2)^1 = (I_2)^2 \qquad (I_3)^1 = (I_3)^2 \qquad (I_5)^1 = (I_5)^2$$

$$(I_6)^1 = (I_6)^2 \qquad (I_7)^1 = (I_7)^2$$

$$(I_4)^1 = (-I_2 - I_3 - I_5 - I_6 - I_7 - I_1)^2$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_4 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_1 \end{bmatrix}^2$$

La matriz Z^1 debe tener el mismo ordenamiento del vector corriente I^1. Así

$$\underset{\sim}{Z}^2 = \underset{\sim}{C}^{*T}\, \underset{\sim}{Z}^1\, \underset{\sim}{C} =$$

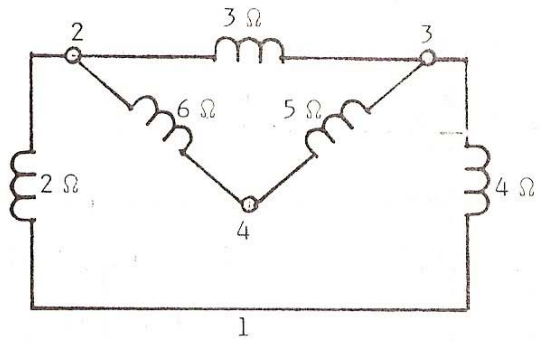
$$j\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&-1 \\ 0&1&0&0&0&-1 \\ 0&0&1&0&0&-1 \\ 0&0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&0&1&-1 \\ 0&0&0&0&0&-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .1670 & .1359 & .0508 & .0318 & .0498 & .0774 \\ .1359 & .2085 & .0778 & .0488 & .0763 & .1187 \\ .0508 & .0778 & .2030 & .1276 & .0829 & .1290 \\ .0318 & .0488 & .1276 & .1605 & .0520 & .0809 \\ .0498 & .0763 & .0829 & .0520 & .2420 & .1265 \\ .0774 & .1187 & .1290 & .0809 & .1265 & .1968 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ -1&-1&-1&-1&-1&-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} j.2090 & j.1366 & j.0412 & j.0703 & j.0427 & j.1194 \\ j.1366 & j.1679 & j.0269 & j.0460 & j.0279 & j.0781 \\ j.0412 & j.0269 & j.1418 & j.1145 & j.0242 & j.0678 \\ j.0703 & j.0460 & j.1145 & j.1955 & j.0414 & j.1159 \\ j.0427 & j.0279 & j.0242 & j.0414 & j.1858 & j.0703 \\ j.1194 & j.0781 & j.0678 & j.1159 & j.0703 & j.1968 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se observa que la matriz Z^2 queda con el ordenamiento de I^2.

PROBLEMAS

1. En la red siguiente determinar la matriz impedancia de barra usando el método de inyección de corrientes.



2. Los dados del sistema de potencia que se indica son los siguientes:

G_1: 25 MVA, 7.2 KV, X = j.10 pu

G_2: 25 MVA, 6.6 KV, X = j.10 pu

T_1: 20 MVA, 6.6 - 2.5 KV, X = j.12 pu

T_2: 30 MVA, 7.5 - 2.6 KV, X = j.12 pu

LINEA 2-3: X = j.06 Ω

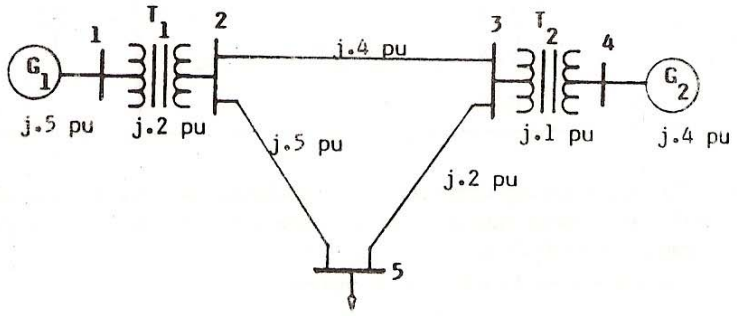


Tomando como base los valores del generador 1 en la barra 1 conseguir los valores de impedancias por unidad y construir la matriz impedancia de barra:

a) Por inyección de corrientes.
b) Por algoritmo.
c) Por $Y_n = A\, Z_e^{-1}\, A^T$, $Z_n = Y_n^{-1}$

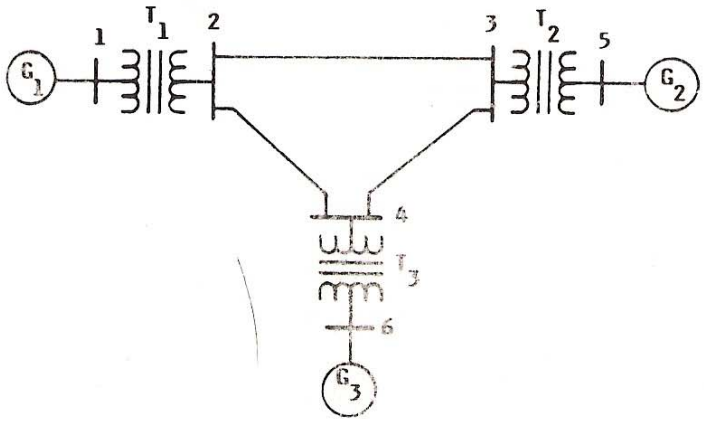
3. En la red siguiente:

a) Formar por inspección la matriz admitancia de nodo que contenga a todos los nodos.
b) A partir de la matriz anterior formar la matriz impedancia de nodo.
c) Formar la matriz admitancia de nodo que contenga a los nodos 1, 4 y 5 solamente.
d) A partir de la matriz anterior formar la matriz impedancia de nodo.
e) Con los resultados anteriores construir la red equivalente de impedancias que contenga a los nodos 1, 4 y 5 solamente.



4. Repetir la parte c del problema anterior usando las fórmulas de reducción de nodos.
5. Los datos del siguiente sistema son:

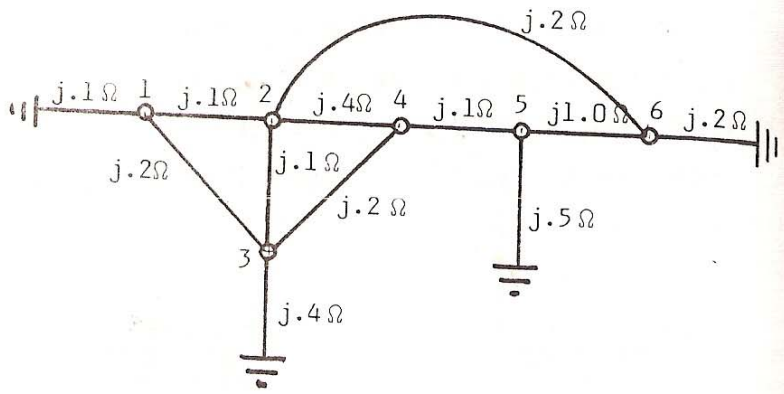
G_1: 25 MVA, 6.5 KV, X = j.10 pu.
G_2: 20 MVA, 6.6 KV, X = j.08 pu.
G_3: 25 MVA, 6.5 KV, X = j.12 pu.
T_1: 30 MVA, 7.2 - 2.5 KV, X = j.10 pu.
T_2: 20 MVA, 7.5 - 2.4 KV, X = j.05 pu.
T_3: 25 MVA, 6.2 - 2.2 KV, X = j.05 pu
LINEA 2-3: X = j.07 Ω LINEA 3-4: X = j.1 Ω
LINEA 2-4 X = j.05 Ω



Tomando como base a 20 MVA, 6.5 KV en el generador 1:

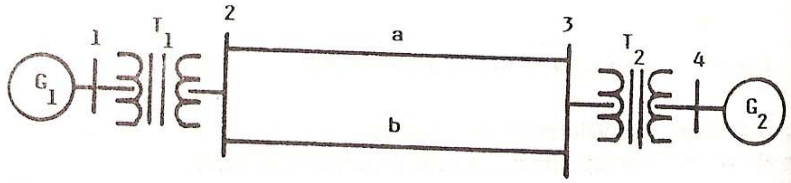
a) Conseguir los valores de impedancias en por unidad
b) Construir por algoritmo la matriz impedancia de barra.
c) A partir de la matriz anterior construir la matriz impedancia de barra si la línea 3-4 sale del sistema.
d) Construir la matriz impedancia de barra si la línea 3-4 tiene una reactancia mutua con la línea 3-2 de j.02Ω.
e) Construir la matriz impedancia de barra de la parte anterior incluyendo las barras 2, 3, 4 y 5 solamente.
f) A partir del resultado de la parte (b) construir la matriz impedancia de barra si se toma a la barra 3 como referencia.

6. A partir de la siguiente red y usando técnicas matriciales de la fórmula de reducción de nodos, construir la red de impedancias eliminando a los nodos 2 y 6.



7. Los datos del siguiente sistema son:

$G_1 = G_2$: 20 MVA, 7.2 KV, X = j.10 pu.
T_1: 20 MVA, 6.5 - 2.4 KV, X = j.10 pu
T_2: 15 MVA, 7.2 - 2.5 KV, X = j.10 pu
LINEA 2-3 (a): X = j.05Ω LINEA 2-3 (b): X = j.07Ω
REACTANCIA MUTUA ENTRE LINEAS 2-3 (a) y (b) = j.01Ω

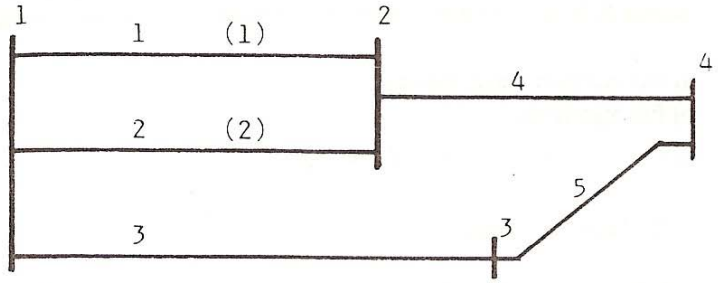


Seleccionando como base los valores de 2.0 KA y 7.2 KV en la barra 1:

a) Construir el diagrama de impedancias en valores por unidad.
b) Construir la matriz impedancia de barra por algoritmo.
c) A partir de la matriz anterior construir la matriz impedancia de barra si el transformador T_2 se substituye por otro de 25 MVA, 7.5 – 2.4 KV X = .10 pu.

8. Obtener la matriz impedancia de barra de la siguiente red:

a) Por algoritmo.
b) Por $Y_n = A\, Z_e^{-1}\, A^T$ $\qquad Z_n = Y_n^{-1}$



Los valores de las impedancias son

	INDUCTANCIA PROPIA		INDUCTANCIA MUTUA	
ELEMENTO	NODOS	IMPEDANCIA	NODOS	IMPEDANCIA
1	1-2(1)	.8	1-2(2)	.3
2	1-2(2)	.9		
3	1-3	.5	1-2(2)	.2
4	2-4	.4	1-2(1)	.1
5	3-4	.6		

9. Construir por algoritmo la matriz impedancia de barra del Problema 3 si existen reactancias mutuas entre las líneas 2-3 y 2-5 de j.2 pu y entre las líneas 2-5 y 3-5 de j.1 pu.

10. Repetir el problema anterior formando

$$Y_n = A\, Z_e^{-1}\, A^T \quad \text{y} \quad Z_n = Y_n^{-1}$$

CAPITULO IV

CONCEPTOS DEL CONTROL DE VOLTAJE Y DEL FLUJO DE POTENCIA REACTIVA

1. INTRODUCCION

En esta parte se estudiará la forma de controlar la magnitud del voltaje en las diferentes barras de un sistema de potencia. Se asumirá que el sistema es estático con impedancias de carga suficientemente grandes que se puedan omitir.

Los métodos utilizados para controlar la magnitud de los voltajes que se analizarán son los siguientes:

1) Colocación de condensadores en barras.
2) Modificación del cambiador de toma (taps) de los transformadores.
3) Variación de la excitación de los generadores.

Se estudiará primero cada uno de estos métodos en detalles en sistemas simples y luego se extenderá la idea a sistemas más complicados. Cada uno de estos métodos inyecta potencia reactiva a las barras, con lo que se controla la magnitud del voltaje.

Antes de entrar a considerar estos métodos es necesario hacer una consideración general en donde se relacione la magnitud de los voltajes de las barras con los flujos de potencia reactiva. Esta consideración general es luego aplicable a cada una de las situaciones particulares.

Sea la red de la figura 4.1 formada por varias cargas y 2 fuentes de voltaje, E_1 y E_2, los cuales por simplicidad estarán en fase, siendo E_1 mayor que E_2. Al eliminar las cargas según lo convenido, el sistema se reduce a la figura 4.2, en donde

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

$$\Delta E = E_1 - E_2$$

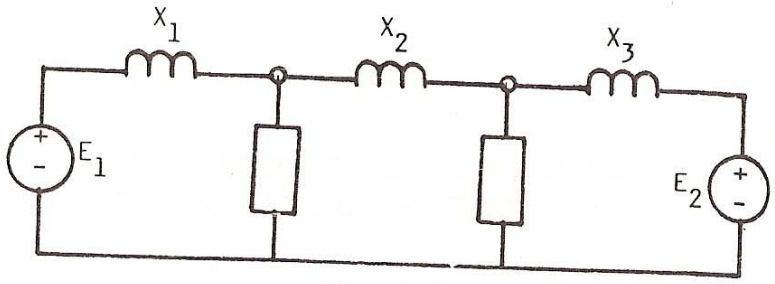


Fig. 4.1

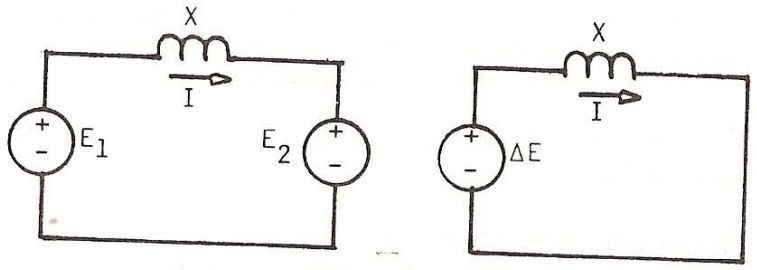


Fig. 4.2

El diagrama vectorial de voltajes y corrientes es el que se muestra en la figura 4.3.

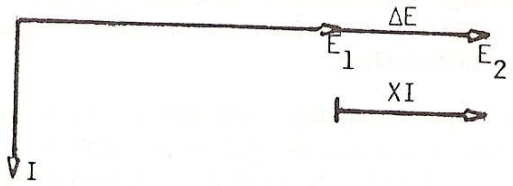


Fig. 4.3

De este diagrama se obtiene la siguiente expresión aritmética

$$\Delta E = XI \qquad \text{ó} \qquad I = \frac{\Delta E}{X}$$

El flujo de potencia reactiva va desde el generador 1 al generador 2, siendo su valor

$$Q = |E_1||I| = \frac{|E_1||\Delta E|}{X} \qquad 4.1$$

y en valores por unidad, con $E_1 = 1.0$ pu.

$$Q = \frac{|\Delta E|}{X} \qquad 4.2$$

Como los valores de E_1 y E_2 están en fase y no hay elementos resistivos entre ellos, no existe flujo de potencia activa entre ambos. Si estos voltajes estuviesen desfasados, las expresiones anteriores serían todavía válidas pero vectoriales.

2. CAMBIO DE VOLTAJE EN TERMINALES DEBIDO A COLOCACION DE CONDENSADORES EN UN SISTEMA SIMPLE.

Sea un generador en vacío como el indicado en la figura 4.4 en donde E es el voltaje generado internamente, V es el voltaje en terminales y R y X la resistencia y reactancia interna del generador.

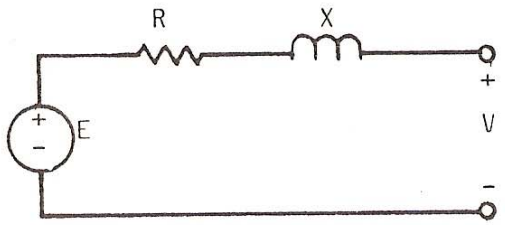


Fig. 4.4

En vacío el voltaje en terminales V, es igual al voltaje generado E, tal como se expresa vectorialmente en la figura 4.5.



Fig. 4.5

Si en los terminales del generador se coloca ahora un condensador como se muestra en la figura 4.6, el voltaje V variará de acuerdo a la siguiente expresión

$$E = V + RI + jXI$$

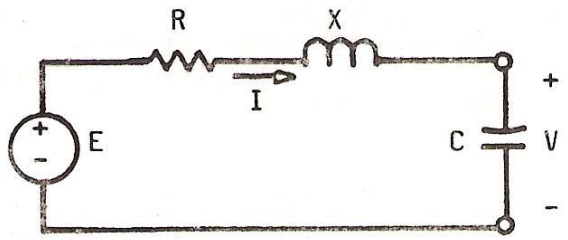


Fig. 4.6

El diagrama fasorial se muestra en la figura 4.7

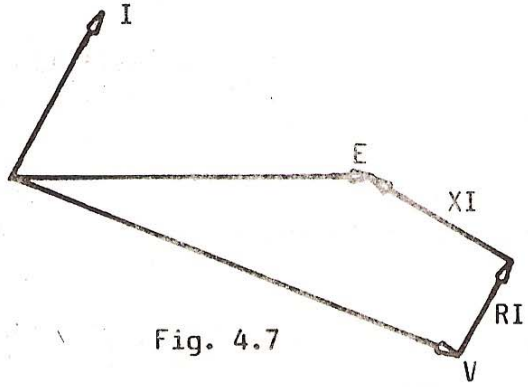


Fig. 4.7

Si se desprecia la resistencia R del generador se obtiene

$$E = V + jXI$$

y el diagrama vectorial es el que se muestra en la figura 4.8.

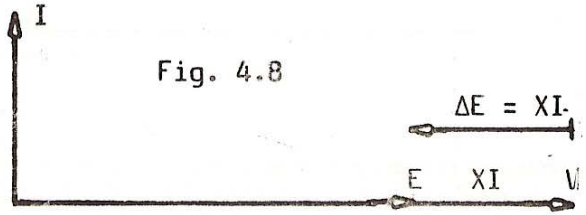


Fig. 4.8

Se observa que el voltaje V ha variado su magnitud en la cantidad ΔE desde E hasta $E + \Delta E = E + XI$, por lo que

$$\Delta E = XI \qquad 4.3$$

Además

$$|I| = \frac{|V|}{X_c} = C\omega|V| \qquad 4.4$$

ó

$$\Delta E = X C \omega |V| \qquad 4.5$$

es decir, la variación de la magnitud del voltaje es directamente proporcional a la capacitancia C del condensador.

EJEMPLO 1

A un generador de 100 KVA, 4160 V, X = .2 pu, 60 Hz, se le coloca en sus terminales un condensador de 10 μF en cada fase. Calcular

a) La variación de voltaje en terminales.
b) La potencia reactiva inyectada por los condensadores.

Tomando como base los valores nominales del generador:

$$S_b = 100 \text{ KVA} = 1.0 \text{ pu}, \qquad V_b = 4160 \text{ V} = 1.0 \text{ pu}.$$

$$I_b = \frac{100}{\sqrt{3} \times 4.16} = 13.8786 \text{ amperios}$$

$$Z_b = \frac{(V_b)^2}{S_b} = \frac{(4.16)^2}{.1} = 173.0560 \text{ ohmios}$$

a)

$$X_c = \frac{1}{C\omega} = \frac{10^6}{2\pi \times 10 \times 60} = 265.2582\ \Omega = 1.5327 \text{ pu}$$

$$|I| = \frac{|V|}{X_C} = \frac{1.0}{1.5327} = .6524 \text{ pu} = 9.0544 \text{ amperios}$$

$$\Delta E = X\,|I| = .2 \times .6524 = .13048 \text{ pu} = 542.7968 \text{ V}$$

b)

$$Q = |V|\,|I|' = \frac{|V|^2}{X_C} = \frac{(1.0)^2}{1.5327} = .6524 \text{ pu} = 65240 \text{ vars}$$

o también

$$Q = \frac{\Delta E}{X} = \frac{.13048}{.2} = .6524 \text{ pu} = 65240 \text{ vars}$$

3. VARIACION DEL VOLTAJE EN TERMINALES DEBIDO AL AJUSTE DEL CAMBIADOR DE TOMA DE UN TRANSFORMADOR.

Sea un sistema simple formado por un generador, un transformador y una carga, tal como se muestra en la figura 4.9.

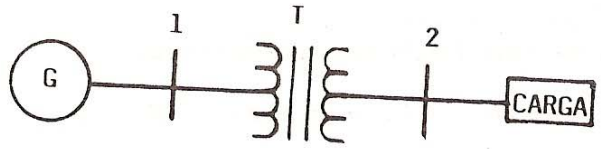


Fig. 4.9

El diagrama circuital se muestra en la figura 4.10.

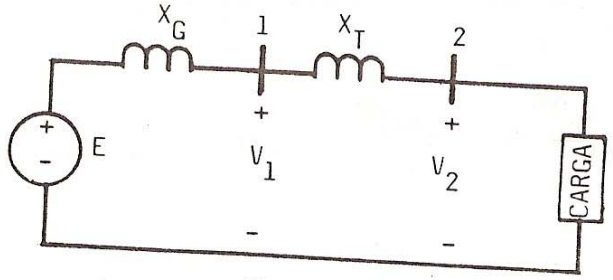


Fig. 4.10

Si se cambia la relación de vueltas del transformador, sencillamente cambia la magnitud del voltaje V_2. Si ahora se colocan dos transformadores en paralelo con idéntica relación de transformación, como lo indica la figura 4.11, la corriente de carga I_L se reparte en I_1 en I_2 de acuerdo a las impedancias de los transformadores. Si esas impedancias son iguales, I_1 e I_2 serán iguales y exactamente igual a la mitad de I_L. Estando los transformadores en paralelo, los voltajes V_{12} en ellos son exactamente los mismos.

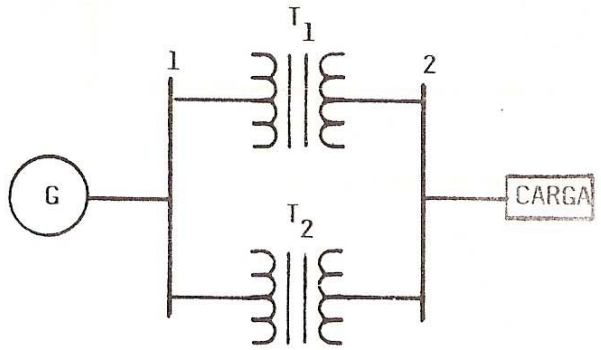


Fig. 4.11

El diagrama circuital se muestra en la figura 4.12

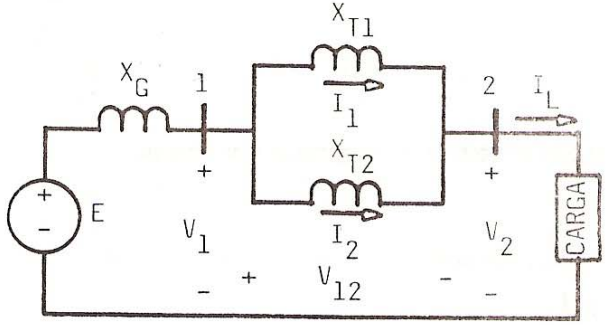


Fig. 4.12

EJEMPLO 2

Un sistema está formado por un generador de 100 KVA, 3F, 4160 V, X = j.5 pu; dos transformadores iguales de 4160 Y – 600 Δ V, 100 KVA,

X_T = j.12 pu, con relación de transformación nominal, los cuales alimentan a una carga de 600 V, 80 KVA, con factor de potencia en .8 en atraso. Considerando el voltaje nominal en la carga, calcular:

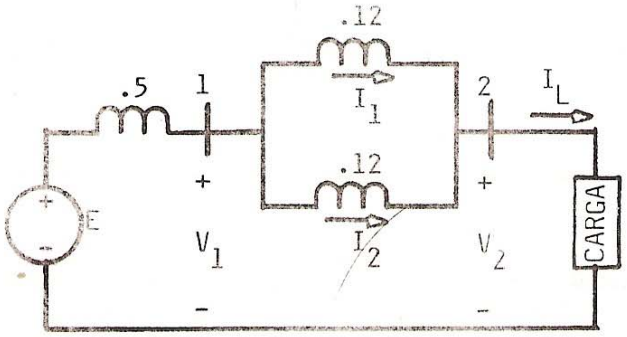
a) La corriente de cada transformador.
b) El voltaje en los terminales del generador.
c) La potencia transferida por cada transformador.

Se toma como base en la carga:

$S_b = 100$ KVA, $\quad V_b = 600$ V

por lo que

$$I_b = \frac{100}{\sqrt{3} \times .6} = 96.225 \text{ amperios}$$



Entonces

$$I_L = \frac{80}{\sqrt{3} \times .6} \underline{|-36.87^\circ} = 76.980\underline{|-36.87^\circ} \text{ Amperios}$$

$$= .80\underline{|-36.87^\circ} \text{ pu} = .64 - j.48 \text{ pu}$$

1)

$$I_1 = I_2 = I_L/2 = .32 - j.24 \text{ pu} = .40\underline{|-36.87^\circ} \text{ pu}$$

$$= 38.490\underline{|-36.87^\circ} \text{ Amperios}$$

2)

$$V_1 = V_2 + jX_T I_1 = 1.0 + j.12(.32 - j.24)$$

$$= 1.0295\underline{|2.14^\circ} \text{ pu} = 4282.72\underline{|2.14^\circ} \text{ Voltios}$$

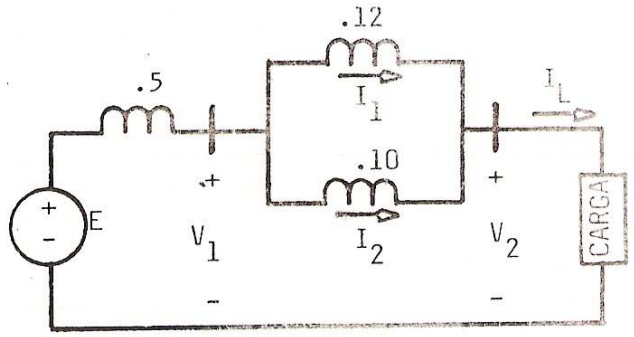
3)

$$S_1 = S_2 = V_1 I_1^* = V_1 I_2^* = 1.0295\underline{|2.14^\circ} \times .40\underline{|36.87^\circ}$$

$$= .4118\underline{|39^\circ} = .32 + j.2592 \text{ pu} = 41.18\underline{|39^\circ} \text{ KVA}$$

EJEMPLO 3

Repetir el Ejemplo 2 si uno de los transformadores tiene una reactancia de $X_{T_1} = .12$ pu y el otro una de $X_{T_2} = .10$ pu.



1)

$$I_L = .64 - j.48 = .80\underline{|-36.87^\circ} \text{ pu}$$

Por divisor de corrientes

$$I_1 = \frac{.10 \times .80\underline{|-36.87^\circ}}{.22} = .3636\underline{|-36.87^\circ} \text{ pu}$$

$$= .2909 - j.2181 \text{ pu} = 34.9874\underline{|-36.87^\circ} \text{ Amperios}$$

$$I_2 = \frac{.12 \times .80\angle -36.87^\circ}{.22} = .4364\angle -36.87^\circ \text{ pu}$$

$$= .3491 - j.2619 \text{ pu} = 41.9926\angle -36.87^\circ \text{ Amperios}$$

2)

$$V_1 = V_2 + jX_{T1}I_1 = V_2 + jX_{T2}I_2 = 1.0 + .12\angle 90^\circ \times .3636\angle -36.87^\circ$$

$$= 1.0268\angle 1.95^\circ = 1.0262 + j.0349 \text{ pu} = 4271.5\angle 1.95^\circ \text{ V}$$

3)

$$S_1 = V_1 I_1^* = 1.0268\angle 1.95^\circ \times .3636\angle 36.87^\circ$$

$$= .2909 + j.2339 \text{ pu} = .3733\angle 38.82^\circ \text{ pu}$$

$$= 37.33\angle 38.82^\circ \text{ KVA}$$

$$S_2 = V_1 I_2^* = 1.0268\angle 1.95^\circ \times .4364\angle 36.87^\circ$$

$$= .3491 + j.2808 \text{ pu} = .4481\angle 38.82^\circ \text{ pu}$$

$$= 44.81\angle 38.82^\circ \text{ KVA}$$

Se observa que las potencias activas y reactivas que maneja cada transformador son diferentes entre sí, siendo la mayor potencia reactiva la de aquel transformador que tiene menor impedancia.

Si a uno de estos transformadores se le varía el cambiador de toma, su modelo no puede ser el de una simple bobina como en los casos anteriores. Existen dos maneras de tratar esta situación. Una de ellas es a través del modelo π estudiado en capítulos anteriores, el cual por conveniencia se repite en la figura 4.13

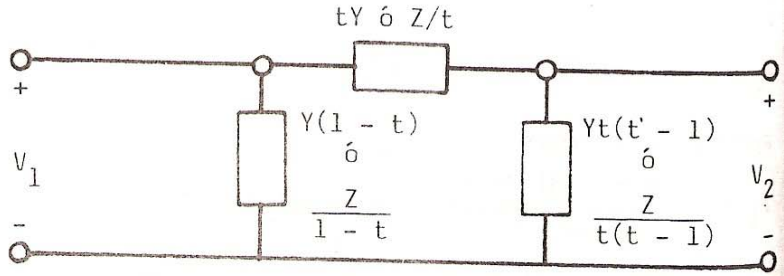


Fig. 4.13

siendo $t = E_1/E_2$ en valores por unidad.

La otra forma se describe a continuación. Si se varía el cambiador de toma del transformador T_1, por ejemplo, su relación E_1/E_2 será diferente a la del transformador T_2. Sin embargo, los voltajes V_{12} en ambos transformadores son iguales. Esta situación puede modelarse en la forma como se indica en la figura 4.14.

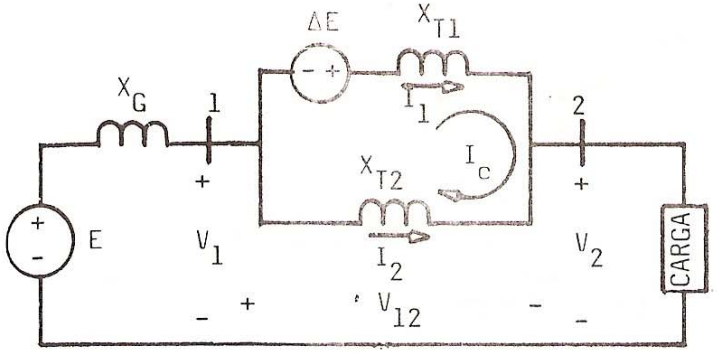


Fig. 4.14

Siendo ΔE el incremento de voltaje generado en el transformador T_1, hacia la barra 2 debido a la variación del cambiador de toma en el transformador T_1. La polaridad del incremento de voltaje ΔE cambiará si el incremento de voltaje generado en el transformador T_1, es hacia la barra 1. Este incremento de voltaje generado produce una corriente interna circulante, I_c, entre los dos transformadores, aún sin carga, que tiene efectos diferentes sobre las corrientes I_1 e I_2. En la figura 4.14 se tiene

$$I_{1T} = I_1 + I_c \qquad 4.6$$

$$I_{2T} = I_2 - I_c \qquad 4.7$$

siendo

$$I_c = \frac{\Delta E}{X_{T1} + X_{T2}} \qquad 4.8$$

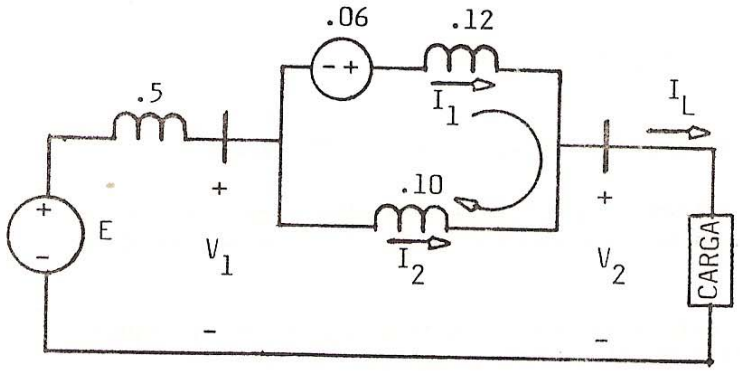
calculada sin la carga.

El problema se reduce entonces a calcular la corriente circulante I_c, superponerla a las corrientes I_1 e I_2 y efectuar los cálculos en la manera acostumbrada.

EJEMPLO 4

En el sistema del Ejemplo 3 al transformador T1 se le varía la relación de transformación fuera de la nominal de manera de producir un incremento de voltaje generado de .06 pu en ese transformador hacia la barra 2. Calcular:

a) La corriente circulante I_c.
b) La corriente total en cada transformador.
c) El voltaje V_2 en la carga.
d) La potencia transferida por cada transformador.



Del Ejemplo 3 se tiene:

$$I_L = .64 - j.48 = .80\angle -36.87^\circ \text{ pu}$$

$$I_1 = .2909 - j.2181 = .3636\angle -36.87^\circ \text{ pu}$$

$$I_2 = .3491 - j.2619 = .4364\angle -36.87^\circ \text{ pu}$$

$$V_1 = 1.0268\angle 1.95^\circ \text{ pu}$$

Considerando que la impedancia de la carga es muy grande comparada con la de los transformadores y que se desea mantener constante al voltaje V_1, se tiene

$$I_c = \frac{\Delta E}{X_{T1} + X_{T2}} = \frac{.06}{j.12 + j.10} = -j.2727 \text{ pu.}$$

La corriente en los transformadores es entonces:

$$I_{1\,Total} = I_1 + I_c = .2909 - j.2181 - j.2727$$

$$= .2909 - j.4908 = .5705\angle -59.35^\circ \text{ pu}$$

$$I_{2\,Total} = I_2 - I_c = .3491 - j.2619 + j.2727$$

$$= .3491 + j.0108 = .3493\angle 1.77^\circ \text{ pu}$$

El voltaje en la barra 2 es

$$V_2 = V_1 + \Delta E - jI_{1\,Total}X_{T1} = 1.0268\angle 1.95^\circ + .06\angle 0^\circ$$

$$- .5705\angle -59.35^\circ \times .12\angle 90^\circ = 1.0273\angle 0^\circ \text{ pu} = 616.38 \text{ V}$$

o también

$$V_2 = V_1 - jI_{2\,Total}X_{T2} = 1.0268\angle 1.95^\circ - .3493\angle 1.77^\circ \times .10\angle 90$$

$$= 1.0273\angle 0^\circ \text{ pu} = 616.38 \text{ voltios}$$

La potencia transferida por cada transformador es

$$S_1 = V_1 I_{1\,Total}^* = 1.0268\angle 1.95^\circ \times .5705\angle 59.35^\circ$$

$$= .5868\angle 61.3^\circ = .2819 + j.5147 \text{ pu}$$

$$S_2 = V_1 I_{2\,Total}^* = 1.0268\angle 1.95^\circ \times .3493\angle -1.77^\circ$$

$$= .3587\angle .18^\circ = .3587 + j.0011 \text{ pu}$$

Se observa en el ejemplo anterior que casi toda la potencia reactiva que se transmite a la carga es hecha por el transformador T_1, al cual se le varió la relación de transformación; mientras que los flujos de potencia activa permanecen casi en la misma proporción. Se observa también el aumento del voltaje V_2. En la solución se ha considerado que la corriente de la carga permanece constante a pesar del incremento del voltaje en V_2.

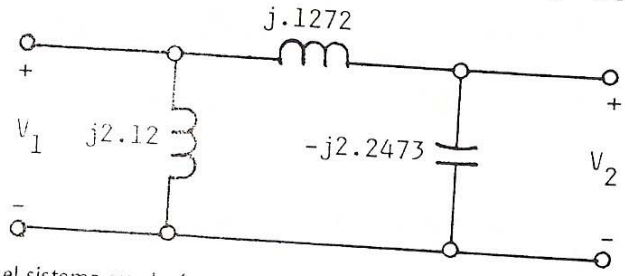
Se puede también calcular la corriente circulante I_c por medio del circuito π del transformador con relación de transformación fuera de la nominal y luego repetir el procedimiento anterior.

EJEMPLO 5

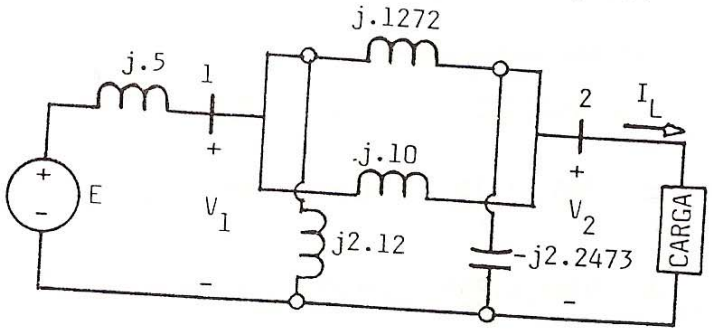
Repetir el Ejemplo 4 usando el modelo π en el transformador T_1.

$$t_1 = \left[\frac{E_1}{E_2}\right]_{T_1} = \frac{1}{1.060} = .9434$$

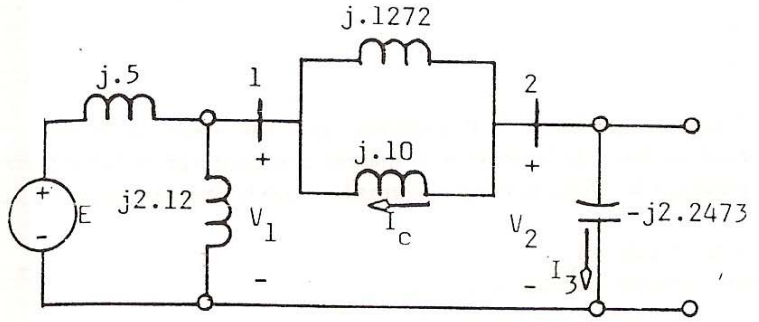
Usando este valor de t y X = .12 en el modelo de la figura 4.13, se obtiene el modelo π del transformador T_1, el cual se muestra en la figura siguiente.



Y todo el sistema quedará como se muestra en la figura siguiente.



Para calcular la corriente circulante I_c se ignora la impedancia de carga, como en el caso anterior, y la red se reduce a la indicada en la figura siguiente.



$$I_3 = \frac{V_1}{Z} = 1.0268\angle 1.95^\circ / (-j2.2473 + j.1272 \times .1/.2272)$$

$$= .4686\angle 91.95^\circ \text{ pu}$$

$$I_c = -.4686\angle 91.95^\circ \times .1272/.2272 \simeq -j.2623$$

Comparada con –j.2727 calculada por el método anterior. Los cálculos de las corrientes totales, voltajes y potencias se hacen en la misma forma anterior.

4. VARIACION DEL VOLTAJE EN TERMINALES DEBIDO AL CAMBIO EN LA EXCITACION DE LOS GENERADORES.

Otra forma eficaz de controlar el flujo de potencia reactiva en un sistema de potencias y por lo tanto la magnitud de los voltajes en las barras, es por medio de la excitación de los generadores.

Ignorándose la saturación en el circuito magnético del generador, la relación entre el voltaje generado y la corriente de excitación es directamente proporcional, es decir

$$E = kI_f \qquad 4.9$$

Sea el generador de la figura 4.15 suministrando energía a una carga constante.



Fig. 4.15

El diagrama circuital se muestra en la figura 4.16 y el diagrama vectorial se muestra en la figura 4.17.

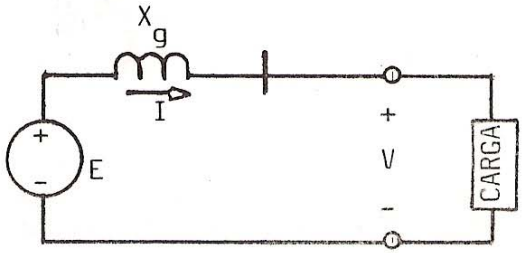


Fig. 4.16

Al aumentar la corriente de excitación I_f aumenta también el voltaje generado E hasta E', de igual forma aumenta el voltaje en terminales V hasta V', la corriente I hasta I', la potencia activa P y la potencia reactiva Q, tal como se muestra en el diagrama vectorial de la figura 4.17. En todo caso

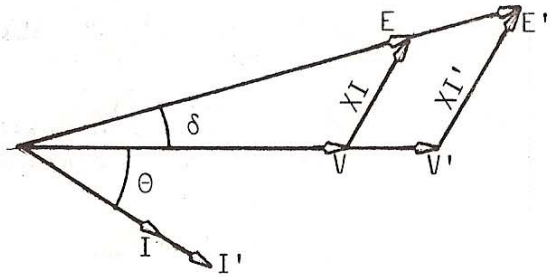


Fig. 4.17

$$\Delta E = E - V = XI$$

por lo que

$$I = \frac{\Delta E}{X}$$

Si el generador está conectado a una barra de voltaje constante V, un cambio en la corriente de excitación producirá un cambio en la magnitud y ángulo del voltaje generado y en la magnitud y ángulo de la corriente, afectando así al flujo de potencia reactiva; pero no al voltaje V ni al flujo de potencia activa.

Si la potencia P aplicada al generador es constante y todas las pérdidas internas son nulas, al aumentar la excitación el voltaje generado E también aumenta, pero como V, P y X son constantes, Esenδ e Icosθ serán también constantes y por lo tanto E se mueve sobre una línea horizontal separada de la abscisa en la distancia Esenδ, mientras que I se mueve al mismo tiempo sobre una línea vertical separada de la ordenada en la distancia Icosθ, tal como se indica en la figura 4.18. Así que al aumentar la excitación aumenta la magnitud y el ángulo de I sin variar Icosθ, lo que hace que aumente la potencia reactiva Q = VIsenθ que el generador transfiere al sistema.

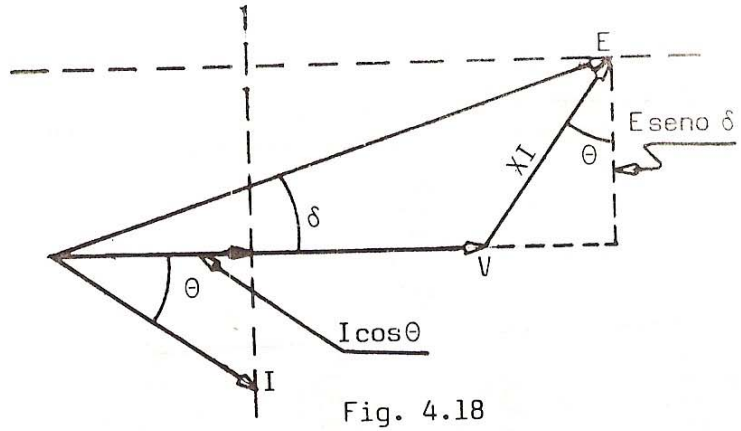


Fig. 4.18

De la figura 4.18 se observa que

$$P = |V||I|\cos\Theta = \frac{|V||E|}{X} \text{ seno } \delta \qquad 4.10$$

Se extenderán ahora las ideas anteriores a sistemas más complejos. Se recordará que la variación de voltaje en una red simple con un solo generador es $\Delta E = XI$. Si se tienen varios generadores conectados en la forma como indica la figura 4.19, es obvio que la variación de voltaje en cada terminal es

$$\Delta V_1 = Z_1 I_1 \qquad \Delta V_2 = Z_2 I_2 \qquad \Delta V_3 = Z_3 I_3 \qquad \Delta V_4 = Z_4 I_4$$

Esta variación será incremento o decremento de acuerdo a las características de la corriente I.

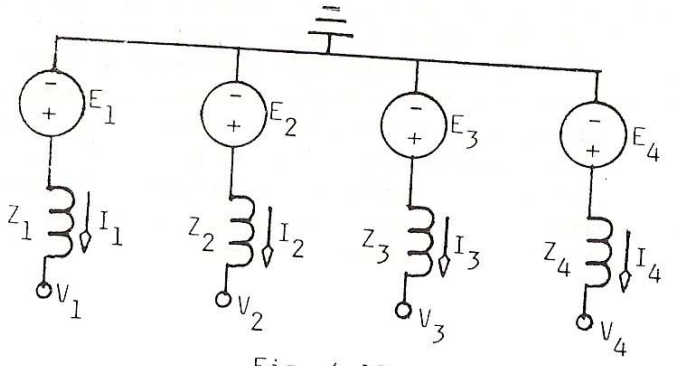


Fig. 4.19

Si los generadores tuviesen el mismo voltaje generado E, el circuito anterior quedaría en la forma como se indica en la figura 4.20.

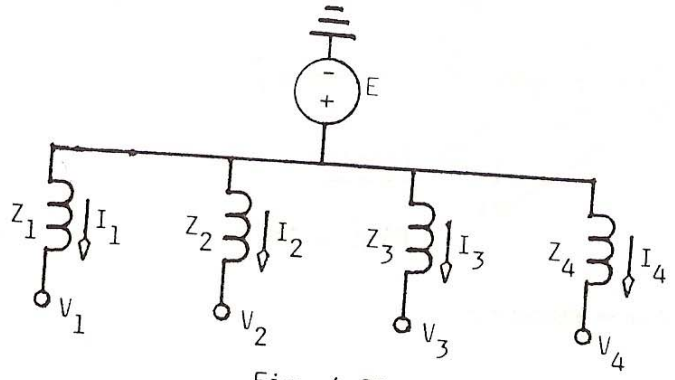


Fig. 4.20

En un sistema de potencia se tiene una situación muy similar, modelándose el sistema con el equivalente de rastrillo de la figura 4.21.

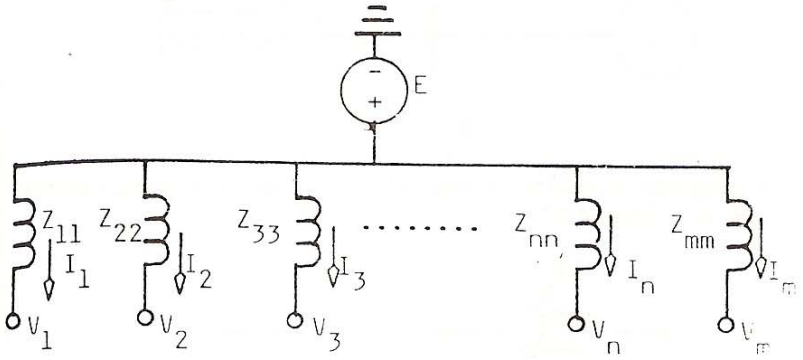


Fig. 4.21

$Z_{11}, Z_{22}, Z_{33}, \ldots Z_{nn}$ y Z_{mm} son los valores de la diagonal de la matriz impedancia de barra. No aparecen los valores fuera de la diagonal de la matriz Z para no complicar el dibujo, pero hay que tomarlas en cuenta en cada uno de los cálculos. La matriz impedancia de barra Z incluye las impedancias a tierra de los generadores, así como también todas las demás impedancias del sistema, excluyendo por supuesto las impedancias de las cargas. Por ser Z una matriz simétrica, los valores fuera de la diagonal principal $Z_{nm} = Z_{mn}$. Las variaciones de voltajes en las barras son entonces

$$\Delta V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + Z_{13} I_3 + \ldots\ldots + Z_{1m} I_m$$

$$\Delta V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + Z_{23} I_3 + \ldots\ldots + Z_{2m} I_m$$

$$\Delta V_3 = Z_{31} I_1 + Z_{32} I_2 + Z_{33} I_3 + \ldots\ldots + Z_{3m} I_m$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ldots\ldots \qquad \vdots$$

$$\Delta V_m = Z_{m1} I_1 + Z_{m2} I_2 + Z_{m3} I_3 + \ldots\ldots + Z_{mm} I_m$$

En forma matricial

$$\underset{\sim}{\Delta V} = \underset{\sim}{Z}\ \underset{\sim}{I} \qquad 4.11$$

en donde $\Delta\underset{\sim}{V}$ es el vector variación de voltaje, $\underset{\sim}{Z}$ la matriz impedancia de barra e $\underset{\sim}{I}$ el vector corriente de nodos.

5. VARIACION DE VOLTAJES EN TERMINALES DE UN SISTEMA DEBIDO A COLOCACION DE CONDENSADORES EN ELLOS

Sea un sistema de cuatro barras al cual se le coloca un condensador en la barra 1. El circuito de rastrillo equivalente se muestra en la figura 4.22.

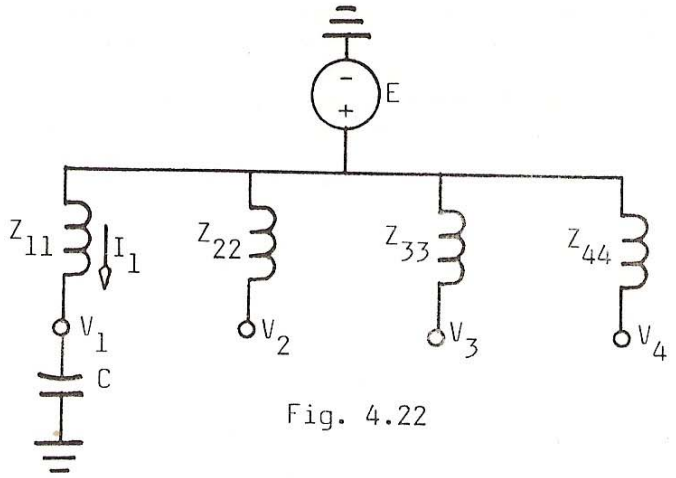


Fig. 4.22

La corriente I_1 es

$$|I_1| = \frac{|V_1|}{X_{C1}}$$

y la variación de voltaje en todas las barras es

$$\Delta V_1 = Z_{11}I_1 \quad \Delta V_2 = Z_{21}I_1 \quad \Delta V_3 = Z_{31}I_1 \quad \Delta V_4 = Z_{41}I_1$$

Si además se coloca otro condensador en la barra 3, se tiene que

$$|I_3| = \frac{|V_3|}{X_{C3}}$$

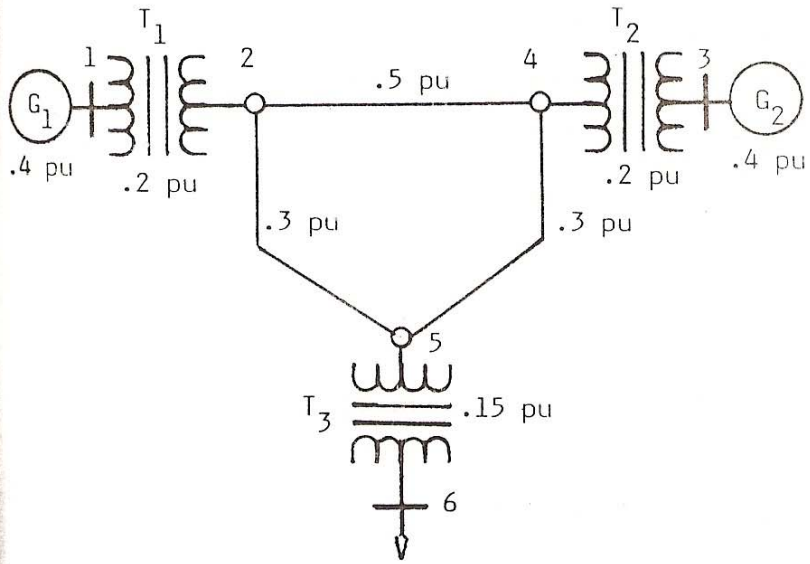
y la variación de voltaje en todas las barras es

$$\Delta V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{13}I_3 \qquad \Delta V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{23}I_3$$

$$\Delta V_3 = Z_{31}I_1 + Z_{33}I_3 \qquad \Delta V_4 = Z_{41}I_1 + Z_{43}I_3$$

EJEMPLO 6

En el sistema de la figura siguiente, calcular el cambio de voltaje en todas las barras si en la barra 3 se coloca un condensador de $X_C = 5.0$ pu.



La matriz impedancia de barra es

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} j.291 & j.237 & j.109 & j.163 & j.200 & j.200 \\ j.237 & j.355 & j.163 & j.245 & j.300 & j.300 \\ j.109 & j.163 & j.291 & j.237 & j.200 & j.200 \\ j.163 & j.245 & j.237 & j.355 & j.300 & j.300 \\ j.200 & j.300 & j.200 & j.300 & j.450 & j.450 \\ j.200 & j.300 & j.200 & j.300 & j.450 & j.600 \end{bmatrix} \end{array}$$

por lo que

$$|I_3| = \frac{|V_3|}{X_C} = \frac{1.0}{5.0} = .2 \text{ pu}$$

y

$$\Delta V_1 = Z_{13}I_3 = .109 \times .2 = .022 \text{ pu}$$
$$\Delta V_2 = Z_{23}I_3 = .163 \times .2 = .033 \text{ pu}$$
$$\Delta V_3 = Z_{33}I_3 = .291 \times .2 = .058 \text{ pu}$$
$$\Delta V_4 = Z_{43}I_3 = .237 \times .2 = .047 \text{ pu}$$
$$\Delta V_5 = Z_{53}I_3 = .200 \times .2 = .040 \text{ pu}$$
$$\Delta V_6 = Z_{63}I_3 = .200 \times .2 = .040 \text{ pu}$$

EJEMPLO 7

Repetir el Ejemplo 6 si en las barras 4 y 5 se colocan condensadores de X_C = 10 pu cada uno.

$$I_4 = I_5 = \frac{1.0}{10} = .1 \text{ pu}$$

$$\Delta V_1 = Z_{14}I_4 + Z_{15}I_5 = .163 \times .1 + .200 \times .1 = .036 \text{ pu}$$
$$\Delta V_2 = Z_{24}I_4 + Z_{25}I_5 = .245 \times .1 + .300 \times .1 = .055 \text{ pu}$$
$$\Delta V_3 = Z_{34}I_4 + Z_{35}I_5 = .237 \times .1 + .200 \times .1 = .044 \text{ pu}$$
$$\Delta V_4 = Z_{44}I_4 + Z_{45}I_5 = .355 \times .1 + .300 \times .1 = .066 \text{ pu}$$
$$\Delta V_5 = Z_{54}I_4 + Z_{55}I_5 = .300 \times .1 + .450 \times .1 = .075 \text{ pu}$$
$$\Delta V_6 = Z_{64}I_4 + Z_{65}I_5 = .300 \times .1 + .450 \times .1 = .075 \text{ pu}$$

Obsérvese que la suma de las capacidades de estos dos condensadores es igual a la capacidad del condensador colocado en la barra 3 del Ejemplo 6, sin embargo la variación de voltaje en casi todas las barras es mayor en este caso que en el anterior. Usando este tipo de combinaciones se pueden lograr soluciones óptimas. La variación de voltaje en una barra a la cual se le ha colocado un condensador depende de la impedancia de la diagonal de la matriz correspondiente a esa barra, y la variación de voltaje en las otras barras depende de las impedancias fuera de la diagonal de la matriz correspondiente a estas barras y la barra en donde se colocó el condensador. Como los elementos de la diagonal de la matriz $\underline{Z}$ son como mínimo igual a los que están fuera de la diagonal, es obvio que las mayores variaciones de voltaje se encuentran en aquellas barras en donde se ha colocado el condensador, siguiendo en el orden de variación aquellas barras que se encuentren eléctricamente más cercanas a éstas.

EJEMPLO 8

En el sistema siguiente de 60 Hz:

G_1: 35 MVA, 6.6 KV, X = j.12 pu
G_2: 30 MVA, 6.6 KV, X = j.12 pu
T_1: 20 MVA, 7.5 - 2.4 KV, X = j.10 pu
T_2: 25 MVA, 7.2 - 2.6 KV, X = j.10 pu
LINEA 2-3: X = j.06 ohmios



Tomando como base 30 MVA, 2.5 KV en la barra 3:

a) Calcular el condensador necesario, colocar en la barra 3 para producir un aumento de 100 voltios en la barra 2, si inicialmente existen 2,5 Kv en esa barra.
b) Calcular la variación de voltaje en las otras barras.

Los valores de impedancias con la base indicada en la barra 3 son:

LINEA 2-3:

$$Z_b = \frac{(2.5)^2}{30} = .2083\ \Omega$$

$$X = \frac{j.06}{.2083} = j.2880\ pu$$

T_1:

$$X = j.10 \times \left[\frac{2.4}{2.5}\right]^2 \times \frac{30}{20} = j.1382\ pu$$

Voltaje base en barra 1 = $\frac{2.5}{2.4} \times 7.5 = 7.8125$ KV

G_1:

$$X = j.12 \times \left[\frac{6.6}{7.8125}\right]^2 \times \frac{30}{35} = j.0734\ pu$$

T_2:

$$X = j.10 \times \left[\frac{2.6}{2.5}\right]^2 \times \frac{30}{25} = j.1298\ pu$$

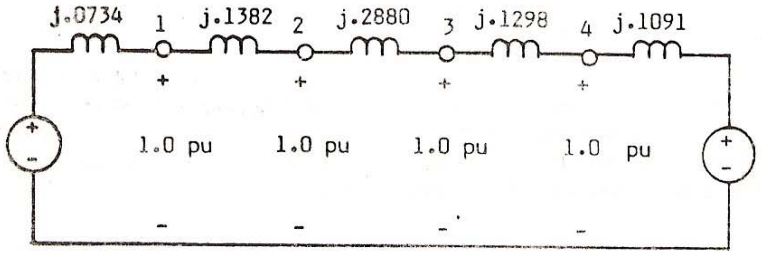
Voltaje base en barra 4 = $\frac{2.5}{2.6} \times 7.2 = 6.9231$ KV

G_2:

$$X = j.12 \times \left[\frac{6.6}{6.9231}\right]^2 \times \frac{30}{30} = j.1091\ pu$$

Voltaje en pu en la barra 2 = $\frac{2.5}{2.5}$ = 10 pu

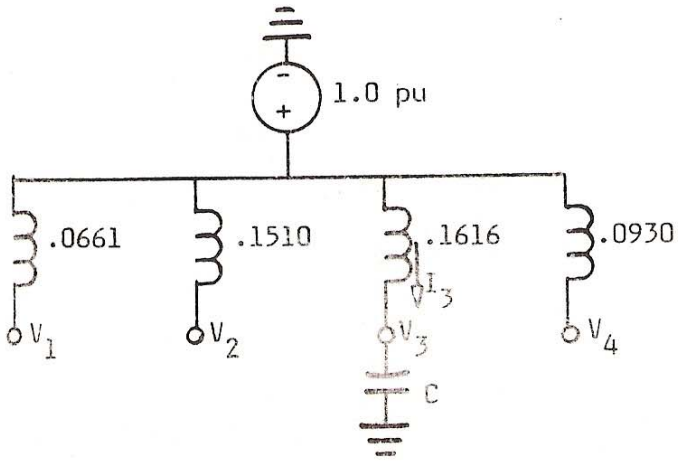
El diagrama de impedancias es



La matriz impedancia de barra es

$$Z = j\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .0661 & .0524 & .0237 & .0108 \\ .0524 & .1510 & .0685 & .0313 \\ .0237 & .0685 & .1616 & .0738 \\ .0108 & .0313 & .0738 & .0930 \end{bmatrix} \end{array}$$

El equivalente de rastrillo es



a)

$$\Delta V_2 = Z_{23} I_3 = \frac{100}{2500} = .0400\ pu$$

$$I_3 = \frac{\Delta V_2}{Z_{23}} = \frac{.0400}{.0685} = .5839\ pu$$

$$\Delta V_3 = Z_{33} I_3 = .1616 \times .5839 = .0944\ pu$$

$$V_3 = 1.0 + \Delta V_3 = 1.0 + .0944 = 1.0944\ pu$$

$$X_C = \frac{V_3}{I_3} = \frac{1.0944}{0.5839} = 1.8743 \text{ pu} = 1.8743 \times .2083$$
$$= .3904\ \Omega$$

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{377 \times .3904} = 6794\ \mu f$$

b)

$$\Delta V_1 = Z_{13} I_3 = .0237 \times .5839 = .0138 \text{ pu}$$
$$= .0138 \times 7812.5 = 108.11 \text{ voltios}$$

$$\Delta V_3 = Z_{33} I_3 = .1616 \times .5839 = .0944 \text{ pu}$$
$$= .0944 \times 2500 = 235.90 \text{ voltios}$$

$$\Delta V_4 = Z_{43} I_3 = .0738 \times .5839 = .0431 \text{ pu}$$
$$= .0431 \times 6923.1 = 298.33 \text{ voltios}$$

6. VARIACION DE VOLTAJE EN TERMINALES DE UN SISTEMA DE POTENCIA DEBIDO A AJUSTES DEL CAMBIADOR DE TOMA DE LOS TRANSFORMADORES.

Como la impedancia de los transformadores está contenida en la matriz impedancia de barra, lo primero que debe hacerse en estos casos es modificar la matriz original para sacar de allí a la impedancia del transformador al cual se le ha cambiado la relación de transformación. Esto se logra añadiendo una unión con valor negativo de la impedancia del transformador entre las barras en donde está colocado el transformador. Si el transformador está colocado entre las barras 2 y 3 por ejemplo, se colocará la unión en la forma indicada en la figura 4.23.

Una vez modificada la matriz $\underline{Z}$, se coloca entre esas barras del equivalente de rastrillo el modelo fuente-impedancia estudiado en la Sección 3, siendo la fuente el incremento de voltaje generado que se le quiere dar al transformador mediante el cambio de la relación de transformación y la impedancia es la impedancia del transformador. La polaridad positiva de la fuente debe coincidir con la barra en donde se quiere incrementar el voltaje. Esta situación se muestra en la figura 4.24.

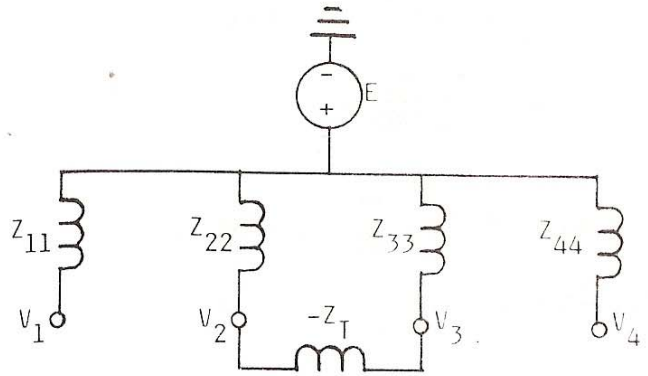


Fig. 4.23

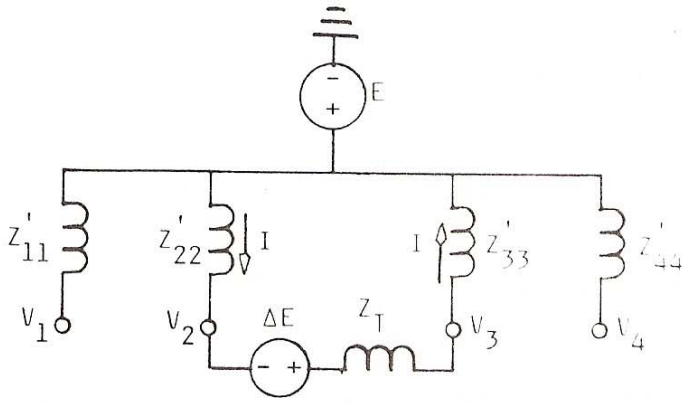


Fig. 4.24

La corriente circulante I depende del incremento de voltaje inducido ΔE y de las impedancias de la malla. Las impedancias fuera de la diagonal de la matriz impedancia de barra producen caídas de tensión con polaridad diferente a la producida por las impedancias que están en la diagonal. De esta manera

$$\Delta E = I(Z'_{33} + Z'_{22} - 2Z'_{32} + Z_T)$$

por lo que

$$I = \frac{\Delta E}{Z'_{33} + Z'_{22} - 2Z'_{32} + Z_T}$$

En general, para un transformador colocado entre las barras i y j se tiene que

$$I = \frac{\Delta E}{Z'_{ii} + Z'_{jj} - 2Z'_{ij} + Z_T} \qquad 4.12$$

La variación de voltaje en todas las barras es

$$\Delta V_1 = I(Z'_{31} - Z'_{21})$$
$$\Delta V_2 = I(Z'_{32} - Z'_{22})$$
$$\Delta V_3 = I(Z'_{33} - Z'_{23})$$
$$\Delta V_4 = I(Z'_{34} - Z'_{24})$$

Y en general la variación de voltaje en cualquier barra k es

$$\Delta V_k = I(Z'_{ik} - Z'_{jk}) \qquad 4.13$$

siendo i la barra a la cual se le da el incremento de voltaje.

EJEMPLO 9

Resolver el Ejemplo 7 si al transformador T_2 se le varía la relación de transformación de manera de producir un incremento de voltaje inducido de .1 pu hacia la barra 4.

El transformador T_2 está colocado entre las barras 3 y 4, por lo que se añade entre esas barras una unión con una impedancia igual a −.2 pu. La matriz de impedancia modificada Z' es

$$Z' = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .400 & .400 & .000 & .400 & .400 & .400 \\ .400 & .600 & .000 & .600 & .600 & .600 \\ .000 & .000 & .400 & .000 & .000 & .000 \\ .400 & .600 & .000 & .872 & .736 & .736 \\ .400 & .600 & .000 & .736 & .818 & .818 \\ .400 & .600 & .000 & .736 & .818 & .968 \end{bmatrix} \end{array} \quad j$$

$$I = \frac{\Delta E}{Z'_{33} + Z'_{44} - Z'_{34} + Z_T}$$

$$= \frac{.1}{.400 + .872 - 2 \times .000 + .2} = .068 \text{ pu}$$

$$\Delta V_1 = I(Z'_{41} - Z'_{31}) = .068(.400 - .000) = .027 \text{ pu}$$
$$\Delta V_2 = I(Z'_{42} - Z'_{32}) = .068(.600 - .000) = .041 \text{ pu}$$
$$\Delta V_3 = I(Z'_{43} - Z'_{33}) = .068(.000 - .400) = -.031 \text{ pu}$$
$$\Delta V_4 = I(Z'_{44} - Z'_{34}) = .068(.872 - .000) = .059 \text{ pu}$$
$$\Delta V_5 = I(Z'_{45} - Z'_{35}) = .068(.736 - .000) = .050 \text{ pu}$$
$$\Delta V_6 = I(Z'_{46} - Z'_{36}) = .068(.736 - .000) = .050 \text{ pu}$$

EJEMPLO 10

En el problema del Ejemplo 8:

a) Calcular el incremento de voltaje inducido necesario producir en el transformador 2 para lograr un aumento de 100 voltios en la barra 2, si además se ha intercalado en serie con la línea un condensador de 30 milifaradios.

b) Calcular el incremento de voltaje en cada barra.

La impedancia del condensador colocado en la línea es

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{377 \times 30 \times 10^{-3}} = .0884\ \Omega = .4245\ \text{pu}$$

La impedancia en el enlace 2-3 es entonces

$$X_{23} = .2880 - .4245 = -.1365\ \text{pu}$$

La matriz Z sacando el transformador 2 es

$$Z = j \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .0734 & .0734 & .0734 & .0000 \\ .0734 & .2116 & .2116 & .0000 \\ .0734 & .2116 & .0751 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 & .1091 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Delta V_2 = I(Z_{32} - Z_{42}) = I(.2116 - .0000) = .0400\ \text{pu}$$

$$I = \frac{.0400}{.2116} = .1890\ \text{pu}$$

$$\Delta E = I(Z_{33} + Z_{44} - 2Z_{34} + Z_T)$$

$$= .1890(.0751 + .1091 + .1298) = .0593\ \text{pu}$$

$$= .0593 \times 2500 = 148.25\ \text{V} \quad \text{en la barra 3}$$

$$= .0593 \times 6923.1 = 310.5\ \text{V en la barra 4}$$

$$\Delta V_1 = I(Z_{31} - Z_{41}) = .1890(.0734 - .0000) = .0139\ \text{pu}$$

$$= .0139 \times 7812.5 = 108.6\ \text{voltios}$$

$$\Delta V_2 = .0400\ \text{pu} = 100\ \text{voltios}$$

$$\Delta V_3 = I(Z_{33} - Z_{43}) = .1890(.0751 - .0000) = .0142\ \text{pu}$$

$$= .0142 \times 2500 = 35.5\ \text{voltios}$$

$$\Delta V_4 = I(Z_{34} - Z_{44}) = .1890(.0000 - .1091) = -.0206\ \text{pu}$$

$$= -.0206 \times 6923.1 = -142.7\ \text{V}$$

7. VARIACION DE VOLTAJE EN TERMINALES DE UN SISTEMA DE POTENCIA DEBIDO A CAMBIO EN LA EXCITACION DEL GENERADOR.

Al igual que en la sección anterior, como la impedancia del generador está contenida en la matriz impedancia de barra, lo primero que debe hacerse es modificar la matriz original para sacar la impedancia del generador al cual se le ha variado la excitación. Esto se logra agregando una unión con valor negativo de la impedancia del generador entre la barra en donde está colocado el generador y tierra. En la figura 4.25 se representa esta situación cuando el generador está colocado en la barra 2.

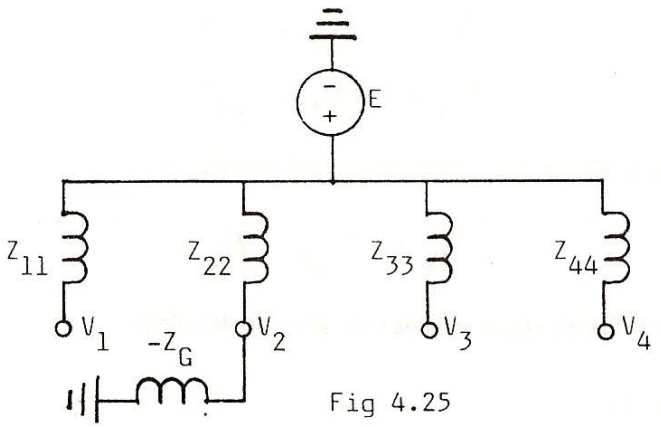


Fig 4.25

Una vez modificada la matriz Z, se coloca entre la barra en donde está colocado el generador y tierra el modelo fuente-impedancia estudiado anteriormente, siendo la fuente el nuevo voltaje generado E' que se le quiere dar al generador y la impedancia es la impedancia del generador. La polaridad positiva de la fuente debe coincidir siempre con la barra en donde esté colocada.

Esta situación se muestra en la figura 4.26.

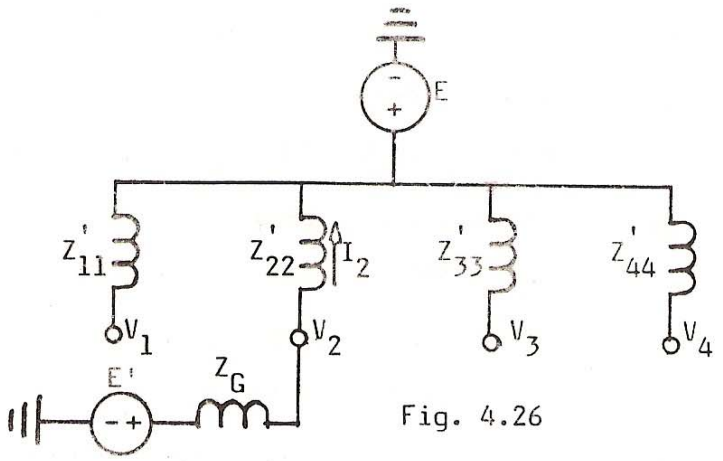


Fig. 4.26

La corriente en la barra 2 se puede conseguir por cualquiera de las siguientes relaciones.

$$I_2 = \frac{\Delta V_2}{Z'_{22}} = \frac{V_2 - E}{Z'_{22}} = \frac{E' - E}{Z_G + Z'_{22}} = \frac{\Delta E}{Z_G + Z'_{22}} = \frac{E' - V_2}{Z_G}$$

La variación de voltaje en todas las barras es

$$\Delta V_1 = Z'_{21} I_2 \quad \Delta V_2 = Z'_{22} I_2 \quad \Delta V_3 = Z'_{23} I_2 \quad \Delta V_4 = Z'_{24} I_2$$

Y en forma general

$$I_k = \frac{\Delta V_k}{Z'_{kk}} \qquad \Delta V_i = Z'_{ki} I_k = \frac{Z'_{ki}}{Z'_{kk}} \Delta V_k \qquad 4.15$$

4.14

Siendo k la barra en donde está colocado el generador al cual se le varió la excitación.

EJEMPLO 11

Resolver el Ejemplo 7 si al generador G_1 se le aumenta la excitación de manera de aumentar el voltaje en la barra 1 en .1 pu.

La matriz de impedancia modificada $\underset{\sim}{Z}'$ es

$$\underset{\sim}{Z}' = j \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.070 & .870 & .400 & .600 & .735 & .735 \\ .870 & .870 & .400 & .600 & .735 & .735 \\ .400 & .400 & .400 & .400 & .400 & .400 \\ .600 & .600 & .400 & .600 & .600 & .600 \\ .735 & .735 & .400 & .600 & .817 & .817 \\ .735 & .735 & .400 & .600 & .817 & .967 \end{bmatrix} \end{array}$$

La corriente en la barra 1 es

$$I_1 = \frac{\Delta V_1}{Z'_{11}} = \frac{.1}{1.070} = .093 \text{ pu}$$

y la variación de voltaje en las otras barras es

$$\Delta V_2 = Z'_{12} I_1 = .870 \times .093 = .081 \text{ pu}$$

$$\Delta V_3 = Z'_{13} I_1 = .400 \times .093 = .037 \text{ pu}$$

$$\Delta V_4 = Z'_{14} I_1 = .600 \times .093 = .056 \text{ pu}$$

$$\Delta V_5 = Z'_{15} I_1 = .735 \times .093 = .068 \text{ pu}$$

$$\Delta V_6 = Z'_{16} I_1 = .735 \times .093 = .068 \text{ pu}$$

EJEMPLO 12

En el problema del Ejemplo 8:

a) Calcular el voltaje generado necesario en el generador G_2 para producir un incremento de 100 voltios en la barra 2.
b) Calcular el incremento de voltaje en cada barra.

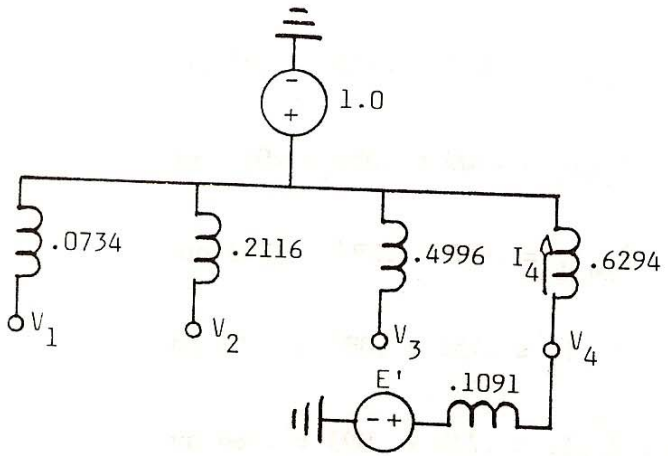
La matriz impedancia de barra sacando el generador G_2 es

$$\underset{\sim}{Z} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ j \begin{bmatrix} .0734 & .0734 & .0734 & .0734 \\ .0734 & .2116 & .2116 & .2116 \\ .0734 & .2116 & .4996 & .4996 \\ .0734 & .2116 & .4996 & .6294 \end{bmatrix} \end{array}$$

El equivalente de rastrillo se muestra en la figura siguiente, de donde

$$\Delta V_2 = Z_{42} I_4 = .0400 = .2116 I_4$$

$$I_4 = \frac{.0400}{.2116} = .1890 \text{ pu}$$



$$E' = E + I_4(Z_G + Z_{44}) = 1.0 + .1890(.1091 + .6294)$$

$$= 1.1396 \text{ pu} = 1.1396 \times 6923.1 = 7889.4 \text{ voltios}$$

$$\Delta V_1 = Z_{41} I_4 = .0734 \times .1890 = .0139 \text{ pu}$$

$$= .0139 \times 7812.5 = 108.6 \text{ voltios}$$

$$\Delta V_3 = Z_{43} I_4 = .4996 \times .1890 = .0944 \text{ pu}$$

$$= .0944 \times 2500 = 236.0 \text{ voltios}$$

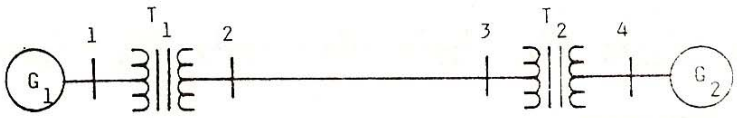
$$\Delta V_4 = Z_{44} I_4 = .6294 \times .1890 = .1190 \text{ pu}$$

$$= .1190 \times 6923.1 = 823.5 \text{ voltios}$$

PROBLEMAS

1. En el sistema siguiente:

G_1: 20 MVA, 2.4 KV, X = j.10 pu
G_2: 20 MVA, 2.4 KV, X = j.12 pu
T_1: 20 MVA, 2.4 - 7.5 KV, X = j.06 pu
T_2: 20 MVA, 2.4 - 7.5 KV, X = j.08 pu
LINEA 2-3: X = j.4 ohmios



a) Encontrar la matriz impedancia de barra.
b) Encontrar en KVA y en faradios el condensador necesario colocar en la barra 2 para producir un aumento de voltaje en la barra 3 de 200 voltios si además en la línea L_{23} se ha intercalado en serie un condensador de 40 mF. Inicialmente el voltaje en la barra 3 es 7.5 KV.
c) Encontrar el voltaje en voltios en cada barra si al generador de la barra 1 se le cambia la excitación para aumentar su voltaje generado en 100 voltios.

2. Los datos del sistema de potencia que se indica son los siguientes:

G_1: 30 MVA, 7.2 KV, X = j.10 pu
G_2: 25 MVA, 7.2 KV, X = j.10 pu
T_1: 30 MVA, 7.5 - 2.5 KV, X = j.12 pu
T_2: 20 MVA, 7.5 - 2.6 KV, X = j.12 pu
LINEA 2-3: X = j.08 ohmios



a) Tomando como base los valores del generador G_1 construir el diagrama de impedancias y la matriz impedancia de barra.
b) Calcular en KVA y en faradios el condensador necesario colocar en la barra 2 para producir un aumento de 600 voltios en la barra 4, si inicialmente el voltaje en esa barra es 7.2 KV.
c) Calcular en voltios el voltaje en cada barra si al generador G_1 se le cambia la excitación para aumentar el voltaje en la barra 2 en 100 voltios.
d) Calcular en voltios el voltaje en cada barra si al transformador T_1 se le cambia el "tap" de manera de aumentar el voltaje en la barra 3 en 200 voltios.

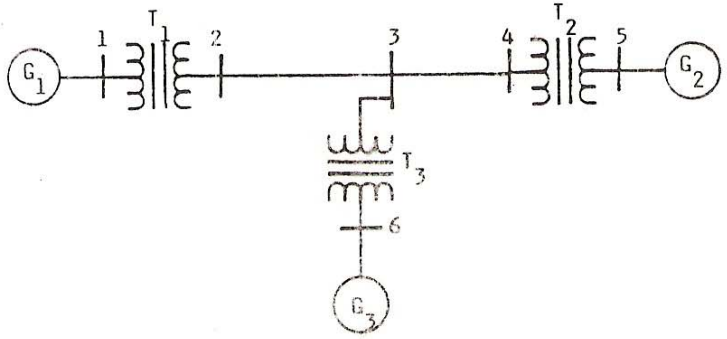
3. Repetir el Problema 2 tomando como base 30 MVA, 3.5 KV en la barra 2. Sus resultados deben ser iguales a los del Problema 1. Compárelos.

4. En el siguiente sistema tomando como base 20 MVA, 6.5 KV en el generador G_1:

a) Construir la matriz impedancia de barra.
b) Calcular en voltios los voltajes de todas las barras si entre las barras 3 y 6 se coloca otro transformador similar a T_3 cambiándole el tap para aumentar el voltaje en la barra 3 en 200 voltios. Inicialmente el voltaje en la barra 3 es de 2.5 KV.

Los datos del sistema son:

G_1: 25 MVA, 6.5 KV, X = j.12 pu
G_2: 20 MVA, 6.6 KV, X = j.12 pu
G_3: 25 MVA, 6.5 KV, X = j.12 pu
T_1: 30 MVA, 7.2 - 2.5 KV, X = j.10 pu
T_2: 20 MVA, 7.5 - 2.4 KV, X = j.10 pu
T_3: 25 MVA, 6.2 - 2.2 KV, X = j.10 pu
LINEA 2-3: X = j.07 ohmios, LINEA 3-4: X = j.06 ohms.



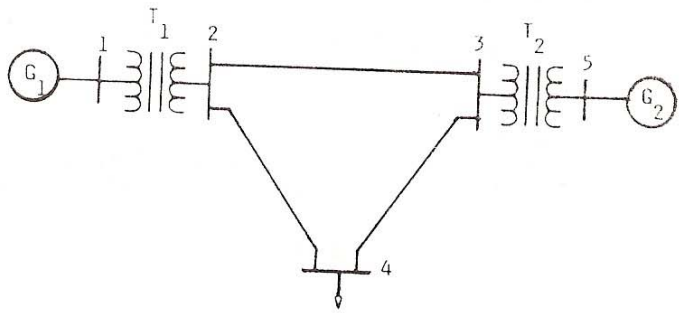
5. En el siguiente sistema tomando como base 30 MVA, 7.5 KV en el generador G_2.

a) Construir la matriz impedancia de barra.
b) Calcular la variación de voltaje en voltios en todas las barras si entre las barras 1 y 2 se coloca otro transformador similar a T_1 pero cambiándole el "tap" de manera de aumentar su voltaje inducido en .05 pu hacia la barra 2 y al mismo tiempo se coloca un condensador de Q = 1.0 MVA en la barra 4 para aumentar el voltaje en esa barra en .08 pu. por efecto del condensador solamente. Los datos del sistema son:

G_1: 20 MVA, 6.5 KV, X = j.10 pu.
G_2: 30 MVA, 6.5 KV, X = j.10 pu.

T_1: 25 MVA, 7.2 - 2.5 KV, X = j.12 pu.
T_2: 35 MVA, 7.5 - 2.5 KV, X = j.12 pu.
LINEA 2-3: X = j.06 ohmios
LINEA 3-4: X = j.08 ohmios
LINEA 2-4: X = j.05 ohmios

Inicialmente el voltaje en la barra 1 es de 6.4 KV



CAPITULO V

DESPACHO ECONOMICO DE CARGA

1. INTRODUCCION

Estudiado, como se ha hecho, el estado de un sistema de potencia, la distribución de los flujos de potencia entre las diferentes barras y el mejoramiento de voltaje en cada una de ellas, solamente faltaría hacer una distribución de la potencia de los generadores de manera que el costo de la potencia generada sea la mínima para alimentar a una carga dada. Es decir, se debe determinar la contribución de cada generador de manera que el costo de la potencia generada sea mínima. Por todo esto el despacho económico se define como "La distribución de los requerimientos de generación total entre las diferentes alternativas de fuentes para la óptima economía del sistema, tomando en cuenta a los costos de los incrementos de generación y a los costos de los incrementos de las pérdidas de potencia en las líneas de transmisión"[1].

Los factores más importantes en la producción de energía eléctrica a costo mínimo son:

a) La operación eficiente de los generadores.
b) El costo del combustible.
c) Las pérdidas en las líneas de transmisión.

El análisis de algunos de estos factores es lo que se describe a continuación.

[1] IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronics Terms, 1984. Página 287.

2. CONCEPTO DE COSTO INCREMENTAL

Se considerará primero que la carga está en la misma barra de generación o muy cerca de ella, de manera que las pérdidas en las líneas sean despreciables. El criterio universalmente utilizado para el análisis de despacho económico de la potencia generada es el de costo incremental. El costo incremental es una medida del costo del próximo incremento de potencia generada o el costo de producir una unidad más. La curva del costo incremental es una curva del incremento de costo por incremento de potencia generada vs. potencia generada.

La curva de costo incremental se puede aproximar por una línea recta, la cual se muestra en la figura 5.1, siendo λ el costo incremental, F el costo del combustible y P la potencia generada.

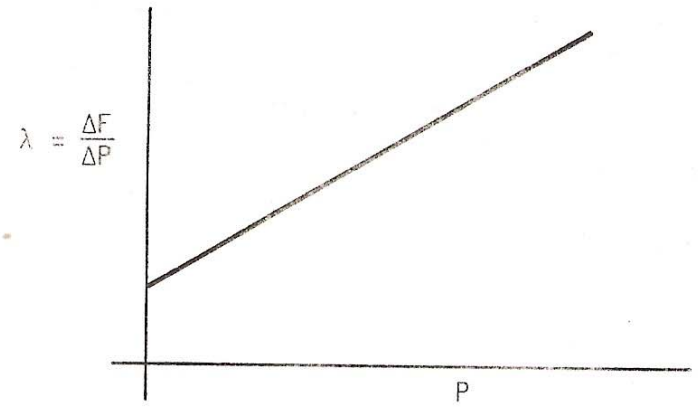


Fig. 5.1

Expresando el costo incremental con la ecuación de una línea recta se tiene

$$\lambda = mP + b \qquad 5.1$$

Por supuesto, que el generador que tenga el costo incremental más bajo será el más económico.

3. CRITERIO PARA UN DESPACHO ECONOMICO

Como el costo más importante en la generación de potencia en un sistema instalado es el del combustible, se considerará en este libro que todo el costo de generación de potencia es el del combustible. Se conseguirá ahora un criterio básico para una operación económica de un sistema formado por varios generadores. Se usará el método de multiplicadores de Lagrange.

Sea $F_1, F_2, F_3, \ldots F_n$ el costo del combustible de cada uno de los n generadores de un sistema de potencia y $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ la potencia generada por los generadores $G_1, G_2, G_3, \ldots G_n$.
El costo total del combustible es

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n \qquad 5.2$$

y la potencia total generada es

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n \qquad 5.3$$

Como no se están considerando las pérdidas internas de los generadores, la potencia generada P es también la potencia de entrada de los generadores y la potencia de la carga. Se desea obtener un costo mínimo total para una carga constante P, lo cual requiere que el diferencial total $dF = 0$. Este diferencial es

$$dF = \frac{\partial F}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial F}{\partial P_2} dP_2 + \frac{\partial F}{\partial P_3} dP_3 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial P_n} dP_n = 0 \qquad 5.4$$

Pero los requerimientos de potencia generada P es constante, por lo que

$$dP = dP_1 + dP_2 + dP_3 + \ldots\ldots + dP_n = 0 \qquad 5.5$$

Multiplicando la ecuación 5.5 por el costo incremental se tiene

$$\lambda dP = \lambda dP_1 + \lambda dP_2 + \lambda dP_3 + \ldots\ldots + \lambda dP_n = 0 \qquad 5.6$$

Restando la ecuación 5.6 de la ecuación 5.4 se tiene

$$(\frac{\partial F}{\partial P_1} - \lambda)dP_1 + (\frac{\partial F}{\partial P_2} - \lambda)dP_2 + (\frac{\partial F}{\partial P_3} - \lambda)dP_3 + \ldots\ldots$$

$$+ (\frac{\partial F}{\partial P_n} - \lambda)dP_n = 0 \qquad 5.7$$

lo cual se satisface si cada término es igual a cero, con lo que

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial P_1} = \frac{\partial F}{\partial P_2} = \frac{\partial F}{\partial P_3} = \ldots\ldots = \frac{\partial F}{\partial P_n} \qquad 5.8$$

Cada derivada parcial se convierte en una derivada total, ya que el costo de combustible de cualquier generador variará si varía la potencia de ese generador solamente, es decir

$$\lambda = \frac{\partial F_1}{\partial P_1} = \frac{\partial F_2}{\partial P_2} = \frac{\partial F_3}{\partial P_3} = \ldots\ldots = \frac{\partial F_n}{\partial P_n} \qquad 5.9$$

En conclusión, el criterio básico para una operación de despacho económico de carga es que todas las máquinas funcionen al mismo costo incremental, tal como se ilustra en la figura 5.2, en donde las 3 máquinas de la figura tienen diferentes características de costo incremental, siendo P_1, P_2 y P_3 sus potencias generadas al mismo costo incremental λ.

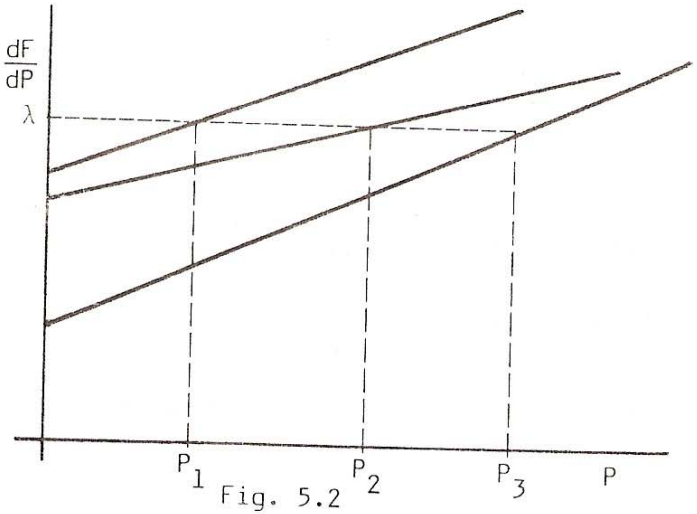


Fig. 5.2

EJEMPLO 1

Una planta está formada por dos generadores con costo incremental

$$\lambda_1 = 4.0\ P_1 + 3.0$$

$$\lambda_2 = 4.0\ P_2 + 3.5$$

Calcular el costo incremental y la contribución de cada generador para alimentar a una carga de 1.0 pu en la forma más económica posible.

El costo incremental debe ser el mismo para ambos generadores, es decir

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4.0\ P_1 + 3.0 = 4.0\ P_2 + 3.5$$

Además

$$P_1 + P_2 = 1.0$$

Substituyendo se tiene

$$4.0(1.0 - P_2) + 3.0 = 4.0\ P_2 + 3.5$$

de donde

$$P_2 = .4375 \qquad P_1 = .5625$$

Entonces

$$\lambda_1 = 4.0\ P_1 + 3.0 = 4.0 \times .5625 + 3.0 = 5.25$$

y

$$\lambda_2 = 4.0\ P_2 + 3.5 = 4.0 \times .4375 + 3.5 = 5.25$$

Se puede calcular el ahorro logrado mediante el despacho económico integrando la expresión de costo incremental, λ, lo cual resulta en costo total y comparando los aumentos y disminuciones logrados desde una distribución arbitraria hasta la mejor distribución económica. Un aumento de área significa incremento de costo total y una disminución de área significa disminución del costo total. El aumento de costo neto es la diferencia de esas dos integraciones.

EJEMPLO 2

Calcular la disminución del costo total al hacer el despacho económico del sistema del problema anterior, si los generadores suministraban inicialmente

$$P_1 = .25 \text{ pu} \qquad y \qquad P_2 = .75 \text{ pu}$$

Las características gráficas de la distribución se muestran en la figura siguiente.

El incremento de costo de P_1 es

$$\int_{.25}^{.5625} (4.0\,P_1 + 3.0)dP_1 = 2.0\,P_1^2 + 3.0\,P_1 \Big|_{.25}^{.5625} = 1.4463$$

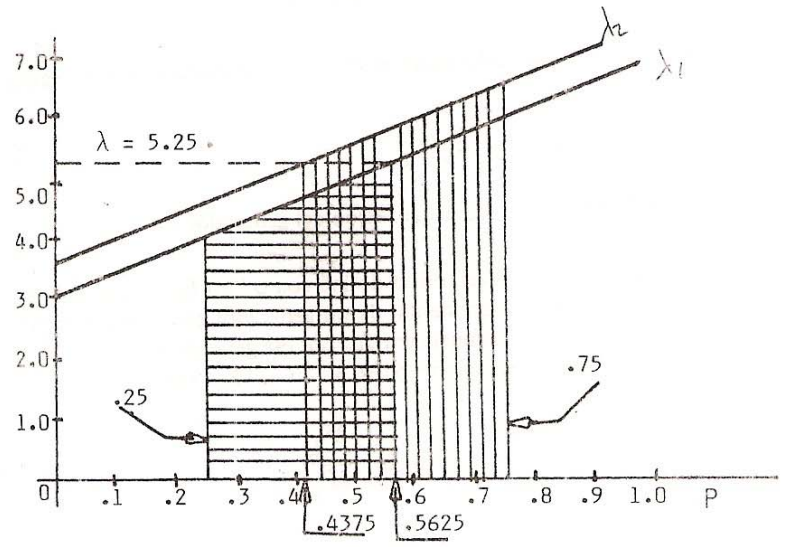
La disminución de costo de P_2 es

$$\int_{.4375}^{.75} (4.0\,P_2 + 3.5)dP_2 = 2.0\,P_2^2 + 3.5\,P_2 \Big|_{.4375}^{.75} = 1.8359$$

El aumento neto es

$$1.4453 - 1.8359 = -.3906$$

El signo negativo significa un ahorro de .3906 por cada unidad de potencia generada.



4. DESPACHO ECONOMICO DE CARGA EN UN SISTEMA DE POTENCIA

Se considerará ahora que la carga está lejos del generador, alimentada por medio de líneas de transmisión en las cuales ocurren pérdidas de potencia. El generador que tenga el mejor costo incremental no es ahora necesariamente el más económico, porque pudiera estar muy lejos de la carga y las pérdidas en las líneas ser demasiado grandes.

Si la carga está cerca del generador el costo incremental del generador k es

$$\lambda_k = \frac{dF_k}{dP_k} \simeq \frac{\Delta F_k}{\Delta P_k} \qquad 5.10$$

Si la carga está lejos de la generación el valor del costo incremental λ debe ser corregido por medio de un factor de penalización para tomar en cuenta las pérdidas en las líneas de transmisión. El nuevo valor de costo incremental es el incremento de costo por incremento de potencia en la carga, es decir

$$\lambda_k = \frac{\Delta F_k}{\Delta P_{k\,\text{carga}}} \qquad 5.11$$

y la relación entre el costo incremental y el costo incremental corregido

$$\lambda'_k = L_k \lambda_k \qquad 5.12$$

en donde L_k es el factor de penalización del generador k.

El factor de penalización se define como "un factor que cuando multiplicado por el costo incremental de un generador en particular produce el costo incremental de la potencia enviada por ese generador"[1].

Combinando las ecuaciones 5.10, 5.11 y 5.12 se tiene

$$\frac{\Delta F_k}{\Delta P_{kcarga}} = L_k \frac{\Delta F_k}{\Delta P_k} \qquad 5.13$$

de donde

$$L_k = \frac{\Delta P_k}{\Delta P_{kcarga}} \qquad 5.14$$

es decir, el factor de penalización es además el incremento de la potencia generada por incremento de la potencia de carga. Pero

$$\Delta P_{kcarga} = \Delta P_k - \Delta P_{pérdidas}$$

por lo que

$$L_k = \frac{\Delta P_k}{\Delta P_k - \Delta P_{pérdidas}} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta P_{pérdidas}}{\Delta P_k}} \qquad 5.15$$

y en forma más exacta

$$L_k = \frac{1}{1 - \frac{dP_{pérdidas}}{dP_k}} \qquad 5.16$$

El criterio de minimización de costos todavía permanece. Es decir, para lograr un despacho económico de carga todos los generadores deben tener el mismo costo incremental en la carga.

$$\lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda'_3 = \ldots\ldots = \lambda'_n \qquad 5.17$$

Una parte de la solución del problema de despacho económico de carga consiste entonces en calcular el factor de penalización de cada generador para corregir el valor de λ a λ'. Para lograr esto es necesario conseguir la solución de

$$\frac{dP_{pérdidas}}{dP_k}$$

para lo cual se deben expresar las pérdidas del sistema en función de las potencias generadas. Es decir

$$P_{pérdidas} = f(P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n) \qquad 5.18$$

Existen varios métodos para obtener la ecuación de las pérdidas en función de las potencias generadas, pero aquí se utilizará uno que se adapta perfectamente a los conceptos estudiados en Capítulos anteriores y que además es muy fácil de seguir. El método consiste en utilizar la matriz impedancia de barra de un sistema que puede tener muchos generadores pero una sola carga. Esta carga será tomada como referencia para encontrar la matriz impedancia de barra. El equivalente de rastrillo de este sistema se enseña en la figura 5.3.

Las pérdidas de potencia en el sistema de la figura 5.3 son

$$S_{p1} = V_{10} I_1^* \qquad S_{p2} = V_{20} I_2^* \qquad S_{p3} = V_{30} I_3^*$$

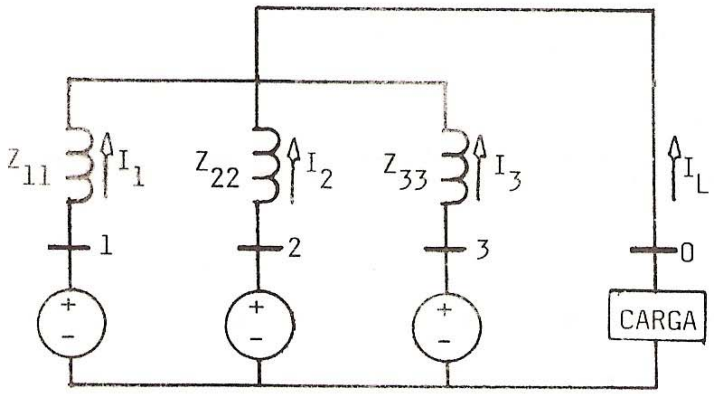


Fig. 5.3

y las pérdidas de potencia totales son

$$S_{pérdidas} = S_{p1} + S_{p2} + S_{p3} = V_{10}I_1^* + V_{20}I_2^* + V_{30}I_3^*$$

o también

$$S_{pérdidas} = \sum_{k=1}^{3} V_{k0}I_k^* \qquad 5.19$$

Además

$$\begin{bmatrix} V_{10} \\ V_{20} \\ V_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

o también

$$V_{k0} = \sum_{i=1}^{3} Z_{ki}I_i \qquad 5.20$$

Substituyendo la ecuación 5.20 en la ecuación 5.19 se tiene

$$S_{pérdidas} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} Z_{ki}I_iI_k^* \qquad 5.21$$

En forma general

$$S_{pérdidas} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} Z_{ki}I_iI_k^* \qquad 5.22$$

Siendo n el número total de generadores.

La corriente I puede expresarse como una función de la potencia de los generadores y de los voltajes de los generadores. Haciendo

$$I = c + jd \qquad 5.23$$

$$Z_{ki} = R_{ki} + jX_{ki} \qquad 5.24$$

En donde c y d son la parte real e imaginaria respectivamente de la corriente I, y R_{ki} y K_{ki} son la parte real e imaginaria respectivamente del elemento Z_{ki} de la matriz impedancia de barra Z.

La ecuación 5.22 queda entonces en la forma

$$S_{pérdidas} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (R_{ki} + jX_{ki})(c_i + jd_i)(c_k - jd_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (R_{ki}c_ic_k + R_{ki}d_id_k - X_{ki}d_ic_k + X_{ki}c_id_k)$$

$$+ j(R_{ki}d_ic_k - R_{ki}c_id_k + X_{ki}c_ic_k + X_{ki}d_id_k)$$

Haciendo

$$X_{ki} = X_{ik} \qquad R_{ki} = R_{ik}$$

y simplificando se tiene

$$S_{\text{pérdidas}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} R_{ki}(c_i c_k + d_i d_k) + jX_{ki}(c_i c_k + d_i d_k) \qquad 5.25$$

de donde

$$P_{\text{pérdidas}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} R_{ki}(c_i c_k + d_i d_k) \qquad 5.26$$

y

$$Q_{\text{pérdidas}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} X_{ki}(c_i c_k + d_i d_k) \qquad 5.27$$

Además

$$I = c + jd = \frac{P - jQ}{V^*} = \frac{(P - jQ)}{|V|} (\text{coseno } \Theta + j\,\text{seno } \Theta)$$

$$I = \frac{P \text{ coseno } \Theta + Q \text{ seno } \Theta}{|V|} + j \frac{P \text{ seno } \Theta - Q \text{ coseno } \Theta}{|V|}$$

por lo que

$$c_i = \frac{P_i \text{ coseno } \Theta_i + Q_i \text{ seno } \Theta_i}{|V_i|}$$

$$d_i = \frac{P_i \text{ seno } \Theta_i - Q_i \text{ coseno } \Theta_i}{|V_i|}$$

$$c_k = \frac{P_k \text{ coseno } \Theta_k + Q_k \text{ seno } \Theta_k}{|V_k|}$$

$$d_k = \frac{P_k \text{ seno } \Theta_k - Q_k \text{ coseno } \Theta_k}{|V_k|}$$

Substituyendo en la ecuación 5.26 se tiene

$$P_{\text{pérdidas}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{R_{ki}}{|V_i||V_k|} [(P_i \cos \Theta_i + Q_i \text{ seno } \Theta_i)(P_k \cos \Theta_k + Q_k \text{seno } \Theta_k) + (P_i \text{ seno } \Theta_i - Q_i \cos \Theta_i)(P_k \text{ seno } \Theta_k - Q_k \cos \Theta_k)]$$

Efectuando las operaciones trigonométricas y simplificando, se tiene

$$P_{\text{pérdidas}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{R_{ki} \text{ coseno } (\Theta_i - \Theta_k)}{|V_i||V_k|} (P_i P_k + Q_i Q_k) + \frac{R_{ki} \text{ seno } (\Theta_i - \Theta_k)}{|V_i||V_k|} (P_k Q_i - Q_k P_i) \qquad 5.28$$

en donde

R_{ki} es la parte real de cada uno de los elementos de la matriz impedancia de barra Z.

$|V|$ es la magnitud del voltaje en las barras de generación.

θ es el ángulo de los voltajes de las barras de generación.

P y Q son las potencias activas y reactivas de generación.

n es el número de generadores.

Como la diferencia de los ángulos de los voltajes entre dos barras de un sistema de potencia es muy pequeña, la ecuación 5.28 se puede aproximar a

$$P_{\text{pérdidas}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{R_{ki} \text{ coseno } (\Theta_i - \Theta_k)}{|V_i||V_k|} (P_i P_k + Q_i Q_k) \qquad 5.29$$

Si se hace

$$B_{ki} = \frac{R_{ki} \text{ coseno } (\Theta_i - \Theta_k)}{|V_i||V_k|} \qquad 5.30$$

La ecuación 5.29 se reescribe en la forma

$$P_{pérdidas} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (P_k B_{ki} P_i + Q_k B_{ki} Q_i) \qquad 5.31$$

Si se hace la aproximación

$$B_{ki} = B_{ik}$$

La derivada de estas pérdidas con respecto a la potencia de generación es

$$\frac{dP_{pérdidas}}{dP_k} \simeq 2 \sum_{i=1}^{n} B_{ki} P_i \qquad 5.32$$

Los coeficientes B se llaman los coeficientes de pérdidas en la transmisión de potencia y se definen como "constantes derivadas matemáticamente para ser combinadas con las fuentes de potencia para proveer las pérdidas de transmisión incrementales de cada fuente hacia la carga. Estos coeficientes también pueden servir para calcular las pérdidas totales de transmisión en el sistema"[1].

Con la ecuación 5.32 se puede calcular el factor de penalización en la ecuación 5.16 y en consecuencia se obtiene el costo incremental corregido y el mínimo costo de generación.

EJEMPLO 3

Los datos del sistema siguiente son en valores por unidad.

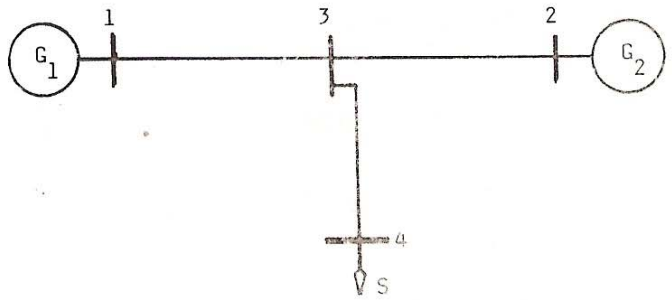
$Z_{13} = .0650 + j.1726$ $\quad Z_{23} = .0112 + j.0450$

$Z_{34} = .0108 + j.0360$

$\lambda_1 = 4.2P_1 + 3.0$ $\quad \lambda_2 = 3.5P_2 + 5.5$

$V_1 = 1.03\angle 0º$ $\quad V_2 = 1.04\angle -2.0º$ $\quad V_3 = 1.00\angle -3.0$

[1] IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronics Terms. 1984. Página 965



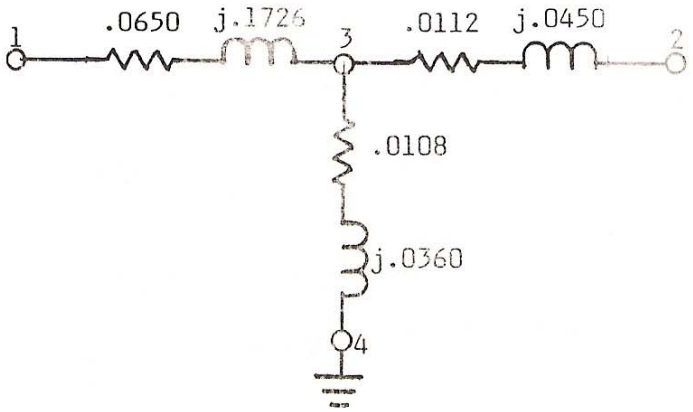
a) Calcular los coeficientes de pérdidas de transmisión en una iteración.
b) Calcular el factor de penalización y el costo incremental de cada generador en función de las potencias generadas.

Para utilizar la ecuación 5.30 se debe conocer la magnitud y ángulo de los voltajes en los terminales de cada generador, así como también la matriz impedancia de barra con la carga tomada como referencia.

De los datos del problema:

$V_1 = 1.03\angle 0º$ $\quad V_2 = 1.04\angle -2.0º$

Cálculo de la matriz impedancia de barra con la carga tomada como referencia:



La matriz impedancia de barra es

$$Z = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .0758 + j.2086 & .0108 + j.0360 \\ .0108 + j.0360 & .0220 + j.0810 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por lo que

$$B_{11} = \frac{R_{11} \cos(\theta_1 - \theta_1)}{|V_1||V_1|} = \frac{R_{11}}{|V_1|^2} = \frac{.0758}{(1.03)^2} = .0714$$

$$B_{12} = \frac{R_{12} \cos(\theta_2 - \theta_1)}{|V_2||V_1|} = \frac{.0108 \times \cos(-2.0 - 0)}{1.03 \times 1.04} = .0101$$

$$B_{21} = \frac{R_{21} \cos(\theta_1 - \theta_2)}{|V_1||V_2|} = \frac{.0108 \times \cos(0 - (-2.0))}{1.03 \times 1.04} = .0101$$

$$B_{22} = \frac{R_{22} \cos(\theta_2 - \theta_2)}{|V_2||V_2|} = \frac{R_{22}}{|V_2|^2} = \frac{.0220}{(1.04)^2} = .0203$$

Usando la ecuación 5.32

$$\frac{dP_{\text{pérdidas}}}{dP_1} = 2B_{11}P_1 + 2B_{12}P_2 = 2 \times .0714\, P_1 + 2 \times .0101 P_2 = .1428P_1 + .0202P_2$$

$$\frac{dP_{\text{pérdidas}}}{dP_2} = 2B_{21}P_1 + 2B_{22}P_2 = 2 \times .0101 P_1 + 2 \times .0203 P_2 = .0202P_1 + .0406P_2$$

Mediante la ecuación 5.16:

$$L_1 = \frac{1}{1 - \frac{dP_{\text{pérdidas}}}{dP_1}} = \frac{1}{1 - .1428P_1 - .0202P_2}$$

$$L_2 = \frac{1}{1 - \frac{dP_{\text{pérdidas}}}{dP_2}} = \frac{1}{1 - .0202P_1 - .0406P_2}$$

Y usando la ecuación 5.12

$$\lambda_1' = L_1 \lambda_1 = \frac{4.2P_1 + 3.0}{1 - .1428P_1 - .0202P_2}$$

$$\lambda_2' = L_2 \lambda_2 = \frac{3.5P_2 + 5.5}{1 - .0202P_1 - .0406P_2}$$

EJEMPLO 4

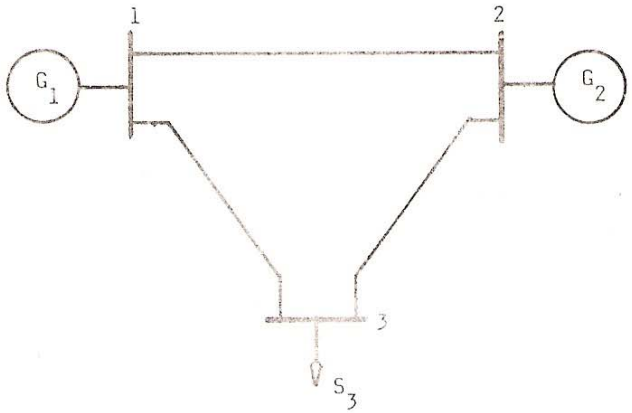
El sistema que se indica tiene las siguientes características en valores por unidad.

$Z_{12} = .04 + j.300$ $\quad Z_{23} = .06 + j.250$

$Z_{13} = .05 + j.350$ $\quad V_1 = 1.2\angle 10^\circ$ $\quad V_3 = 1.1\angle 0^\circ$

$\lambda_1 = 3.0P_1 + 3.5$ $\quad \lambda_2 = 2.8P_2 + 3.2$

$S_{G_1} = .5 + j.4$ $\quad S_3 = 1.9 - j.27$



a) Calcular los coeficientes de pérdidas de transmisión en una iteración.
b) Calcular el factor de penalización y el costo incremental de cada generador en función de las potencias generadas.

Se conoce el voltaje en los terminales del generador G_1 pero se desconoce el voltaje en los terminales del generador G_2.

$$I_{13} = \frac{V_1 - V_3}{Z_{13}} = \frac{1.2\angle 10^\circ - 1.1\angle 0^\circ}{.05 + j.350} = .6331\angle -13.2954^\circ$$

$$S^3_{13} = V_3 I^*_{13} = 1.1\angle 0^\circ \times .6331\angle 13.2954^\circ = .6778 + j.1602$$

$$S^3_{23} = S_3 - S^3_{13} = 1.9 + j.27 - (.6778 + j.1602)$$

$$= 1.2222 + j.1098$$

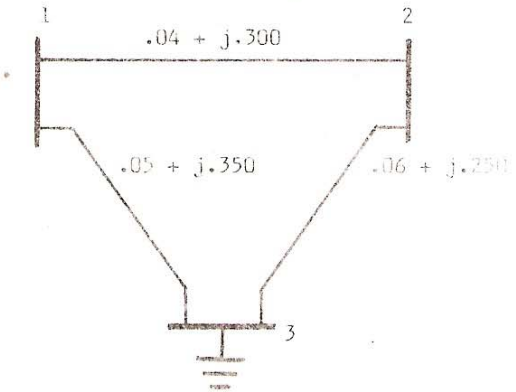
$$I_{23} = \frac{S^{3*}_{23}}{V^*_3} = \frac{1.2222 - j.1098}{1.1\angle 0^\circ} = 1.1111 - j.0998$$

$$V_2 = V_3 + Z_{23} I_{23}$$

$$= 1.1\angle 0^\circ + (.06 + j.250)(1.1111 - j.0998)$$

$$= 1.2222\angle 12.8484^\circ$$

Se calcula ahora la matriz impedancia de barra.



$$Z_{11} = \frac{(.05 + j.350)(.100 + j.550)}{.150 + j.900} = .0338 + j.$$

$$Z_{12} = \frac{(.05 + j.350)(.06 + j.250)}{.150 + j.900} = .0210 + j.$$

$$Z_{21} = Z_{12} = .0210 + j.0974$$

$$Z_{22} = \frac{(.06 + j.250)(.090 + j.650)}{.150 + j.900} = .0382 +$$

Por lo que

$$Z = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .0338 + j.2140 & .0210 + j.0974 \\ .0210 + j.0974 & .0382 + j.180 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los coeficientes de pérdidas son

$$B_{11} = \frac{.0338}{(1.20)^2} = .0235$$

$$B_{12} = \frac{.0210 \times \text{coseno}\,(12.8484^\circ - 10^\circ)}{1.2222 \times 1.2} = .0143$$

$$B_{21} = \frac{.0210 \times \text{coseno}\,(10^\circ - 12.8484^\circ)}{1.2 \times 1.2222} = .0143$$

$$B_{22} = \frac{.0382}{(1.2222)^2} = .0256$$

$$\frac{dP_{\text{pérdidas}}}{dP_1} = 2 \times .0235P_1 + 2 \times .0143P_2$$

$$= .0470P_1 + .0286P_2$$

$$\frac{dP_{\text{pérdidas}}}{dP_2} = 2 \times .0143P_1 + 2 \times .0256P_2$$

$$= .0286P_1 + .0512P_1$$

$$L_1 = \frac{1}{1 - .0470P_1 - .0286P_2}$$

$$L_2 = \frac{1}{1 - .0286P_1 - .0512P_2}$$

$$\lambda_1' = \frac{3.0P_1 + 3.5}{1 - .0470P_1 - .0286P_2}$$

$$\lambda_2' = \frac{2.8P_2 + 3.2}{1 - .0286P_1 - .0512P_2}$$

Para calcular la potencia de cada generador se usa el criterio de que todos los generadores deben tener el mismo costo incremental en la carga. Es decir se usa la ecuación 5.17.

$$\lambda_1' = \lambda_2' = \lambda_3' = \ldots\ldots = \lambda_n'$$

Cada uno de estos costos incrementales requiere de una potencia en el respectivo generador y la potencia total generada debe ser igual a la demanda total, la cual es igual a la potencia de la carga más la potencia perdida en las líneas de transmisión.

Un método sencillo para calcular las potencias generadas es asumir un valor de λ' igual para todos los generadores y de las ecuaciones de $\lambda' = f(P)$ calcular las potencias de cada generador. La suma de estas potencias debe ser igual a la demanda. De no serlo se asume un nuevo valor de λ' y se repite el procedimiento. Así por tanteo se consigue la potencia de cada generador.

EJEMPLO 5

En el problema del Ejemplo 3 calcular la potencia de cada generador en una iteración.

Se debe calcular primero la potencia de la carga y las pérdidas en las líneas de transmisión para determinar la demanda.

$$I_{13} = \frac{V_1 - V_3}{Z_{13}} = \frac{1.03\angle 0^\circ - 1.00\angle -3.0^\circ}{.0650 + j.1726}$$

$$= .3308\angle -10.3027^\circ$$

$$I_{23} = \frac{V_2 - V_3}{Z_{23}} = \frac{1.04\angle -2.0^\circ - 1.00\angle -3.0^\circ}{.0112 + j.0450}$$

$$= .9444\angle -54.5892^\circ$$

$$I_{34} = I_{13} + I_{23} = .3308\angle -10.3027^\circ + .9444\angle -54.5892^\circ$$

$$= .8727 - j.8289 = 1.2036\angle -43.5255^\circ$$

$$V_4 = V_3 - Z_{34} I_{34} =$$

$$= 1.00\angle -3.0^\circ - (.0108 + j.0360)(.8727 - j.8289)$$

$$= .9622\angle -4.4563^\circ$$

$$S = V_4 I_{34}^* = .9622\angle -4.4563^\circ \times 1.2036\angle 43.5255^\circ$$

$$= .8991 + j.7299$$

Por lo que

$$P_{carga} = .8991 \text{ pu} \qquad Q_{carga} = .7299 \text{ pu}$$

Las pérdidas son

$$P_{pérdidas} = R_{13}|I_{13}|^2 + R_{23}|I_{23}|^2 + R_{34}|I_{34}|^2$$

$$= .0650 \times (.3308)^2 + .0112 \times (.9444)^2$$

$$+ .0108 \times (1.2036)^2 = .0327$$

$$\text{Demanda} = P_{carga} + P_{pérdidas} = .8991 + .0327 = .9318$$

Se asume $\lambda_1' = \lambda_2' = 6.5$, por lo que

$$6.5(1 - .1428P_1 - .0202P_2) = 4.2P_1 + 3.0$$

$$6.5(1 - .0202P_1 - .0406P_2) = 3.5P_2 + 5.5$$

de donde

$$5.1282P_1 + .1313P_2 = 3.5$$

$$.1313P_1 + 3.7359P_2 = 1.0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$P_1 = .6763 \qquad P_2 = .2421$$

La potencia generada es

$$P_1 + P_2 = .6763 + .2421 = .9184 \neq .9318$$

Después de algunos tanteos se asume $\lambda' = 6.5318$ y se obtiene el sistema de ecuaciones

$$5.1327P_1 + .1321P_2 = 3.5318$$

$$.1321P_1 + 3.7652P_2 = 1.0318$$

de donde

$$P_1 = .6817 \qquad P_2 = .2501$$

$$P_1 + P_2 = .6817 + .2501 = .9318 = \text{Demanda}$$

Se puede resolver este problema también por el método de Newton-Raphson.

Con la ayuda del Ejemplo 6 del Capítulo 2 se tiene que

$$\begin{bmatrix} 3.0 - \lambda(1 - .1428P_1 - .0202P_2) + 4.2P_1 \\ 5.5 - \lambda(1 - .0202P_1 - .0406P_2) + 3.5P_2 \\ .9318 - (P_1 + P_2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - .1428P_1 - .0202P_2 & -.1428\lambda - 4.2 & -.0202\lambda \\ 1 - .0202P_1 - .0406P_2 & -.0202\lambda & -.0406\lambda - 3.5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix}$$

Lo cual requiere de valores iniciales λ, P_1 y P_2. Estas condiciones iniciales se pueden conseguir asumiendo que no hay pérdidas en las líneas de transmisión, por lo que

$$\lambda_1 = 4.2P_1 + 3.0$$

$$\lambda_2 = 3.5P_2 + 5.5$$

$$P_1 + P_2 = .8991$$

Si hacemos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\lambda - 4.2P_1 = 3.0$$

$$\lambda - 3.5P_2 = 5.5$$

$$P_1 + P_2 = .8991$$

y

$$\begin{bmatrix} 1 & -4.2 & 0 \\ 1 & 0 & -3.5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 5.5 \\ .8991 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\lambda = 6.0801 \qquad P_1 = .7374 \qquad P_2 = .1657$$

Estas condiciones iniciales se usan en las ecuaciones anteriores. En la primea iteración:

$$\begin{bmatrix} .6573 \\ .1308 \\ .0327 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8918 & -5.0682 & -.1228 \\ .9785 & -.1228 & -3.7469 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\Delta\lambda = .4522 \qquad \Delta P_1 = -.0522 \qquad \Delta P_2 = .0849$$

por lo que

$$\lambda^1 = \lambda^0 + \Delta\lambda = 6.0801 + .4522 = 6.5323$$

$$P_1^1 = P_1^0 + \Delta P_1 = .7334 - .0522 = .6812$$

$$P_2^1 = P_2^0 + \Delta P_2 = .1657 + .0849 = .2508$$

En la segunda iteración:

$$\begin{bmatrix} -.0027 \\ .0019 \\ -.0002 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8977 & -5.1328 & -.1320 \\ .9761 & -.1320 & -3.7652 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\Delta\lambda = -.0005 \qquad \Delta P_1 = .0005 \qquad \Delta P_2 = -.0007$$

y

$$\lambda^1 = \lambda^0 + \Delta\lambda = 6.5323 - .0005 = 6.5318$$

$$P_1^2 = P_1^1 + \Delta P_1 = .6812 + .0005 = .6817$$

$$P_2^2 = P_2^1 + \Delta P_2 = .2508 - .0007 = .2501$$

Lo cual es la misma solución obtenida por tanteo. Se observa que el método converge muy rápidamente.

Hasta ahora se ha conseguido la distribución de las potencias de los generadores para suplir a una carga constante más las pérdidas en las líneas de transmisión. Pero el proceso no ha terminado aún, porque hay que determinar si esta distribución corresponde a un estado real del sistema. Para ello se tomará a uno de los generadores como barra oscilante, especificándose la magnitud y ángulo

de su voltaje, y al otro generador como barra controlada, bien de generación o de carga, especificando entre otras cosas su potencia de generación calculada en el despacho económico. La barra en donde está colocada la carga se tomará como barra de carga constante. Luego por métodos de solución de ecuaciones alineales se determinarán los voltajes del sistema y la potencia del generador de la barra oscilante. Si esta potencia coincide con la calculada en el despacho económico, el problema estará completamente resuelto. De no coincidir hay que repetir el procedimiento usando los nuevos voltajes para calcular las nuevas pérdidas en las líneas de transmisión. El procedimiento continuará hasta que la potencia de la barra oscilante calculada en el estado del sistema coincida con la misma potencia calculada en el despacho económico.

Se ha explicado la forma de obtener el factor de penalización y las potencias de los generadores a partir del modelo de la figura 5.3, el cual representa el equivalente de rastrillo de un sistema de varios generadores y una sola carga, tomando a ésta como referencia para determinar a la matriz impedancia de barra. Se explicará ahora la forma de llegar a este modelo a partir de un sistema de potencia con varios generadores, varias cargas y con cualquier referencia.

Se inicia el proceso con el modelo original de varios generadores y varias cargas en donde se toma un generador cualquiera como referencia para formar la matriz impedancia de barra. No debe tomarse a una de las cargas (ni a un generador que tenga una carga) como referencia, porque al colocarla a tierra para conseguir la matriz impedancia de barra, esta carga no podrá formar parte de la transformación. A este modelo original con un generador como referencia se le llama marco de referencia 1. Este modelo puede reducirse a un equivalente de una sola carga y el mismo generador como referencia (lo cual se llama marco de referencia 2) en la forma siguiente: Se obtiene la relación de corrientes entre los dos marcos de referencia y de allí se consigue una matriz de conexión C_{12} que relaciona a ambos marcos de referencia.

Sea el modelo de la figura 5.4 compuesto por varios generadores y varias cargas en donde la referencia es el generador G_1 y se desea obtener un modelo similar pero con todas las cargas agrupadas en una sola, como se indica en la figura 5.5.

De los marcos de referencia 1 y 2 se observa que

$$I_1^2 = I_1^1 \qquad I_2^2 = I_2^1 \qquad I_3^2 = I_3^1$$

$$I_1^2 = [\, I_{L1} + I_{L2} + I_{L3} \,]^1$$

Además

$$I_{L1} = K_1 I_L \qquad I_{L2} = K_2 I_L \qquad I_{L3} = K_3 I_L$$

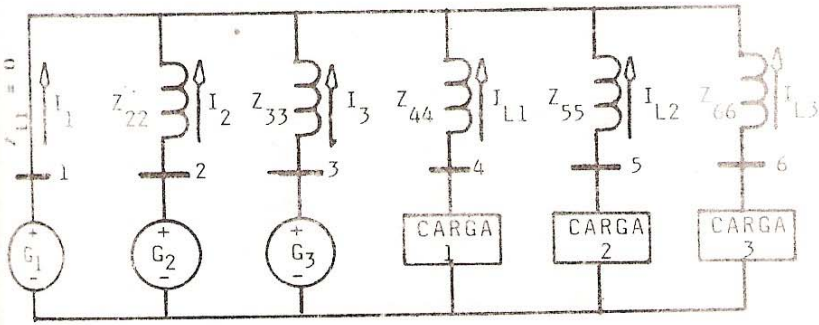


Fig. 5.4 Marco de Referencia 1

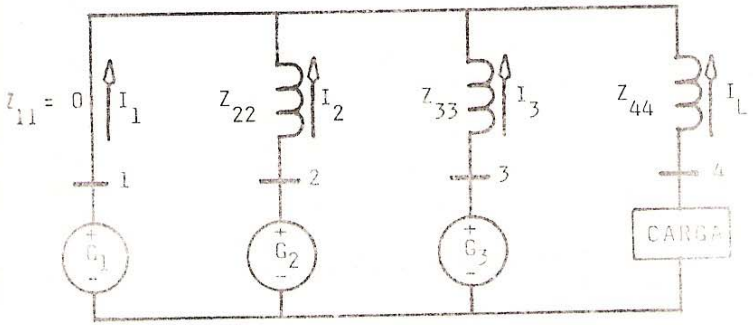


Fig. 5.5 Marco de Referencia 2

por lo que

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_{L1} \\ I_{L2} \\ I_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_1 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 \\ 0 & 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_L \end{bmatrix}$$

La matriz de conexión que relaciona a los marcos de referencia 1 y 2 es entonces

$$\underset{\sim}{C}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_1 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 \\ 0 & 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \qquad 5.33$$

y la matriz impedancia de barra en el marco de referencia 2 es

$$\underset{\sim}{Z}^2 = \underset{\sim}{C}^{*T}_{12} \; \underset{\sim}{Z}^1 \; \underset{\sim}{C}_{12} \qquad 5.34$$

La dimensión de la matriz Z^1 es igual al número de generadores más el número de cargas, siendo su fila y su columna correspondiente al generador de referencia igual a cero. Una barra mixta se considerará a la vez como barra de carga y barra de generación, generando la matriz Z^1 dos filas y dos columnas exactamente iguales. A los generadores se le asignarán siempre los primeros números continuos, mientras que a las cargas se le asignarán siempre los últimos números continuos.

Se obtiene ahora la matriz impedancia de barra con la carga en la referencia (lo cual se llama marco de referencia 3 y cuyo modelo se enseña en la figura 5.6) en la forma siguiente: Se obtiene la relación de corrientes entre

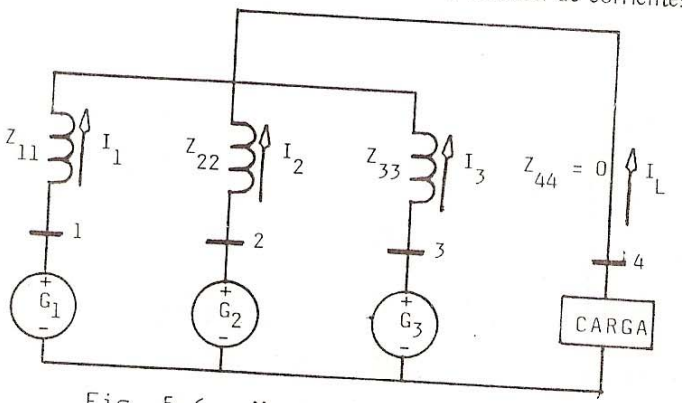


Fig. 5.6 Marco de Referencia 3

los marcos de referencia 2 y 3 y de allí se consigue una matriz de conexión que relaciona a ambos marcos de referencia.

De los marcos de referencias 2 y 3 se observa que

$$I_1^3 = I_1^2 \qquad I_2^3 = I_2^2 \qquad I_3^3 = I_3^2$$

$$[-I_1 - I_2 - I_3]^3 = I_L^2$$

Se consigue entonces una matriz de conexión $\underset{\sim}{C}_{23}$ que relacione a ambos marcos de referencia.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$\underset{\sim}{C}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad 5.35$$

Y la matriz impedancia de barra en el marco de referencia 3 es

$$\underset{\sim}{Z}^3 = \underset{\sim}{C}^{*T}_{23} \; \underset{\sim}{Z}^2 \; \underset{\sim}{C}_{23} \qquad 5.36$$

La matriz $\underset{\sim}{Z}$ en el marco de referencia 2 es una matriz cuadrada con dimensiones de número de generadores más carga, siendo su fila y su columna correspondiente al generador de referencia igual a cero. La matriz Z en el marco de referencias 3 también es una matriz cuadrada cuya dimensión es el número de generadores. Las matrices de ambos marcos de referencia no son necesariamente simétricas.

Ahora se puede hacer el análisis del despacho económico de carga para un sistema de varias cargas y de varios generadores. Se forma la matriz impedancia de barra Z^1 del sistema original tomando a un generador como referencia y mediante las diferentes transformaciones se obtiene el modelo de la figura 5.3 para obtener el factor de penalización y hacer la distribución de las potencias de los generadores. De aquí en adelante todo es igual a lo explicado en los Ejemplos 3, 4 y 5.

A continuación se describe un método iterativo para determinar el despacho económico de carga de un sistema de varios generadores y varias cargas con las ideas antes expuestas:

1. Obtenga la matriz impedancia de barra Z en el marco de referencia 1, tomando a uno de los generadores como referencia. Esta matriz contiene a las impedancias de las líneas y de los transformadores, pero ignora a las impedancias de los generadores y de las cargas.

2. Corra un programa de flujo de potencia para determinar el estado del sistema, especificando arbitrariamente la potencia de cada uno de los generadores menos el de la barra oscilante.

3. Con la información anterior determine la corriente de cada una de las cargas y su relación con la corriente de carga total.

4. Obtenga la matriz de conexión C_{12} y por medio de ella la matriz Z en el marco de referencia 2.

5. Obtenga la matriz de conexión C_{23} y por medio de ella la matriz Z en el marco de referencia 3.

6. Con las magnitudes y ángulos de los voltajes de los generadores obtenidos en la parte 2 y con los valores de Z en el marco de referencia 3 calcule los coeficientes de pérdidas de transmisión B.

7. Consiga la expresión $dP_{pérdidas}/dP_k$ en función de las potencias generadas.

8. Consiga los factores de penalización L_k y las expresiones de δ_k'.

9. Determine las pérdidas de potencia en las líneas de transmisión mediante las fórmulas derivadas anteriormente o mediante un estado reciente del sistema.

10. Asuma un valor de δ' igual para todos los generadores y determine las potencias $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$.

11. Determine si la demanda, es decir la potencia de carga más las pérdidas es igual a la potencia generada encontrada en la parte 10. De no serlo regrese al punto 10 y asuma un valor diferente de λ'.

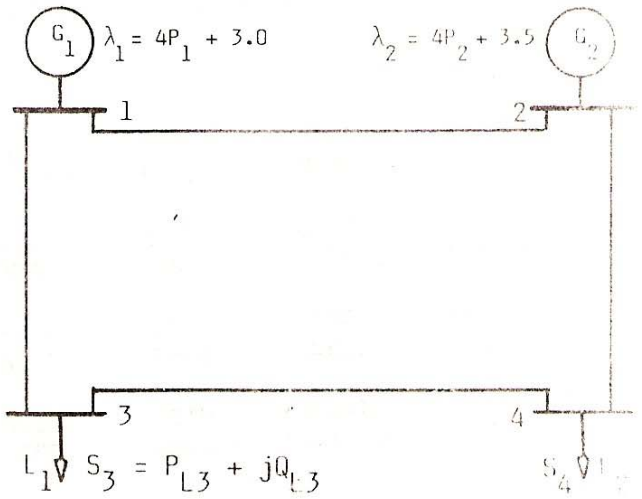
12. Como otra alternativa para los puntos 10 y 11 puede usar el método de Newton-Raphson para calcular los valores de λ', $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$.

13. Hasta este punto se han calculado las potencias generadas $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ para un valor igual de λ', pero no se sabe si esta distribución corresponde a un estado real del sistema. Para ello es necesario correr un nuevo programa de despacho de carga para determinar el nuevo estado del sistema. Esto se hace especificando todas las potencias generadas encontradas en la parte 10, con excepción de la potencia P_1 de la barra oscilante. Si el resultado de P_1 del estado corresponde a la potencia P_1 calculada en la parte 10, el problema estará resuelto. De no ser así regrese al punto 3 ó al punto 6 según la precisión deseada.

14. Demuestre que ha efectuado un despacho económico de potencia.

EJEMPLO 6

Hacer un despacho económico de potencia del siguiente sistema:



Los datos del sistema son los siguientes:

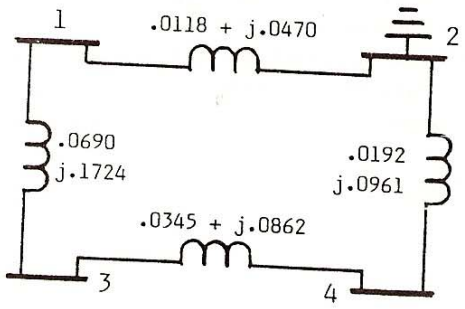
$Z_{12} = .0118 + j.0470$ $\quad Z_{13} = .0690 + j.1724$

$Z_{24} = .0192 + j.0961$ $\quad Z_{34} = .0345 + j.0862$

$V_1 = 1.05\angle 0^\circ$ $\quad |V_2| = 1.0$ $\quad P_2 = .8$

$P_{L3} = .5$ $\quad Q_{L3} = .5$ $\quad P_{L4} = .4$ $\quad Q_{L4} = .6$

1. Tomando al generador G_2 como referencia se obtiene la red de la figura siguiente.



De la figura anterior se obtiene la siguiente matriz impedancia de barra en el marco de referencia 1.

$$\underset{\sim}{Z}^1 = \begin{array}{c} \\ G_1 \\ G_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} G_1 & G_2 & L_1 & L_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .0109 + j.0416 & .0000 + j.0000 & .0045 + j.0213 & .0013 + j.0111 \\ .0000 + j.0000 & .0000 + j.0000 & .0000 + j.0000 & .0000 + j.0000 \\ .0045 + j.0213 & .0000 + j.0000 & .0326 + j.0997 & .0125 + j.0526 \\ .0013 + j.0111 & .0000 + j.0000 & .0125 + j.0526 & .0176 + j.0735 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. Con los valores especificados en las barras se consigue el siguiente estado del sistema.

$P_1 = .1632$ $\quad V_2 = 1.0\angle 1.4011^\circ$

$V_3 = .92480\angle -1.7445^\circ$ $\quad V_4 = .92781\angle -1.0056^\circ$

3. Las corrientes en cada una de las cargas y su relación con la corriente de carga total es

$$I_{L3} = \frac{S_{L3}^*}{V_3^*} = \frac{.5 - j.5}{.9248\angle 1.7445^\circ} = .7646\angle -46.7445^\circ$$

$$I_{L4} = \frac{S_{L4}^*}{V_4^*} = \frac{.4 - j.6}{.9278\angle 1.0056^\circ} = .7772\angle -57.3115^\circ$$

$$I_L = I_{L3} + I_{L4} = .7646\angle -46.7445^\circ + .7772\angle -57.3115^\circ$$

$$= 1.5352\angle -52.0754^\circ$$

$$K_1 = \frac{I_{L3}}{I_L} = \frac{.7646\angle -46.7445^\circ}{1.5352\angle -52.0754^\circ} = .4958 + j.0463$$

$$K_2 = \frac{I_{L4}}{I_L} = \frac{.7772\angle -57.3115^\circ}{1.5352\angle -52.0754^\circ} = .5042 - j.0463$$

4. La matriz de conexión C_{12} es

$$\underset{\sim}{C}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .4958 + j.0463 \\ 0 & 0 & .5042 - j.0463 \end{bmatrix}$$

La conjugada y transpuesta de $\underset{\sim}{C}_{12}$ es

$$\underset{\sim}{C}_{12}^{*T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .4958 - j.0463 & .5042 \; j.0463 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto $\underset{\sim}{Z}^2 = \underset{\sim}{C}_{12}^{*T} \; \underset{\sim}{Z}^1 \; \underset{\sim}{C}_{12}$ se obtiene la matríz impedancia de barra en el marco de referencia 2.

$$\underset{\sim}{Z}^2 = \begin{array}{c} \\ G_1 \\ G_2 \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G_1 & G_2 & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} .0109 \; j.0416 & .0000 \; j.0000 & .0024 \; j.0163 \\ .0000 \; j.0000 & .0000 \; j.0000 & .0000 \; j.0000 \\ .0034 \; j.0160 & .0000 \; j.0000 & .0188 \; j.0696 \end{bmatrix} \end{array}$$

5. La matriz $\underset{\sim}{C}_{23}$ y su conjugada y transpuesta son

$$\underset{\sim}{C}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{C}_{23}^{*T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto $\underset{\sim}{Z}^3 = \underset{\sim}{C}_{23}^{*T} \; \underset{\sim}{Z}^2 \; \underset{\sim}{C}_{23}$ se obtiene la matriz impedancia de barra en el marco de referencia 3.

$$\underset{\sim}{Z}^3 = \begin{array}{c} \\ G_1 \\ G_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} G_1 & G_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .0239 + j.0789 & .0164 + j.0533 \\ .0154 + j.0536 & .0188 + j.0696 \end{bmatrix} \end{array}$$

6. Los coeficientes de pérdidas de transmisión B, calculados con la ecuación 5.30 son

$$B_{11} = \frac{R_{11} \text{ coseno } (\theta_1 - \theta_1)}{|V_1||V_1|} = \frac{.0239}{(1.05)^2} = .0217$$

$$B_{12} = \frac{R_{12} \text{ coseno } (\theta_2 - \theta_1)}{|V_2||V_1|} =$$

$$= \frac{.0164 \text{ coseno } (1.4011º - 0º)}{1.0 \times 1.05} = .0156$$

$$B_{21} = \frac{R_{21} \text{ coseno } (\theta_1 - \theta_2)}{|V_1||V_2|}$$

$$= \frac{.0154 \text{ coseno } (0º - 1.4011º)}{1.05 \times 1.0} = .0147$$

$$B_{22} = \frac{R_{22} \text{ coseno } (\theta_2 - \theta_2)}{|V_2||V_2|} = \frac{.0188}{(1.0)^2} = .0188$$

7. De la ecuación 5.32 se obtiene

$$\frac{dP_{\text{pérdidas}}}{dP_1} = 2B_{11}P_1 + 2B_{12}P_2 = 2(.0217P_1 + .0156P_2)$$

$$= .0434P_1 + .0312P_2$$

$$\frac{dP_{\text{pérdidas}}}{dP_2} = 2B_{21}P_1 + 2B_{22}P_2 = 2(.0147P_1 + .0188P_2)$$

$$= .0294P_1 + .0376P_2$$

8. De las ecuaciones 5.12 y 5.16 se tiene

$$\lambda_1' = \lambda_1 \times \frac{1}{1 - \frac{dP_{pérdidas}}{dP_1}}$$

de donde

$$\lambda_1 = \lambda_1'\left(1 - \frac{dP_{pérdidas}}{dP_1}\right)$$

pero

$$\lambda_1 = 4P_1 + 3.0$$

por lo que

$$4P_1 + 3.0 = \lambda_1'(1 - .0434P_1 - .0312P_2)$$

De igual manera

$$\lambda_2 = \lambda_2'\left(1 - \frac{dP_{pérdidas}}{dP_2}\right)$$

y

$$4P_2 + 3.5 = \lambda_2'(1 - .0294P_1 - .0376P_2)$$

9. De la información de la parte 2 se tiene

Pérdidas = Generación − Carga = .1632 + .8 −(.5+.4) = −.0632

$$= .1632 + .8 - (.5 + .4) = .0632$$

10. Se asume λ' = 5.0, por lo que las expresiones de la parte 8 se convierten en

$$4P_1 + 3.0 = 5.0(1 - .0434P_1 - .0312P_2)$$

y

$$4P_2 + 3.5 = 5.0(1 - .0294P_1 - .0376P_2)$$

Simplificando las ecuaciones anteriores se tiene

$$4.2173P_1 + .1560P_2 = 2.0$$

$$.1470P_1 + 4.1880P_2 = 1.5$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{17.6391}\begin{bmatrix} 4.1880 & -.1560 \\ -.1470 & 4.2173 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} .4616 \\ .3420 \end{bmatrix}$$

11. Generación = $P_1 + P_2$ = .4616 + .3420 = .8036

Demanda = Carga + Pérdidas = .5 + .4 + .0632 = .9632

La demanda es mayor que la generación. Se asume entonces un nuevo valor de λ' = 5.36, valor mayor que el anterior y se repite el procedimiento de la parte 10.

$$4P_1 + 3.0 = 5.36(1 - .0434P_1 - .0312P_2)$$

$$4P_2 + 3.5 = 5.36(1 - .0294P_1 - .0376P_2)$$

de donde

$$4.2326P_1 + .1672P_2 = 2.36$$

$$.1576P_1 + 4.2015P_2 = 1.86$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{17.7569} \begin{bmatrix} 4.2015 & -.1672 \\ -.1576 & 4.2326 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.36 \\ 1.86 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} .5408 \\ .4224 \end{bmatrix}$$

Por lo que

Generación $= P_1 + P_2 = .5408 + .4224 = .9632$

La generación es entonces igual a la demanda

12. Se usa el método Newton-Raphson para substituir las partes 10 y 11.

Las ecuaciones son

$$\begin{bmatrix} 4.0P_1 + 3.0 - \lambda(1 - .0434P_1 - .0312P_2) \\ 4.0P_2 + 3.5 - \lambda(1 - .0294P_1 - .0376P_2) \\ .9632 - (P_1 + P_2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - .0434P_1 - .0312P_2 & -.0434\lambda - 4.0 & -.0312\lambda \\ 1 - .0294P_1 - .0376P_2 & -.0294\lambda & -.0376\lambda - 4.0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix}$$

Se calculan primero los valores iniciales

$$\begin{bmatrix} 1 & -4.0 & 0.0 \\ 1 & 0.0 & -4.0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 3.5 \\ .9 \end{bmatrix}$$

De donde

$\lambda^0 = 5.05$ $\quad P_1^0 = .5125$ $\quad P_2^0 = .3875$

Usando estos valores para la primera iteración:

$$\begin{bmatrix} .1734 \\ .1497 \\ .0632 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .9657 & -4.2192 & -.1576 \\ .9704 & -.1485 & -4.1899 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se tiene

$\Delta\lambda = .3091$ $\quad \Delta P_1 = .0283$ $\quad \Delta P_2 = .0349$

y

$\lambda^1 = \lambda^0 + \Delta\lambda = 5.05 + .3091 = 5.3591$

$P_1^1 = P_1^0 + \Delta P_1 = .5125 + .0283 = .5408$

$P_2^1 = P_2^0 + \Delta P_2 = .3875 + .0349 = .4224$

Estos valores se usan en la segunda iteración.

$$\begin{bmatrix} .0005 \\ .0008 \\ .0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .9634 & -4.2326 & -.1672 \\ .9682 & -.1576 & -4.2015 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se tiene

$\Delta\lambda = .0007$ $\quad \Delta P_1 = .0000$ $\quad \Delta P_2 = .0000$

y

$$\lambda^2 = \lambda^1 + \Delta\lambda = 5.3591 + .0007 = 5.3598$$

$$P_1^2 = P_1^1 + \Delta P_1 = .5408 + .0000 = .5408$$

$$P_2^2 = P_2^1 + \Delta P_2 = .4224 + .0000 = .4224$$

13. Se consigue ahora un nuevo estado del sistema especificando a

$$V_1 = 1.05\angle 0^\circ \qquad |V_2| = 1.0 \qquad P_2 = .4224$$

$$P_{L3} = .5 \qquad Q_{L3} = .5 \qquad P_{L4} = .4 \qquad Q_{L4} = .6$$

El nuevo estado es

$$P_1 = .53859 \qquad V_2 = 1.0\angle .4787^\circ$$

$$V_3 = .92438\angle -2.1827^\circ \qquad V_4 = .92730\angle -1.6907^\circ$$

Con estos valores se calculan los nuevos valores de I_{L_3} e I_{L_4} para obtener los nuevos valores de K_1 y K_2 y así poder calcular una nueva Z^3.

$$I_{L3} = \frac{S_{L3}^*}{V_3^*} = \frac{.5 - j.5}{.92438\angle 2.1827^\circ} = .7649\angle -47.1827^\circ$$

$$I_{L4} = \frac{S_{L4}^*}{V_4^*} = \frac{.4 - j.6}{.92730\angle 1.6907^\circ} = .7776\angle -58.0006^\circ$$

$$I_L = I_{L3} + I_{L4} = .7649\angle -47.1827^\circ + .7776\angle -58.0006^\circ$$

$$= 1.5357\angle -52.6339^\circ$$

$$K_1 = \frac{I_{L3}}{I_L} = \frac{.7649\angle -47.1827^\circ}{1.5357\angle -52.6339^\circ} = .4958 + j.0473$$

$$K_2 = \frac{I_{L4}}{I_L} = \frac{.7776\angle -58.0006^\circ}{1.5357\angle -52.6339^\circ} = .5042 - j.0473$$

Los valores de K_1 y K_2 para este problema son muy similares a los anteriores, por lo que se considera en esta situación que Z^3 no cambia sustancialmente. Tomando entonces la misma Z^3 anterior se calculan los nuevos valores de B.

$$B_{11} = \frac{R_{11}\ \text{coseno}(\Theta_1 - \Theta_1)}{|V_1||V_1|} = \frac{.0239}{(1.05)^2} = .0217$$

$$B_{12} = \frac{R_{12}\ \text{coseno}(\Theta_2 - \Theta_1)}{|V_2||V_1|}$$

$$= \frac{.0164\ \text{coseno}(.4787^\circ - 0^\circ)}{1.0 \times 1.05} = .0156$$

$$B_{21} = \frac{R_{21}\ \text{coseno}(\Theta_1 - \Theta_2)}{|V_1||V_2|}$$

$$= \frac{.0154\ \text{coseno}(0^\circ - .4787^\circ)}{1.05 \times 1.0} = .0147$$

$$B_{22} = \frac{R_{22}\ \text{coseno}(\Theta_2 - \Theta_2)}{|V_2||V_2|} = \frac{.0188}{(1.0)^2} = .0188$$

Se observa que estos valores son exactamente iguales a los anteriores a pesar de que el ángulo del voltaje del generador 2 varió. En situaciones como éstas no es necesario entonces calcular los coeficientes B en cada iteración.

Al no variar B las ecuaciones de la parte 8 siguen siendo las mismas, es decir

$$4P_1 + 3.0 = \lambda_1'(1 - .0434P_1 - .0312P_2)$$

$$4P_2 + 3.5 = \lambda_2'(1 - .0294P_1 - .0376P_2)$$

Del último estado del sistema se tiene

Generación = $P_1 + P_2 = .53859 + .4224 = .9610$
Pérdidas = Generación − Carga = .9610 − .9 = .0610
Se asume $\lambda' = 5.355$, por lo que

$$4.2324P_1 + .1671P_2 = 2.355$$

$$.1574P_1 + 4.2013P_2 = 1.855$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$P_1 = .5397 \qquad P_2 = .4213$$

Por lo que

Generación: $= P_1 + P_2 = .5397 + 4213 = .9610$

y la demanda es igual a la generación.

O usando el método de Newton-Raphson tomando como valores iniciales los últimos valores de λ, P_1 y P_2 de la iteración anterior, es decir

$$\lambda = 5.3598 \qquad P_1 = .5386 \qquad P_2 = .4224$$

Demanda $= P_1 + P_2 = .5386 + .4224 = .9610$

$$\begin{bmatrix} -.0095 \\ -.0002 \\ .0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .9634 & -4.2326 & -.1672 \\ .9683 & -.1576 & -4.2015 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo

$$\Delta\lambda = -.0050 \qquad \Delta P_1 = .0011 \qquad \Delta P_2 = -.0011$$

y

$$\lambda = 5.3548 \qquad P_1 = .5397 \qquad P_2 = .4213$$

lo cual es igual a la solución encontrada por tanteo.

Después de haber hecho esta nueva distribución de potencias generadas, se determina un nuevo estado del sistema especificando

$$V_1 = 1.05\angle 0º \qquad |V_2| = 1.0 \qquad P_2 = .4213$$

$$P_{L3} = .5 \qquad Q_{L3} = .5 \qquad P_{L4} = .4 \qquad Q_{L4} = .6$$

El nuevo estado del sistema es

$$P_1 = .5397 \qquad V_2 = 1.0\angle .4760º$$

$$V_3 = .92438\angle -2.1840º \qquad V_4 = .9273\angle -1.6927º$$

Como el valor de P_1 del estado del sistema coincide con el valor de P_1 calculada en la distribución del despacho económico, el problema está resuelto.

El aumento del costo de la potencia generada por el generador 1 es

$$\int_{.1632}^{.5397} (4P_1 + 3.0)dP_1 = 2P_1^2 + 3.0P_1 \Big|_{.1632}^{.5397} = 1.6584$$

La disminución del costo de la potencia generada por el generador 2 es

$$\int_{.4213}^{.8} (4P_2 + 3.5)dP_2 = 2P_2^2 + 3.5P_2 \Big|_{.4213}^{.8} = 2.2505$$

El ahorro es entonces

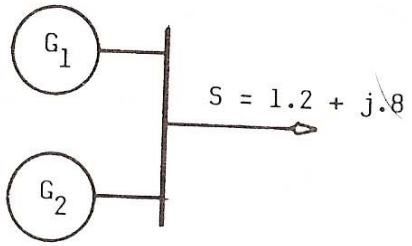
$$\text{Ahorro} = 1.6584 - 2.2505 = -.5921 \text{ pu.}$$

PROBLEMAS

1. El costo de combustible de dos generadores que alimentan a una carga de $S = 1.2 + j.8$ es

$$F_1 = 2.5P_1^2 + 4.1P_1 + 3.0$$

$$F_2 = 3.0P_2^2 + 2.5P_2 + 6.0$$



Calcular

a) La potencia activa de cada generador
b) El costo incremental
c) El costo total de combustible

2. En la siguiente red usando el método estudiado de despacho económico, calcular en una iteración.

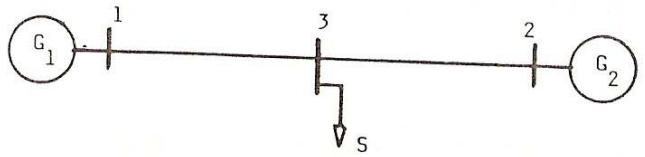
a) Los coeficientes de pérdidas de transmisión.
b) El factor de penalización y el costo incremental en la carga de cada generador en función de las potencias generadas.
c) La potencia de cada generador.

Los datos del sistema son:

$Z_{13} = .0116 + j.0465$ $\qquad Z_{23} = .0680 + j.1734$

$\lambda_1 = 3.0P_1 + 5.0$ $\qquad \lambda_2 = 4.0P_2 + 3.0$

$S = .9 + j.8$ $\qquad V_1 = 1.04\angle -3.0º$ $\qquad V_3 = 1.0\angle -4.0º$



3. Los datos del sistema siguiente son:

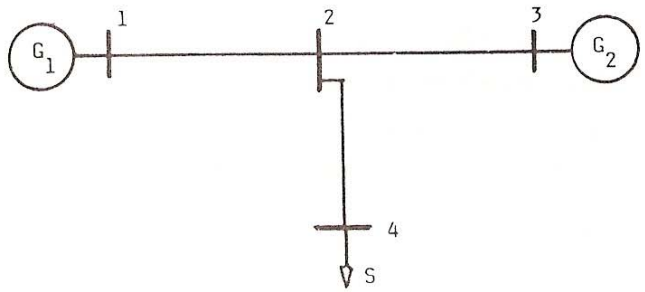
$Z_{12} = .0650 + j.1736$ $\qquad Z_{23} = .0108 + j.0450$

$Z_{24} = .0112 + j.0450$

$S = .8 + j.5$ $\qquad V_1 = 1.03\angle 5.0º$ $\qquad V_4 = 1.0\angle 0º$

El costo de combustible está expresado por

$F_1 = 2P_1^2 + 3.0P_1 + 5.0$ $\qquad F_2 = 1.6P_2^2 + 5.0P_2 + 6.0$



Usando el método estudiado de despacho económico, calcular en una iteración:

a) Los coeficientes de pérdidas de transmisión.
b) El factor de penalización y el costo incremental de cada generador en la carga en función de las potencias generadas.
c) La potencia de cada generador.

4. Calcular la potencia de cada generador en el problema del Ejemplo 4.

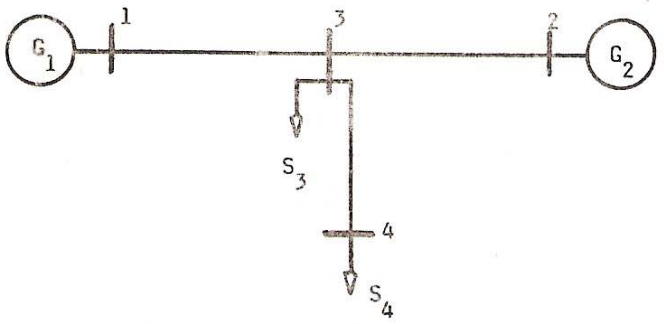
5. Los datos del sistema siguiente son:

$Z_{13} = .0112 + j.0350$ $\qquad Z_{23} = .0250 + j.0660$

$Z_{34} = .0600 + j.1510$ $\qquad V_2 = 1.0\angle 8.0º$ $\qquad V_4 = .98\angle -3.0$

$\lambda_1 = 3.0P_1 + 3.5$ $\lambda_2 = 2.8P_2 + 3.2$

$S_3 = .5 + j.3$ $S_4 = .8 - j.6$



Usando el método estudiado de despacho económico calcular en una iteración:

a) Los coeficientes de pérdidas de transmisión.
b) El factor de penalización y el costo incremental de cada generador en la carga en función de las potencias generadas.
c) La potencia de cada generador.

6. El sistema que se indica tiene las siguientes características en valores por unidad.

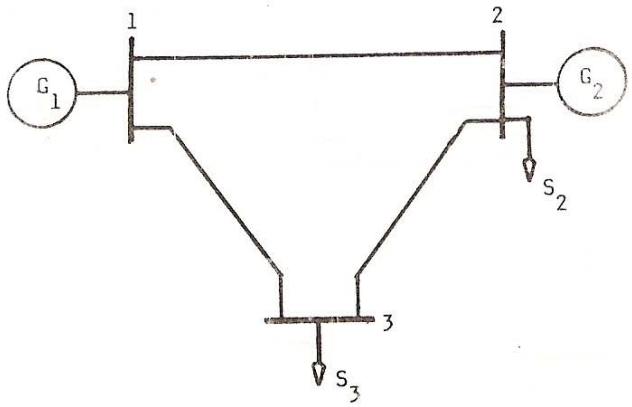
$Z_{12} = .03 + j.100$ $Z_{13} = .04 + j.120$

$Z_{23} = .05 + j.160$ $V_1 = 1.045\angle 0º$ $V_3 = 1.0\angle -2.85$

$\lambda_1 = 2.5P_1 + 3.6$ $\lambda_2 = 4.0P_2 + 5.2$

$S_3 = .9 + j.5$ $S_2 = .4 + j.6$

a) Usando el método estudiado de despacho económico calcular la potencia de cada generador en una iteración.
b) Hacer un despacho económico completo.



7. Las características del sistema de potencia que se indica son las siguientes:

$Z_{12} = .126 + j.409$ $Z_{14} = .119 + j.490$

$Z_{23} = .112 + j.451$ $Z_{45} = .100 + j.455$

$Z_{35}(a) = .106 + j.307$ $Z_{35}(b) = .125 + j.451$

$\lambda_1 = 3.9P_1 + 6.1$ $\lambda_2 = 4.8P_2 + 5.4$

$\lambda_3 = 5.5P_3 + 5.9$ $S_2 = .60 + j.50$

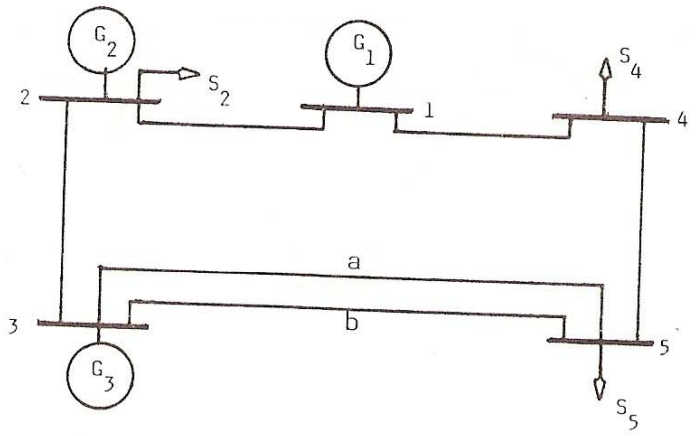
$S_4 = .52 + j.43$ $S_5 = .37 + j.51$

El estado inicial del sistema es

$V_1 = 1.0\angle 0º$ $|V_2| = 1.042$ $|V_3| = 1.052$

$P_{G2} = .45$ $P_{G3} = .35$

Con la ayuda del programa FLUJO3 hacer un despacho económico completo.



8. En un sistema de potencia de n generadores y una sola carga, la cual es tomada como referencia, obtener la expresión

$$\frac{dQ_{pérdidas}}{dQ_k}$$

(Considerar $R_{ki}\ c_i\ d_k = R_{ki}\ d_i\ c_k$)

CAPITULO VI

FALLAS SIMETRICAS

1. INTRODUCCION

En los sistemas de potencia pueden ocurrir diferentes tipos de fallas, tales como fallas trifásicas, fallas de línea a tierra, fallas de línea a línea y fallas de línea a línea y a tierra. Las fallas trifásicas o fallas simétricas ocurren sólo ocasionalmente. Sin embargo, en algunas situaciones es suficiente analizar una falla de cualquier tipo como una falla trifásica, ya que esto dará una idea bastante clara de las consecuencias de esa falla. Por otra parte, las técnicas desarrolladas para el análisis de las fallas simétricas podrían extenderse para abarcar también el análisis de las fallas asimétricas.

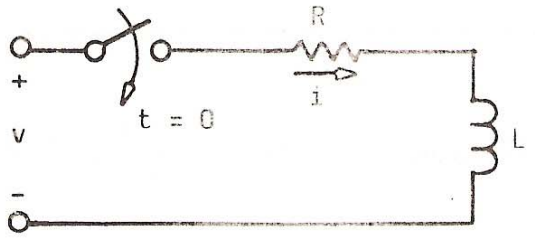
2. CORRIENTES EN UN CIRCUITO RL

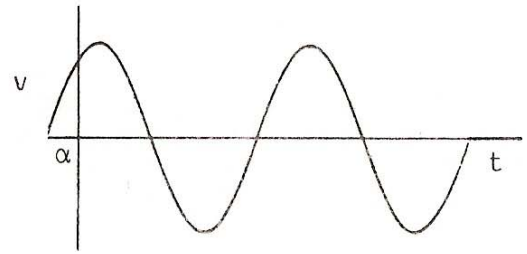
Un problema importante es aquel en donde la máquina sincrónica actúa en condiciones de fallas simétricas. Antes de analizar en detalle esta situación se comenzará por estudiar el estado transitorio en un circuito RL simple y más adelante se aprovecharán los resultados de este análisis para estudiar el comportamiento de la máquina sincrónica sometida a fallas trifásicas.

A un circuito RL se le aplica un voltaje

$$v = |V_{max}|\ \text{seno}(\omega t + \alpha)$$

siendo α el ángulo entre el cero ascendente de la onda y el origen, como se muestra en la figura 6.1.





t=0 Fig. 6.1

La ecuación de voltaje es

$$v(t) = |V_{max}| \text{ seno}(\omega t + \alpha)$$

$$= R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} \qquad 6.1$$

La solución completa de la corriente es la suma de la solución permanente más la solución transitoria, es decir

$$i(t) = i_p(t) + i_t(t) \qquad 6.2$$

Se tiene que

$$I_p = \frac{V_{max}}{Z} = \frac{|V_{max}|\angle\alpha}{|Z|\angle\theta} = \frac{|V_{max}|\angle\alpha - \theta}{|Z|} \qquad 6.3$$

por lo que

$$i_p(t) = \frac{|V_{max}|}{|Z|} \text{ seno}(\omega t + \alpha - \theta) \qquad 6.4$$

Además

$$i_t(t) = K\,e^{-\frac{R}{L}t} \qquad 6.5$$

La solución completa es entonces

$$i(t) = K\,e^{-(R/L)t} + \frac{|V_{max}|}{|Z|} \text{ seno}(\omega t + \alpha - \theta) \qquad 6.6$$

La constante K se determina de las condiciones iniciales.

$$\text{a } t = 0 \qquad i(0) = K + \frac{|V_{max}|}{|Z|} \text{ seno}(\alpha - \theta)$$

de donde

$$K = -\frac{|V_{max}|}{|Z|} \text{ seno}(\alpha - \theta) \qquad 6.7$$

y por último

$$i(t) = \frac{|V_{max}|}{|Z|}\left[\text{seno}(\omega t + \alpha - \theta) - e^{-(R/L)t}\text{seno}(\alpha - \theta)\right] \qquad 6.8$$

El valor instantáneo de la corriente depende, entre otras cosas, del valor del ángulo de la impedancia θ, y del valor del ángulo α. El primer término de la ecuación 6.8 varía senoidalmente con el tiempo y el segundo término decae exponencialmente con una constante de tiempo L/R. A este último término se le llama la componente directa de la corriente y su valor depende en un circuito dado del ángulo α, es decir del valor instantáneo del voltaje en el momento de cerrar el interruptor.

Si el ángulo $\alpha - \theta$ es cero en el momento de cerrar el interruptor, la componente directa no existe y la corriente total es

$$i(t) = \frac{|V_{max}|}{|Z|} \text{ seno } \omega t \qquad 6.9$$

tal como se indica en la figura 6.2.

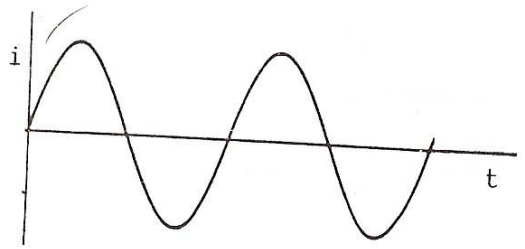


Fig. 6.2

Si en el momento de cerrar el interruptor el voltaje es tal de manera que $\alpha - \theta = \pi$, la componente directa tampoco existe y la corriente es

$$i(t) = \frac{|V_{max}|}{|Z|} \text{seno}(\omega t + \pi) = - \frac{|V_{max}|}{|Z|} \text{seno } \omega t \qquad 6.10$$

tal como se muestra en la figura 6.3.

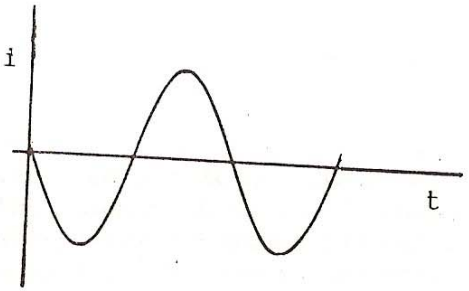


Fig. 6.3

Si el interruptor se cierra en un punto del voltaje tal que $\alpha - \theta = \pi/2$, la corriente es

$$i(t) = \frac{|V_{max}|}{|Z|} \text{seno}(\omega t + \pi/2) - \frac{|V_{max}|}{|Z|} e^{-(R/L)t}$$

$$= \frac{|V_{max}|}{|Z|} \cos \omega t - \frac{|V_{max}|}{|Z|} e^{-(R/L)t} \qquad 6.11$$

En el momento de cerrar el interruptor ($t = 0$), la componente directa de la corriente tiene un valor de $i_{cd} = -|V_{max}|/|Z|$, es decir el negativo del valor máximo de la componente senoidal. La corriente queda entonces desplazada en la forma como se enseña en la figura 6.4, tomando su valor simétrico a medida que desaparece la componente transitoria.

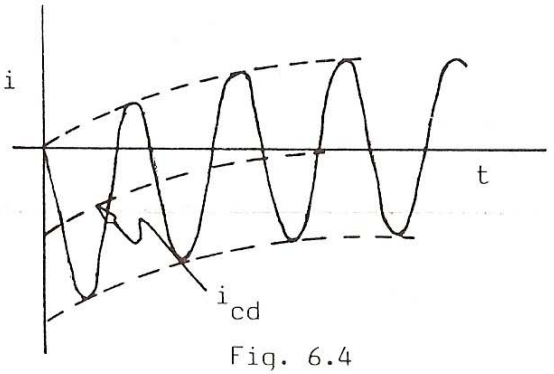


Fig. 6.4

Si en el momento de cerrar el interruptor el voltaje es tal de manera que $\alpha - \theta = -\pi/2$, la corriente es

$$i(t) = \frac{|V_{max}|}{|Z|} \text{seno}(\omega t - \pi/2) + \frac{|V_{max}|}{|Z|} e^{-(R/L)t}$$

$$= - \frac{|V_{max}|}{|Z|} \text{coseno } \omega t + \frac{|V_{max}|}{|Z|} e^{-(R/L)t} \qquad 6.12$$

y la componente directa en ese momento es

$$i_{cd} = \frac{|V_{max}|}{|Z|} \qquad 6.13$$

es decir, tiene un valor igual al valor máximo de la componente senoidal. La corriente queda entonces desplazada en la forma como se indica en la figura 6.5.

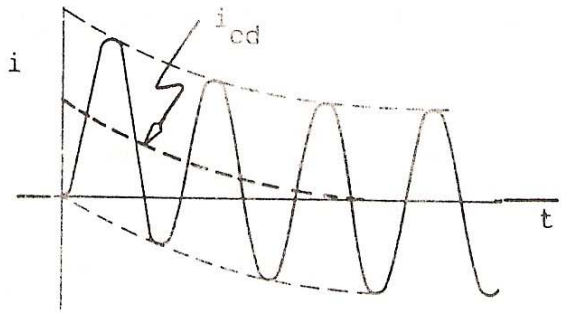


Fig. 6.5

En conclusión, la componente directa puede tener un valor absoluto desde cero hasta $|V_{max}|/|Z|$, dependiendo del valor instantáneo del voltaje a t = 0 y del ángulo de la impedancia.

EJEMPLO 1

Al circuito siguiente se le aplica una tensión de 50 voltios eficaces a una frecuencia de 100 rad/seg. Calcular:

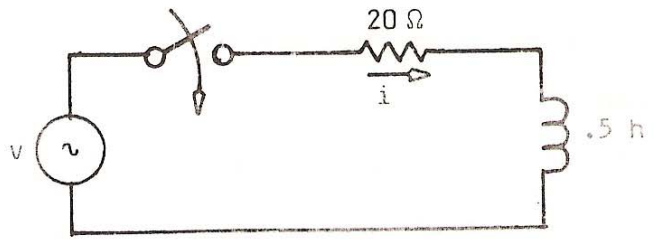
a) El valor de la componente directa de la corriente al cerrar el interruptor si el valor instantáneo del voltaje en ese momento es de 30 voltios.

b) El valor instantáneo de la tensión que produce una componente de corriente directa máxima al cerrar el interruptor.

c) El valor instantáneo de la tensión que no produce ninguna componente de corriente directa al cerrar el interruptor.

d) El valor de la corriente directa .1, 1 y 3 ciclos después de cerrar el interruptor, si éste se cierra cuando el valor de la tensión es cero.

e) El valor eficaz de la corriente total en las condiciones de la parte anterior.



a) $v(t) = |V_{max}| \operatorname{seno}(\omega t + \alpha)$

a t = 0: $\qquad 30 = 50\sqrt{2} \operatorname{seno} \alpha$

de donde

$$\alpha = 25.104^\circ,\ 154.896^\circ$$

$$Z = R + jL\omega = 20 + j.5 \times 100 = 20 + j50$$

$$= 53.852\angle 68.199^\circ$$

$$i_{cd} = -\frac{|V_{max}|}{|Z|} e^{-(R/L)t} \operatorname{seno}(\alpha - \theta)$$

a t = 0:

$$i_{cd} = -\frac{50\sqrt{2}}{53.852} \operatorname{seno}(25.104^\circ - 68.199^\circ) = .897 \text{ amps.}$$

$$= -\frac{50\sqrt{2}}{53.852} \operatorname{seno}(154.896^\circ - 68.199^\circ) = -1.311 \text{ A}$$

b)
La componente máxima de corriente directa se logra si seno $(\alpha - \theta) = \pm 1$, es decir $\alpha - \theta = \pm 90°$ por lo que

$$\alpha = 90º + 68.199º = 158.199º$$

$$= -90º + 68.199º = -21.801º$$

entonces

$$v = 50\sqrt{2} \text{ seno } 158.199º = 26.261 \text{ voltios}$$

$$= 50\sqrt{2} \text{ seno}(-21.801º) = -26.261 \text{ voltios}$$

c)
No existirá componente de corriente directa si

$$\alpha - \Theta = 0º$$

$$= 180º$$

por lo que

$$\alpha = 0º + 68.199º = 68.199º$$

$$\alpha = 180º + 68.199º = 248.199º$$

Entonces

$$v = 50\sqrt{2} \text{ seno } 68.199º = 65.653 \text{ voltios}$$

$$= 50\sqrt{2} \text{ seno } 248.199º = -65.653 \text{ voltios}$$

d)

a $t = 0$ si $v = 0$, $\alpha = 0$, por lo que

$$i_{cd} = -\frac{|V_{max}|}{|Z|} e^{-(R/L)t} \text{ seno}(-\Theta)$$

Tiempo de 1 ciclo = $2\pi/100$ = .0628 segundos
Tiempo de .1 ciclo = .00628 segundos
Tiempo de 3 ciclos = .1884 segundos

a 1 ciclo:

$$i_{cd} = -\frac{50\sqrt{2}}{53.852} e^{-(20/.5).00628} \text{ seno}(-68.199º)$$

$$= 1.2190 \times e^{-40 \times .00628} = .948 \text{ amperios}$$

a 1 ciclo:

$$i_{cd} = 1.2190 \times e^{-40 \times .0628} = .0988 \text{ amperios}$$

a 3 ciclos:

$$i_{cd} = 1.2190 \times e^{-40 \times .1884} = 6.5 \times 10^{-4} \text{ amperios}$$

e)
El valor máximo de la componente senoidal es

$$i_{pmax} = \frac{50\sqrt{2}}{53.852} = 1.313 \text{ amperios}$$

El valor eficaz de la corriente total es

$$I = \left[(i_{cd})^2 + \frac{(i_{pmax})^2}{2} \right]^{1/2}$$

a 1 ciclo:

$$I = \left[(.948)^2 + \frac{(1.313)^2}{2} \right]^{1/2} = 1.3269 \text{ amperios}$$

a 1 ciclo:

$$I = \left[(.0988)^2 + \frac{(1.313)^2}{2} \right]^{1/2} = .9336 \text{ amperios}$$

a 3 ciclos:

$$I = \left[(6.5 \times 10^{-4})^2 + \frac{(1.313)^2}{2} \right]^{1/2} = .9284 \text{ amps.}$$

3. CORRIENTE DE CORTOCIRCUITO EN MAQUINAS SINCRONICAS SIN CARGA.

Siendo el modelo de la máquina sincrónica con rotor cilíndrico en cortocircuito un circuito RL similar al de la figura 6.1, se aprovechará el análisis de la sección anterior, con la diferencia de que las máquinas sincrónicas en el estado transitorio no tienen una reactancia constante como sucede con las bobinas estáticas. Si la máquina sincrónica tiene bobinado amortiguador, en el primer instante de un cortocircuito su reactancia es muy pequeña y llamada reactancia subtransitoria. Esta reactancia aumenta de valor con el tiempo y algunos ciclos después es llamada reactancia transitoria y por último se estabiliza en un valor de régimen permanente. Esto quiere decir que el valor pico a pico de la corriente no permanece constante como en el caso del circuito RL simple estudiado anteriormente. Ese valor es muy grande al comienzo y disminuye a medida que la reactancia aumenta, hasta estabilizarse en un valor determinado por el voltaje y por la reactancia de régimen permanente. Además la componente senoidal estará desplazada por la componente directa, dependiendo esta última del valor instantáneo del voltaje en el momento de ocurrir el cortocircuito, tal como se estudió en el circuito RL simple de la figura 6.1. En la figura 6.6 se muestra la corriente en una de las fases de una máquina sincrónica cuando el cortocircuito trifásico ocurre en el momento en que en esa fase $\alpha - \theta = \pi/2$.

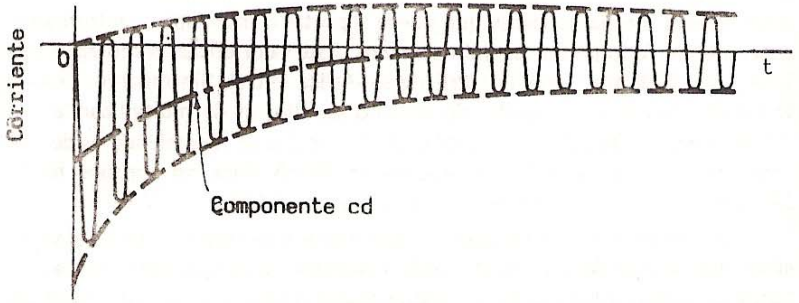


Fig. 6.6

En la figura 6.7 se muestra la corriente en una de las fases de la misma máquina sincrónica cuando el cortocircuito trifásico ocurre en el momento en que en esa fase $\alpha - \theta = 0°$.

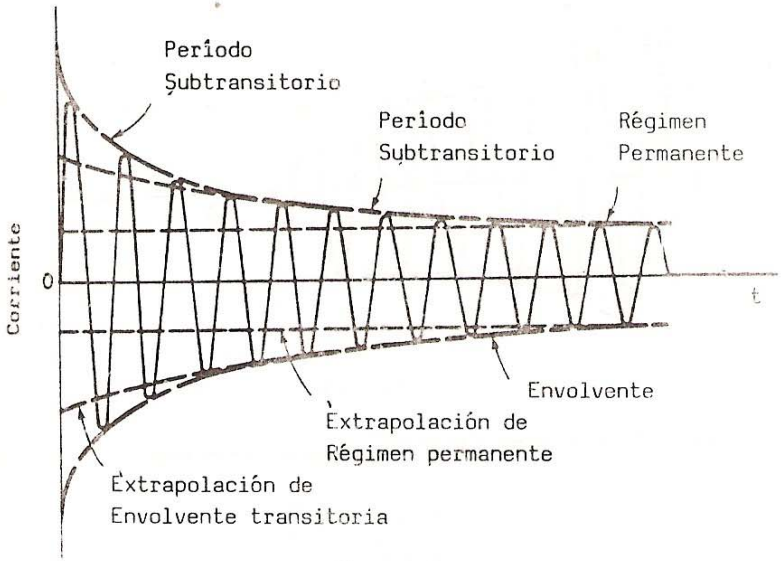


Fig. 6.7

En una máquina sincrónica, cuyo modelo se enseña en la figura 6.8 y en donde se desprecia la resistencia óhmica del estator, se enseña un cortocircuito trifásico simulado con el interruptor S cuando $\alpha - \theta = 0°$. E es un voltaje llamado voltaje detrás de la reactancia.

$\alpha - \theta = 0º$. E es un voltaje llamado voltaje detrás de la reactancia.

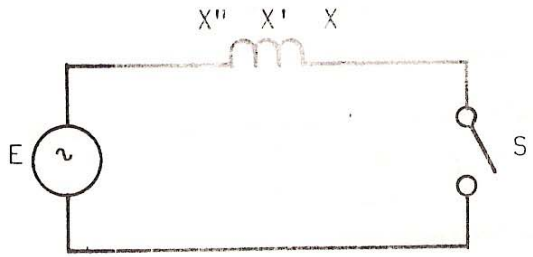


Fig. 6.8

El oscilograma de la corriente de cortocircuito se enseña en la figura 6.9

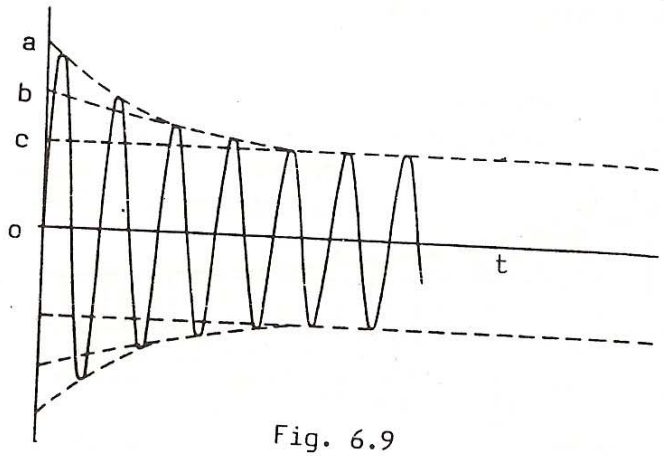


Fig. 6.9

En el momento del cortocircuito el valor eficaz de la corriente es

$$I'' = \frac{oa}{\sqrt{2}} = \frac{E}{X''} \qquad 6.14$$

y es llamada corriente subtransitoria o corriente simétrica inicial, mientras que X" es la reactancia subtransitoria. La corriente simétrica inicial es entonces la corriente subtransitoria durante un cortocircuito cuando la componente de corriente directa es igual a cero.

Si la envolvente de la onda de corriente se extrapola hasta t = 0, despreciándose los primeros ciclos, la intersección con la ordenada determina el valor de la corriente transitoria. Es decir

$$I' = \frac{ob}{\sqrt{2}} = \frac{E}{X'} \qquad 6.15$$

siendo X' la reactancia transitoria.

Después de varios ciclos la corriente se estabiliza en un valor de

$$I = \frac{oc}{\sqrt{2}} = \frac{E}{X} \qquad 6.16$$

siendo X la reactancia permanente

4. SELECCION DE INTERRUPTORES DE LAS MAQUINAS SINCRONICAS.

Como ya se estudió, las corrientes de cortocircuito en los circuitos RL están formadas por las corrientes senoidales y por las componentes de corriente directa. En una máquina sincrónica el valor eficaz de la corriente total al ocurrir el cortocircuito es

$$I = \sqrt{(i_{cd})^2 + (I'')^2} = \sqrt{(i_{cd})^2 + (oa/\sqrt{2})^2}$$

pero la corriente directa máxima posible es

$$i_{cd} = oa = \sqrt{2}\, I''$$

por lo que el valor eficaz máximo posible de la corriente al ocurrir el cortocircuito es

$$I = \sqrt{(\sqrt{2}\, I'')^2 + (I'')^2} = \sqrt{3}\, I'' = 1.73\, I'' \qquad 6.17$$

es decir, raíz de tres veces la corriente simétrica inicial.

Un criterio muy generalizado en el diseño de las máquinas sincrónicas es el de considerar la corriente que deben soportar los interruptores inmediatamente después del cortocircuito, conjuntamente con la corriente de interrupción.

La corriente que debe soportar el interruptor inmediatamente después del cortocircuito es el valor eficaz de la corriente total incluyendo la componente directa y es la corriente que puede soportar el interruptor en forma segura en el período de un segundo o menos. Este valor eficaz, como ya se observó, es raíz de tres veces la corriente simétrica inicial. Sinembargo, existen varios criterios para calcularla, siendo uno de ellos el de multiplicar la corriente simétrica inicial por un factor. El factor que se recomienda es de 1.6 para interruptores en aceite por encima de 5KVA. Para interruptores hasta 5KVA el factor es 1.5 y para interruptores en aire el factor es 1.25.

La corriente de interrupción o valor nominal de interrupción es el valor eficaz más grande de la corriente total, incluyendo la componente directa que puede ser interrumpida en forma segura cuando el interruptor es usado en un circuito de voltaje normal nominal. Esta corriente depende de la velocidad del

interruptor. Como ya se ha estudiado, la corriente eficaz disminuye su valor desde el momento del cortocircuito hasta adquirir el valor eficaz de la componente senoidal, ya que el valor de la componente directa disminuye desde su valor máximo hasta cero. Lo que quiere decir que los interruptores más rápidos tendrán que interrumpir mayor corriente. Para determinar la corriente de interrupción se multiplica la corriente simétrica inicial por los siguientes factores:

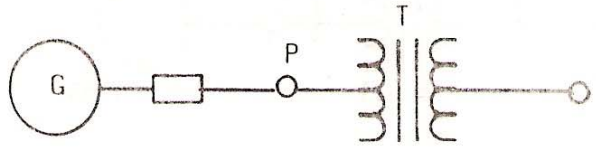
Interruptor de 8 ciclos o más	1.0
Interruptor de 5 ciclos	1.1
Interruptor de 3 ciclos	1.2
Interruptor de 2 ciclos	1.4

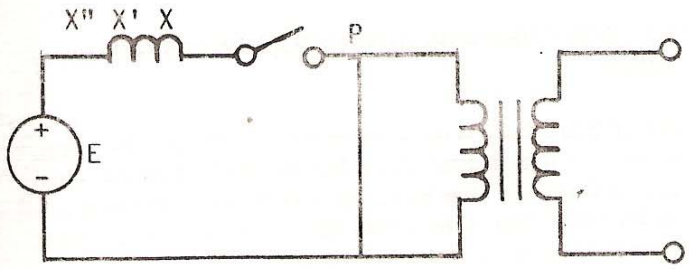
Para determinar la capacidad de corriente de interrupción de los interruptores usados en las máquinas sincrónicas, se utiliza la reactancia subtransitoria en los generadores y la reactancia transitoria en los motores, determinándose con ello el valor eficaz inicial de la corriente para una falla de cualquier tipo y en cualquier sitio. En la mayoría de los casos es suficiente considerar fallas trifásicas y fallas de línea a tierra. En fallas trifásicas la corriente es $I = E/X$ y en fallas de línea a tierra la corriente es $I = 3E/(2X_1 + X_0)$.

EJEMPLO 2

Un generador conectado a través de un interruptor de 5 ciclos a un transformador, tiene valores nominales de 6.9 KV, 7500 KVA, con reactancias X" = .09 pu, X' = .15 pu y X = 1.0 pu. El generador está funcionando en vacío y a la tensión nominal en el momento de producirse un cortocircuito trifásico entre el interruptor y el transformador, indicado con el punto P en la figura siguiente. Calcular:

a) La corriente permanente de cortocircuito en el interruptor.
b) La corriente eficaz simétrica inicial en el interruptor.
c) La componente directa máxima posible de la corriente de cortocircuito.
d) La corriente que debe soportar el interruptor.
e) La corriente que debe interrumpir el interruptor.
f) La potencia de interrupción en KVA.





Se toma como base 7500 KVA y 6.9 KV en el generador.

$$I_b = \frac{S_b}{\sqrt{3}\ V_b} = \frac{7500}{\sqrt{3} \times 6.9} = 627.55 \text{ amperios}$$

a)

$$I = \frac{E}{X} = \frac{1.0}{j1.0} = -j1.0 \text{ pu} = -j1.0 \times 627.55$$

$$= 627.55\underline{|-90^\circ} \text{ amperios}$$

b)

$$I'' = \frac{E}{X''} = \frac{1.0}{j.09} = -j11.11 \text{ pu} = -j11.11 \times 627.55$$

$$= 6972.78\underline{|-90^\circ} \text{ amperios}$$

c)

$$i_{cd} = \sqrt{2} \times 6972.78\underline{|-90^\circ} = 9861.0\underline{|-90^\circ} \text{ amperios}$$

d)

$$I = 1.6 \times 6972.78\underline{|-90^\circ} = 11156.45\underline{|-90^\circ} \text{ amperios}$$

e)

$$I = 1.1 \times 6972.78\underline{|-90^\circ} = 7670.06\underline{|-90^\circ} \text{ amperios}$$

f)

$$S = \sqrt{3} \times 6900 \times 7670.06 = 91666.018 \text{ KVA}$$

5. CORRIENTE DE CORTOCIRCUITO EN MAQUINAS SINCRONICAS CON CARGA.

En la sección 3 se estudió la corriente de cortocircuito en máquinas sincrónicas actuando sin carga. Existen dos métodos básicos para este análisis cuando la máquina sincrónica tiene una carga en el momento de ocurrir la falla. Estos métodos son el cálculo del voltaje detrás de la reactancia subtransitoria y el de superposición de corrientes o de voltajes.

5.1 METODO DEL VOLTAJE DETRAS DE LA REACTANCIA SUBTRANSITORIA.

El procedimiento consiste en calcular el voltaje detrás de la reactancia subtransitoria en el momento antes de ocurrir el cortocircuito.

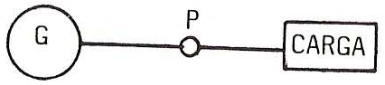
$$E'' = V + jX''I \qquad 6.18$$

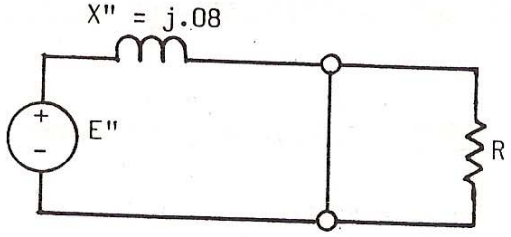
y luego calcular la corriente de cortocircuito y usando ese voltaje, siendo V el voltaje en terminales de la máquina y X" la reactancia subtransitoria.

$$I'' = \frac{E''}{X''} \qquad 6.19$$

EJEMPLO 3

Un generador con valores nominales de 625 KVA, 480 V y X" = .08 pu, alimenta a una carga puramente resistiva de 500 KW a 480 V, la cual está conectada directamente a los terminales del generador. Si ocurre un cortocircuito trifásico en los terminales de la carga, calcular la corriente eficaz simétrica inicial.





Se toma como base a los valores nominales del generador.

S_b = 625 KVA = 1.0 pu $\quad V_b$ = 480 V = 1.0 pu.

$$I_b = \frac{625}{\sqrt{3} \times .480} = 751.758 \text{ amperios} = 1.0 \text{ pu}$$

$$P = \frac{500}{625} = .8 \text{ pu}$$

$$I = \frac{P}{V} = \frac{.8}{1.0} = .8\angle 0^\circ \text{ pu}$$

$$E'' = V + jX''I = 1.0\ j0.0 + j.08 \times .8 = 1.0 + j.064$$

$$= 1.002\angle 3.662^\circ \text{ pu} = 1.002\angle 3.662^\circ \times 480$$

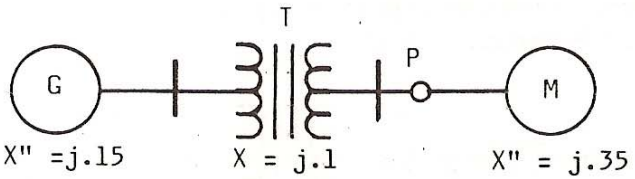
$$= 480.982\angle 3.662^\circ \text{ voltios}$$

$$I'' = \frac{E''}{X''} = \frac{1.0 + j.064}{j.08} = .8 - j12.5 = 12.526\angle -86.338$$

$$= 12.526\angle -86.338^\circ \times 751.758 = 9416.2\angle -86.338^\circ \text{ Amp}$$

EJEMPLO 4

Un generador se conecta a un motor sincrónico a través de un transformador. Las reactancias subtransitorias de generador y motor son .15 pu y .35 pu respectivamente y la reactancia del transformador es .1 pu. En los terminales del motor se produce un cortocircuito trifásico cuando el voltaje en los terminales del generador es .9 pu y la corriente 1.0 pu con factor de potencia de .8 en adelanto. Calcular la corriente de cortocircuito en cada parte del sistema.



Antes de ocurrir el cortocircuito el voltaje en los terminales del generador es

$$V = .9\angle 0^\circ \text{ pu}$$

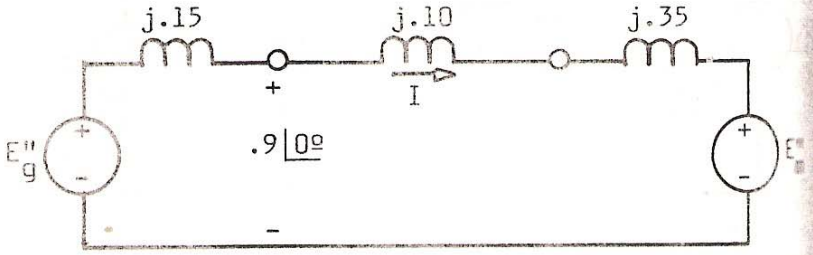
y la corriente

$$I = 1.0\angle 36.87^\circ \text{ pu}$$

por lo que el voltaje detrás de la reactancia subtransitoria del generador y del motor es

$$E''_g = .9\angle 0^\circ + .15\angle 90^\circ \times 1.0\angle 36.87^\circ = .81 + j.12 \text{ pu}$$

$$E''_m = .9\angle 0^\circ - .45\angle 90^\circ \times 1.0\angle 36.87^\circ = 1.17 - j.36 \text{ pu}$$



La corriente de cortocircuito en el generador y en el motor es entonces

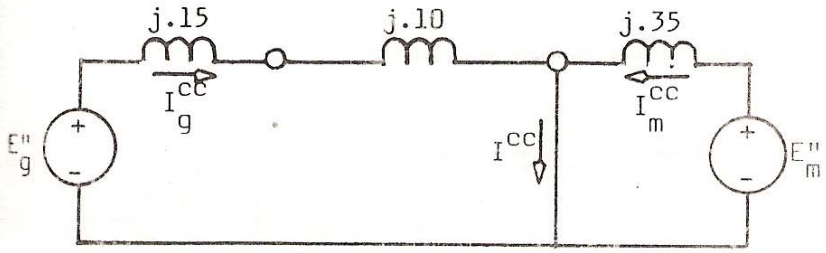
$$I''^{cc}_g = \frac{.81 + j.12}{j.25} = .48 - j3.24 = 3.275\angle -81.573^\circ \text{ pu}$$

$$I''^{cc}_m = \frac{1.17 - j.36}{j.35} = -1.029 - j3.343 = 3.498\angle -107.109^\circ$$

La corriente en el cortocircuito es entonces

$$I''^{cc} = I''^{cc}_g + I''^{cc}_m = .48 - j3.24 - 1.029 - j3.343$$

$$= -.549 - j6.583 = 6.606\angle -94.767^\circ \text{ pu}$$



EJEMPLO 5

Un sistema de potencia está compuesto de dos generadores que alimentan a un motor sincrónico a través de una línea de transmisión. Las características del sistema son:

GENERADOR: X = .82 pu, X' = .70 pu, X" = .20 pu

MOTOR: X = 1.2 pu, X' = .95 pu, X" = .36 pu

LINEA: X = .48 pu

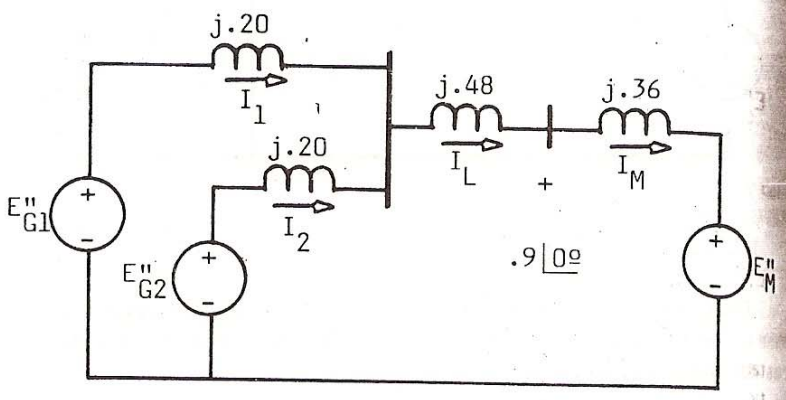
En los terminales del motor ocurre un cortocircuito trifásico cuando el voltaje en esos terminales es .90 pu y la corriente en cada generador es

$$I_{g1} = .70\angle 20^\circ, \quad I_{g2} = .80\angle -42^\circ \text{ pu.}$$

Calcular la corriente de cortocircuito en cada parte del sistema usando el método del voltaje detrás de la reactancia subtransitoria.



El diagrama de impedancias de una fase es



Se calculan los voltajes detrás de las reactancias subtransitorias antes del cortocircuito.

$$I_1 = .7|\underline{20º} = .6578 + j.2394$$

$$I_2 = .8|\underline{-42º} = .5945 - j.5353$$

$$I_L = I_M = I_1 + I_2 = 1.2523 - j.2959$$

$$= 1.2868|\underline{-13.2943º}$$

$$E''_{G1} = V_M + jX_L I_L + jX''_{G1} I_1$$

$$= .9|\underline{0º} + .48|\underline{90º} \times 1.2868|\underline{-13.2943º}$$

$$+ .20|\underline{90º} \times .70|\underline{20º} = .9941 + j.7327$$

$$= 1.2349|\underline{36.3899º} \text{ pu}$$

$$E''_{G2} = V_M + jX_L I_L + jX''_{G2} I_2$$

$$= .9|\underline{0º} + .48|\underline{90º} \times 1.2868|\underline{-13.2943º}$$

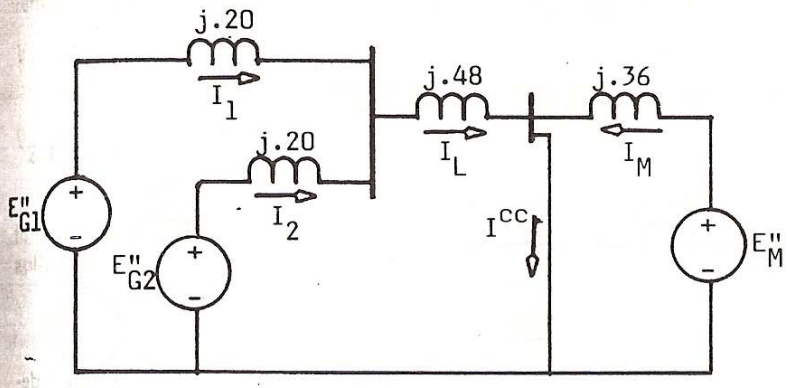
$$+ .20|\underline{90º} \times .8|\underline{-42º} = 1.1491 + j.7200$$

$$= 1.3560|\underline{32.0713º} \text{ pu}$$

$$E''_M = V_M - jX''_M I_M = .9|\underline{0º} - .36|\underline{90º} \times 1.2868|\underline{-13.2943º}$$

$$= .7935 - j.4508 = .9126|\underline{-29.6042º} \text{ pu}$$

Se calculan las corrientes de cortocircuito.



$$I_M = \frac{E''_M}{j.36} = \frac{.7935 - j.4508}{j.36} = -1.2523 - j2.2041$$

$$= 2.5350|\underline{-119.6042º} \text{ pu}$$

Además

$$E''_{G1} = j.20\, I_1 + j.48(I_1 + I_2) = j.68 I_1 + j.48 I_2$$

$$E''_{G2} = j.20 I_2 + j.48(I_1 + I_2) = j.48 I_1 + j.68 I_2$$

o también

$$\begin{bmatrix} E''_{G1} \\ E''_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j.68 & j.48 \\ j.48 & j.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j.68 & j.48 \\ j.48 & j.68 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.2349\angle 36.3899^\circ \\ 1.3568\angle 32.0713^\circ \end{bmatrix}$$

Es decir

$$I_1 = .6579 - j.5362 = .8487\angle -39.1816^\circ$$

$$I_2 = .5944 - j1.3112 = 1.4397\angle -65.6143^\circ$$

$$I_L = I_1 + I_2 = 1.2523 - j1.8474 = 2.2318\angle -55.8678^\circ$$

$$I^{cc} = I_L + I_M = -j4.0515 = 4.0515\angle -90^\circ$$

5.2 METODO DE SUPERPOSICION

En el método de superposición se calcula la corriente en el punto deseado antes de la falla y la corriente en el mismo punto debido a la falla.

La corriente total de falla es la suma de estas dos corrientes.

Sea la red de la figura 6.10 en donde existe la corriente I_a previamente al cortocircuito.

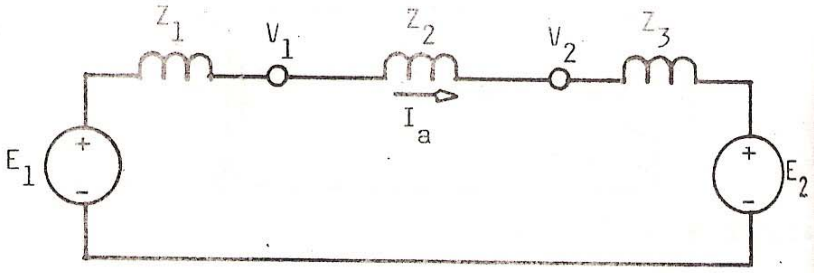


Fig. 6.10

La corriente I_a se puede calcular de diferentes maneras de acuerdo a la información que se tenga. Así

$$I_a = \frac{E_1 - V_1}{Z_1} = \frac{E_1 - V_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{E_1 - E_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$= \frac{V_1 - V_2}{Z_2} = \ldots . \qquad 6.20$$

Los voltajes en los nodos previo a la falla también se pueden calcular de diferentes maneras.

$$V_1 = E_1 - Z_1 I_a = E_2 + (Z_2 + Z_3) I_a = V_2 + Z_2 I_a \qquad 6.21$$

$$V_2 = E_1 - (Z_1 + Z_2) I_a = V_1 - Z_2 I_a = E_2 + Z_3 I_a \qquad 6.22$$

Si ocurre un cortocircuito en un punto, por ejemplo en el nodo 2 como lo indica la figura 6.11, la corriente de cortocircuito, I^{cc}, se puede calcular aplicando el teorema de Thevenin.

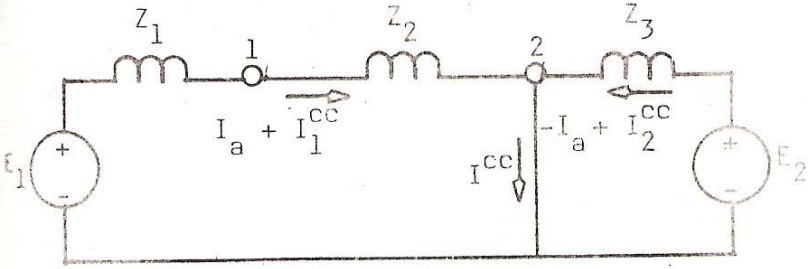
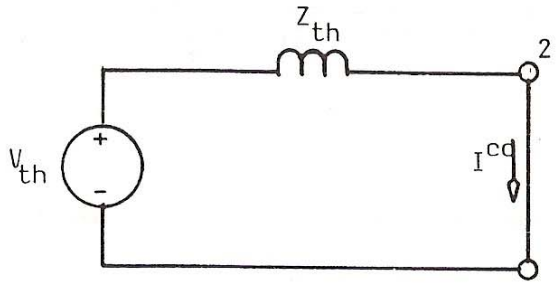


Fig. 6.11

El equivalente Thevenin visto desde el nodo 2 es una fuente de voltaje igual al voltaje en el nodo 2 en serie con una impedancia igual a la impedancia vista desde el nodo 2 con las fuentes de voltaje en cortocircuito, es decir

$$V_{th} = V_2 \quad \text{(Con el terminal 2 en circuito abierto)} \qquad 6.23$$

$$Z_{th} = \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad \text{(Con fuentes en cortocircuito)} \qquad 6.24$$



La corriente de cortocircuito es entonces

$$I^{cc} = \frac{V_{th}}{Z_{th}} = \frac{V_2(Z_1 + Z_2 + Z_3)}{Z_3(Z_1 + Z_2)} \qquad 6.25$$

Las corrientes internas en las impedancias debido al cortocircuito se determinan por división de corrientes en la figura 6.11.

$$I_1^{cc} = \frac{I^{cc} \times Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \qquad 6.26$$

$$I_2^{cc} = \frac{I^{cc} \times (Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \qquad 6.27$$

La corriente total de cortocircuito en cualquier parte es igual a la suma de la corriente antes del cortocircuito o corriente de prefalla más la corriente producida por el cortocircuito. Es decir

$$I^{cc} = 0 + I^{cc}$$

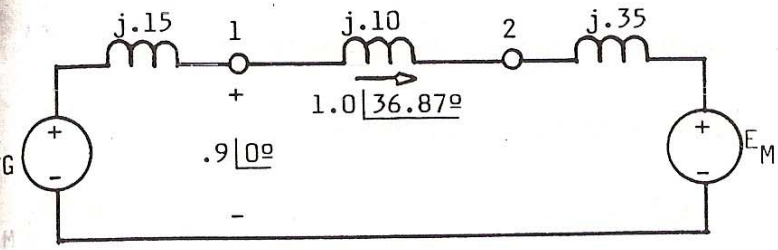
$$I_1 = I_a + I_1^{cc} \qquad 6.28$$

$$I_2 = -I_a + I_2^{cc}$$

EJEMPLO 6

Resolver el Ejemplo 4 aplicando el método de superposición de corrientes.

Antes de ocurrir el cortocircuito se tiene la situación de la figura siguiente.



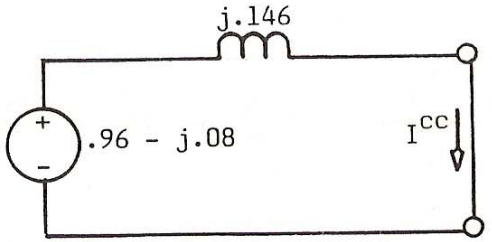
El equivalente Thevenin en el punto 2 es

$$V_{th} = V_2 = .9|\underline{0º} - .10|\underline{90º} \times 1.0|\underline{36.87º} = .96 - j.08$$

$$= .963|\underline{-4.764º}$$

$$Z_{th} = \frac{j.25 \times j.35}{j.60} = j.146$$

El equivalente Thevenin se enseña en la figura siguiente



La corriente de cortocircuito es

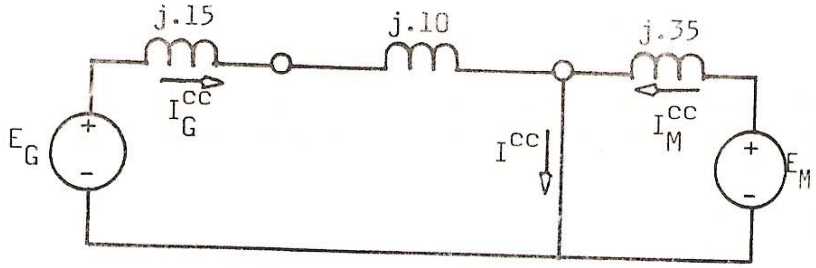
$$I^{cc} = \frac{V_{th}}{Z_{th}} = \frac{.96 - j.08}{j.146} = -.549 - j6.583$$

$$= 6.606|\underline{-94.767º}$$

Las corrientes en el generador y en el motor debido al cortocircuito son por división de corrientes

$$I_G^{cc} = \frac{j.35 \times (-.549 - j6.583)}{j.60} = -.320 - j3.84$$

$$I_M^{cc} = \frac{j.25 \times (-.549 - j6.583)}{j.60} = -.229 - j2.743$$



Las corrientes totales de cortocircuito en el generador y en el motor son

$$I_G = I_G^{cc} + I^{pf} = -.320 - j3.84 + .8 + j.6$$

$$= .48 - j3.24 = 3.275\angle -81.573^\circ$$

$$I_M = I_M^{cc} - I_M^{pf} = -.229 - j2.743 - .8 - j.6$$

$$= -1.029 - j3.343 = 3.498\angle -107.109^\circ$$

EJEMPLO 7

Resolver el Ejemplo 5 aplicando el método de superposición de corrientes.

Las corrientes de prefalla son

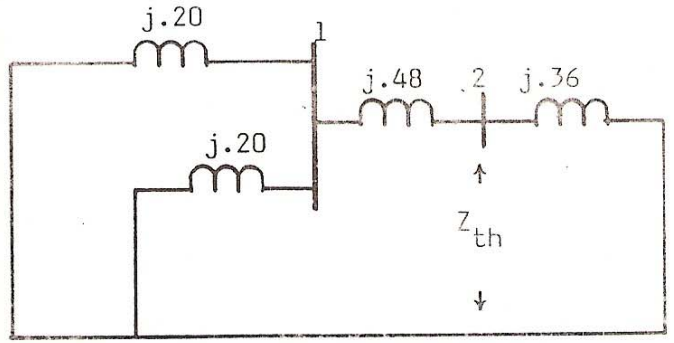
$$I_1^{pf} = .7\angle 20^\circ = .6578 + j.2394$$

$$I_2^{pf} = .8\angle -42^\circ = .5945 - j.5353$$

$$I_M^{pf} = I_L^{pf} = I_1^{pf} + I_2^{pf} = 1.2523 - j.2959$$

$$= 1.2868\angle -13.2943^\circ$$

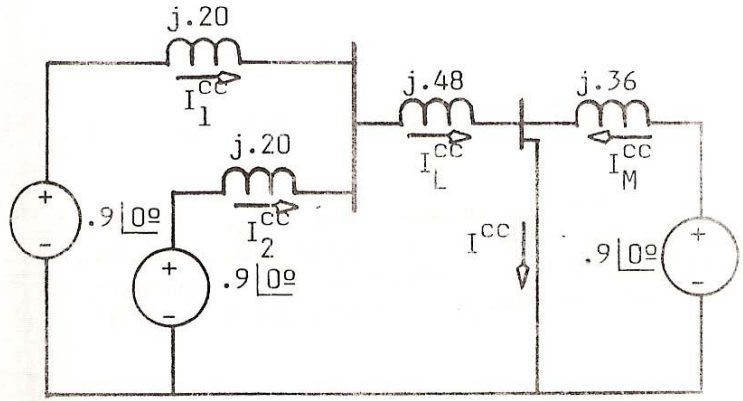
Se calculan las corrientes de cortocircuito por intermedio del equivalente Thevenin.



$$V_{th} = V_2 = .9\angle 0^\circ$$

$$Z_{th} = j\frac{.58 \times .36}{.58 + .36} = j.2221$$

$$I^{cc} = \frac{.9 + j0.0}{j.2221} = -j4.0517$$



Por divisor de corrientes

$$I_M^{cc} = -j4.0517 \times \frac{.58}{.94} = -j2.5000$$

$$I_L^{cc} = -j4.0517 \times \frac{.36}{.94} = -j1.5517$$

$$I_1^{cc} = I_2^{cc} = -j1.5517 \times \frac{.20}{.40} = -j.7759$$

Por lo que

$$I_1 = I_1^{pf} + I_1^{cc} = .6578 + j.2394 - j.7759$$

$$= .6578 - j.5365 = .8488\angle -39.1999^\circ$$

$$I_2 = I_2^{pf} + I_2^{cc} = .5945 - j.5353 - j.7759$$

$$= .5945 - j1.3112 = 1.4397\angle -65.6104^\circ$$

$$I_L = I_L^{pf} + I_L^{cc} = 1.2523 - j.2959 - j1.5517$$

$$= 1.2523 - j1.8476 = 2.2320\angle -55.8707^\circ$$

$$I_M = -I_M^{pf} + I_M^{cc} = -1.2523 + j.2959 - j2.5$$

$$= -1.2523 - j2.2041 = 2.5350\angle -119.6042$$

Otra alternativa de lograr los resultados anteriores y que es más conveniente en el análisis de grandes sistemas, es la superposición de voltajes. Cuando ocurre el cortocircuito trifásico en un punto el voltaje en ese punto es cero. Con el cortocircuito en el nodo 2 en la red de la figura 6.10, se tiene la figura 6.13.

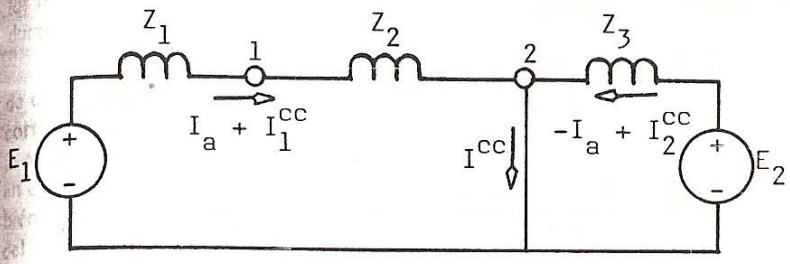


Fig. 6.13

El cortocircuito ahora (en donde $V_2 = 0$) se reemplaza por dos fuentes de voltajes con valores V_2 y $-V_2$, tal como lo indica la figura 6.14. V_2 es el voltaje en el punto 2 antes del cortocircuito.

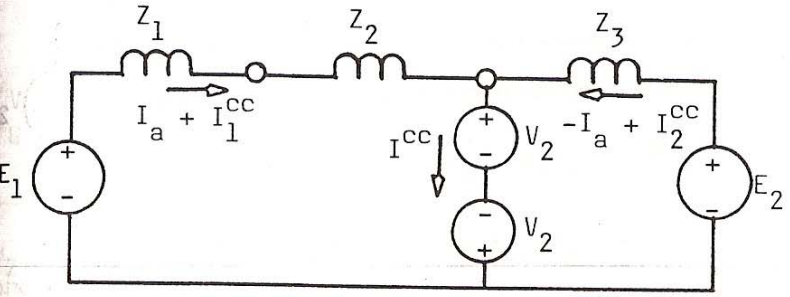


Fig. 6.14

El circuito de la figura 6.14 se resuelve por superposición de voltajes, descomponiéndolo en dos circuitos, en donde uno contenga a las fuentes E_1, V_2 y E_2 y el otro a la fuente $-V_2$, tal como lo indican las figuras 6.15 y 6.16.

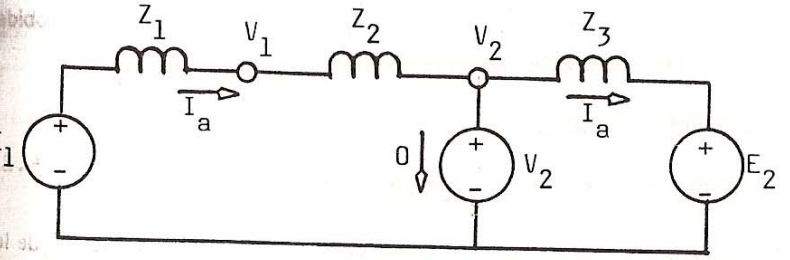


Fig. 6.15

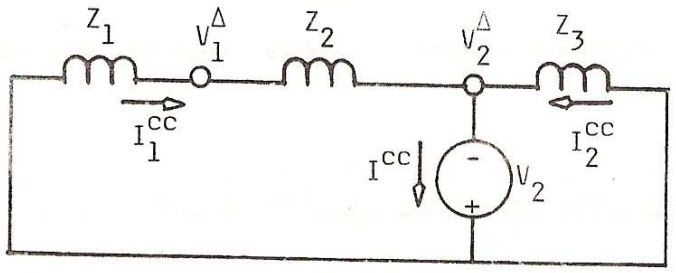


Fig. 6.16

Para efectos del cálculo de las corrientes, el circuito de la figura 6.16 es equivalente al de la figura 6.17.

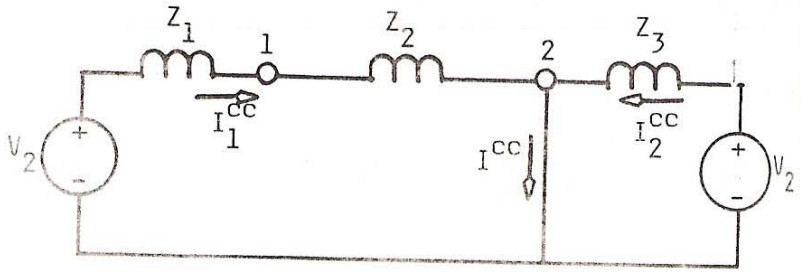


Fig. 6.17

El circuito de la figura 6.15 corresponde a la situación antes del cortocircuito y el de la figura 6.16 (o su equivalente de la figura 6.17) corresponde a la situación de cortocircuito. Con la superposición de estas dos soluciones se obtiene la corriente total de cortocircuito. Por ejemplo, la corriente total en Z_2 es entonces

$$I_a + I_1^{cc} = \frac{V_1 - V_2}{Z_2} + \frac{V_1^{\Delta} - V_2^{\Delta}}{Z_2}$$

$$= \frac{(V_1 + V_1^{\Delta}) - (V_2 + V_2^{\Delta})}{Z_2} \qquad 6.29$$

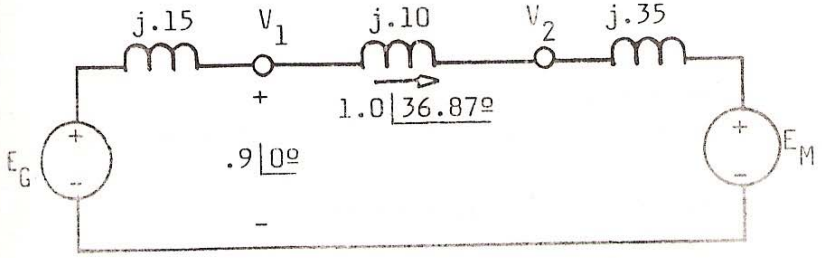
Es decir, la corriente entre dos puntos es igual a la diferencia de los voltajes totales en esos dos puntos dividida por la impedancia colocada entre

los dos puntos; siendo el voltaje total en un punto la suma de voltajes antes y durante el cortocircuito en ese punto.

Si se desprecia la corriente antes del cortocircuito, es decir la corriente de carga, la corriente total de cortocircuito se calcula con el circuito original, cortocircuitando todas las fuentes de voltaje y colocando una fuente de voltaje en el punto de cortocircuito con un valor negativo al del voltaje que existía en ese punto antes del cortocircuito, como se aprecia en la figura 6.16. O también substituyendo el valor de cada una de las fuentes de voltaje por el valor del voltaje en el punto antes del cortocircuito, como se indica en la figura 6.17.

EJEMPLO 8

Resolver el Ejemplo 6 por el método de superposición de voltajes.
Antes del cortocircuito:

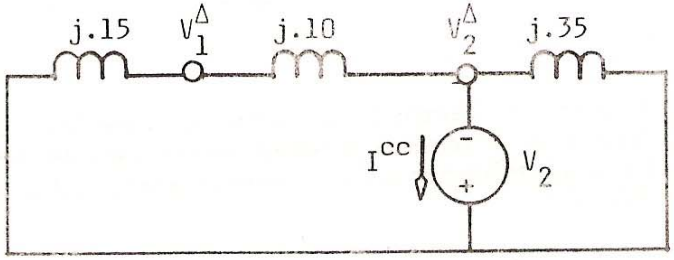


$$V_2 = .9\angle 0º - .10\angle 90º \times 1.0\angle 36.87º = .96 - j.08$$

$$E_G = .9\angle 0º + .15\angle 90º \times 1.0\angle 36.87º = .81 + j.12$$

$$E_M = .9\angle 0º - .45\angle 90º \times 1.0\angle 36.87º = 1.17 - j.36$$

Debido al cortocircuito:



$$V_1^{\Delta} = -\frac{j.15 \times (.96 - j.08)}{j.25} = -.576 + j.048$$

$$V_2^{\Delta} = -V_2 = -.96 + j.08$$

por lo que

$$V_1 + V_1^{\Delta} = .9 - .576 + j.048 = .324 + j.048$$

$$V_2 + V_2^{\Delta} = V_2 - V_2 = 0.0$$

e

$$I_G = \frac{(V_1 + V_1^{\Delta}) - (V_2 + V_2^{\Delta})}{j.10} = \frac{.324 + j.048 - 0.0}{j.10}$$

$$= .48 - j3.24 = 3.275\underline{|-81.573^{\circ}}$$

$$= \frac{(E_G + 0) - (V_1 + V_1^{\Delta})}{j.15} = \frac{.81 + j.12 - .324 - j.048}{j.15}$$

$$= .48 - j3.24 = 3.275\underline{|-81.573^{\circ}}$$

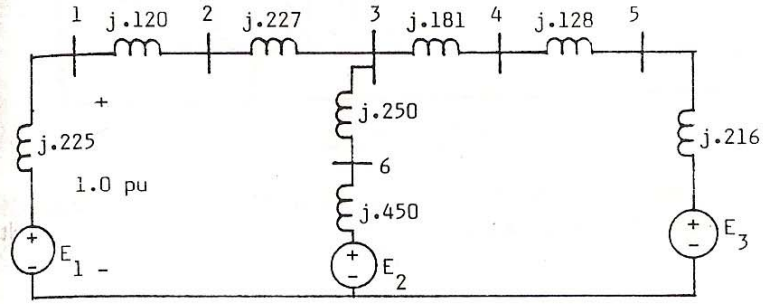
$$I_M = \frac{(E_M + 0) - (V_2 + V_2^{\Delta})}{j.35} = \frac{1.17 - j.36}{j.35}$$

$$= -1.029 - j3.343 = 3.498\underline{|-107.109^{\circ}}$$

EJEMPLO 9

En el sistema del Ejemplo 3 del Capítulo 1, calcular la corriente de falla, despreciando las corrientes de prefalla, en cada parte del sistema para un cortocircuito trifásico en la barra 3. Antes de la falla el voltaje en la barra 3 es 115 KV.

El diagrama de impedancias y voltajes en valores por unidad obtenido en el Capítulo 1 es



Las corrientes base son

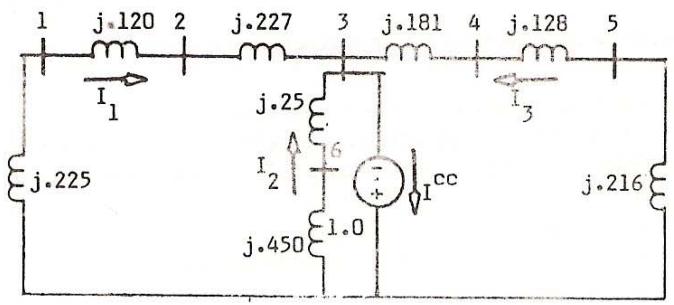
G_1 y G_2: $I_b = \frac{30000}{\sqrt{3} \times 6.9} = 2510.219$ Amperios

G_3: $I_b = \frac{30000}{\sqrt{3} \times 11.5} = 1506.131$ Amperios

Lineas: $I_b = \frac{30000}{\sqrt{3} \times 115} = 150.613$ Amperios

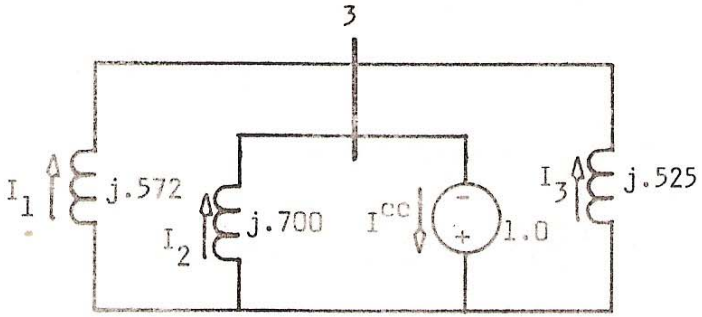
En la barra 3: $V_b = 6.9 \times \frac{115}{6.9} = 115$ KV $= 1.0$ pu

Al despreciar las corrientes del sistema antes de la falla, los voltajes de todas las barras antes de la falla son iguales por no haber caídas de tensión. En este problema el voltaje en la barra 3, la cual es la barra fallada, es 1.0 por unidad antes de ocurrir la falla, por lo tanto este será el voltaje a substituir en cada una de las fuentes. Las corrientes de cortocircuito en todas las partes del sistema serán solamente las corrientes debido a la falla. Para calcular estas corrientes se aplica a la barra fallada (barra 3) un voltaje igual al negativo del voltaje que existía en esa barra antes de la falla, cortocircuitando las demás fuentes de voltaje, tal como se muestra en la figura siguiente.

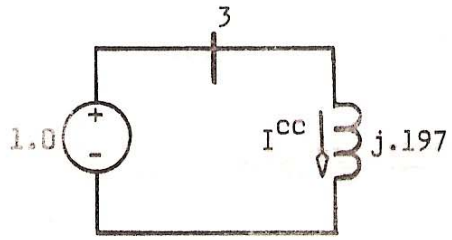


La otra alternativa es substituir a cada una de las fuentes con el voltaje que existía en la barra fallada antes de la falla.

Simplificando se tiene



y por último



De donde

$$I^{cc} = \frac{1.0}{j.197} = -j5.082 \text{ pu} = -j5.082 \times 150.613$$

$$= 765.416\angle -90^{\circ} \text{ Amperios}$$

Por divisor de corriente

$$I_1 = -j5.082 \times \frac{.7 \times .525/(.7 + .525)}{.572 + .7 \times .525/(.572 + .525)}$$

$$= -j1.748$$

$$I_2 = -j5.082 \times \frac{.572 \times .525/(.572 + .525)}{.700 + .572 \times .525/(.572 + .525)}$$

$$= -j1.429$$

$$I_3 = -j5.082 \times \frac{.572 \times .700/(.572 + .700)}{.525 + .572 \times .700/(.572 + .700)}$$

$$= -j1.905$$

Las corrientes en cada parte del sistema son
En el generador G_1 :

$$I_1 = -j1.748 \times 2510.219 = 4387.863\angle -90^{\circ} \text{ Amperios}$$

En el generador G_2

$$I_2 = -j1.429 \times 2510.219 = 3587.103\angle -90^{\circ} \text{ Amperios}$$

En el Generador G_3

$$I_3 = -j1.905 \times 1506.131 = 2869.180\angle -90^{\circ} \text{ Amperios}$$

Los voltajes en cada barra debido a la falla se obtienen de las figuras anteriores.

$$V_1^{\Delta} = -j.225 \times (-j1.748) = -.393$$

$$V_2^{\Delta} = -(j.225 + j.120) \times (-j1.748) = -.603$$

$$V_3^{\Delta} = -(j.225 + j.120 + j.227) \times (-j1.748) = -1.000$$

$V_4^{\Delta} = -(j.216 + j.128) \times (-j1.905) = -.655$

$V_5^{\Delta} = -(j.215) \times (-j1.905) = -.411$

$V_6^{\Delta} = -(j.450) \times (-j1.429) = -.643$

Los voltajes totales en cada barra son iguales a los voltajes de prefalla más los voltajes debido a la falla. Como el voltaje de prefalla en cada barra en este caso es igual a 1.0, se tiene que

$V_1 = 1.0 - .393 = .607$

$V_2 = 1.0 - .603 = .397$

$V_3 = 1.0 - 1.0 = .000$

$V_4 = 1.0 - .655 = .345$

$V_5 = 1.0 - .411 = .589$

$V_6 = 1.0 - .643 = .357$

En forma inversa, si primero se hubiesen obtenido estos voltajes por cualquier método, se pudo obtener posteriormente las corrientes dentro del sistema. Así por ejemplo

$I_1 = (.607 - .397)/j.120 = -j1.750$

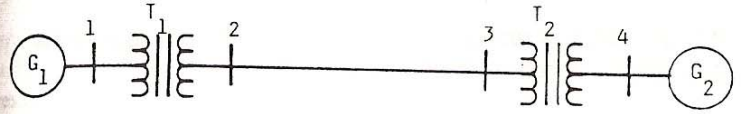
EJEMPLO 10

Los datos del sistema de potencia que se indica son los siguientes:

G_1: 25 MVA, 6.6 KV, X" = j.12 pu
G_2: 20 MVA, 6.9 KV, X" = j.15 pu
T_1: 30 MVA, 7.2 - 2.6 KV, X = j.10 pu
T_2: 25 MVA, 7.5 - 2.4 KV, X = j.08 pu
LINEA 2-3: X = j.07 ohmios

Tomando como base 25 MVA y 6.6 KV en el generador G_1:

a) Construir el diagrama de impedancias de una fase.
b) Calcular en amperios la corriente de cortocircuito para un cortocircuito trifásico en la barra 2, si en esa barra existen 2.6 KV antes del cortocircuito.
c) Calcular en amperios la corriente de cada generador debido al cortocircuito anterior, despreciando las corrientes de prefalla.



Se calculan las impedancias y voltajes en la base referida.

G_1: X" = j.12 pu, V_b = 6.6 KV = 1.0 pu, S_b = 25 MVA.

$$I_b = \frac{25000}{\sqrt{3} \times 6.6} = 2186.9328 \text{ Amperios}$$

T_1: $X = j.10 \times \left[\frac{7.2}{6.6}\right]^2 \times \frac{25}{30} = j.0992$ pu

LINEA: $V_b = 6.6 \times \frac{2.6}{7.2} = 2.3833$ KV, $S_b = 25$ MVA

$$I_b = \frac{25000}{\sqrt{3} \times 2.3833} = 6056.2064 \text{ Amperios}$$

$$Z_b = \frac{(2.3833)^2}{25} = .2272 \text{ ohmios}$$

$$X = \frac{j.07}{.2272} = j.3081 \text{ pu}$$

BARRA 2: $V = \frac{2.6}{2.3833} = 1.0909$ pu

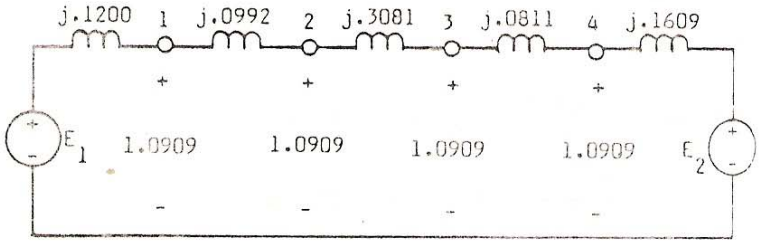
T_2: $X = j.08 \times \left[\frac{2.4}{2.3833}\right]^2 \times \frac{25}{25} = j.0811$ pu

G_2: $V_b = 2.3833 \times \frac{7.5}{2.4} = 7.4478$ KV, $S_b = 25$ MVA

$$I_b = \frac{25000}{\sqrt{3} \times 7.4478} = 1938.2495 \text{ Amperios}$$

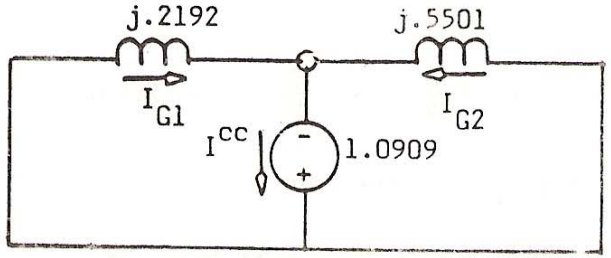
$$X'' = j.15 \times \left[\frac{6.9}{7.4478}\right]^2 \times \frac{25}{20} = j.1609 \text{ pu}$$

El diagrama de impedancias y voltajes de una fase en valores por unidad se muestra en la figura siguiente:



En este problema el cortocircuito es en la barra 2 con 2.6 KV, es decir 1.0909 pu.

Entonces



$$I_{G1} = \frac{1.0909}{j.2192} = -j4.9767 \text{ pu} = -j4.9767 \times 2186.9328$$

$$= 10883.7085\angle -90^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_{G2} = \frac{1.0909}{j.5501} = -j1.9831 \text{ pu} = -j1.9831 \times 1938.2495$$

$$= 3843.7426\angle -90^\circ \text{ Amperios}$$

$$I^{cc} = I_{G1} + I_{G2} = -j4.9767 - j1.9831 = -j6.9598 \text{ pu}$$

$$= -j6.9598 \times 6056.2064 = 42149.9854\angle -90^\circ \text{ Amps.}$$

Obsérvese que la corriente de cortocircuito en valores por unidad es igual a la suma de las corrientes de los generadores. Esto no es posible en valores reales de amperios.

Para un cortocircuito en una barra determinada, los resultados en amperios deben ser los mismos no importando la base que se tome ni donde se tome. Por ello es importante conocer los niveles de voltajes que se han de tomar para el cálculo de las corrientes de cortocircuito, para no concluir en resultados incorrectos.

EJEMPLO 11

Repetir el Ejemplo 10 tomando como base 2.6 KV, 25 MVA, en la línea.

LINEA: $Z_b = \frac{(2.6)^2}{25} = .2704$ ohmios

$$X = \frac{j.07}{.2704} = j.2589 \text{ pu}$$

BARRA 2: $V = \frac{2.6}{2.6} = 1.0$ pu

$$I_b = \frac{25000}{\sqrt{3} \times 2.6} = 5551.4449 \text{ Amperios}$$

T_1: $X = j.10 \times \left[\frac{2.6}{2.6}\right]^2 \times \frac{25}{30} = j.0833$ pu

T_2: $X = j.08 \times \left[\frac{2.4}{2.6}\right]^2 \times \frac{25}{25} = j.0682$ pu

G_1: $V_b = 2.6 \times \frac{7.2}{2.6} = 7.2$ KV

$X'' = j.12 \times \left[\frac{6.6}{7.2}\right]^2 \times \frac{25}{25} = j.1008$ pu

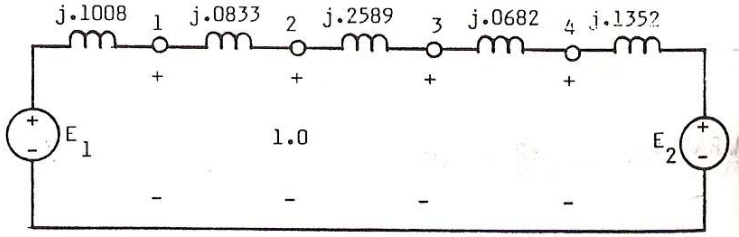
$I_b = \frac{25000}{\sqrt{3} \times 7.2} = 2004.6884$ Amperios

G_2: $V_b = 2.6 \times \frac{7.5}{2.4} = 8.125$ KV

$X'' = j.15 \times \left[\frac{6.9}{8.125}\right]^2 \times \frac{25}{20} = j.1352$

$I_b = \frac{25000}{\sqrt{3} \times 8.125} = 1776.4624$ Amperios

El diagrama de impedancias y voltajes de una fase en valores por unidad y en la base indicada se muestra en la figura siguiente.



El voltaje en la barra 2 es 1.0 pu, entonces

$I_{G1} = \frac{1.0}{j.1841} = -j5.4318$ pu $= -j5.4318 \times 2004.6884$

$= 10889.0665\angle -90º$ Amperios

$I_{G2} = \frac{1.0}{j.4623} = -j2.1631$ pu $= -j2.1631 \times 1776.4624$

$= 3842.6658\angle -90º$ Amperios

$I^{cc} = I_{G1} + I_{G2} = -j5.4318 - j2.1631 = -j7.5949$ pu

$= -j7.5949 \times 5551.4449 = 42162.6689\angle -90º$ Amps.

EJEMPLO 12

Repetir el Ejemplo 10 tomando como base 7 KV, 30 MVA en el generador G_2.

G_2: $X'' = j.15 \times \left[\frac{6.9}{7.0}\right]^2 \times \frac{30}{20} = j.2186$

$I_b = \frac{30000}{\sqrt{3} \times 7.0} = 2474.3583$ Amperios

Además

T_2: $X = j.08 \times \left[\frac{7.5}{7.0}\right]^2 \times \frac{30}{25} = j.1102$

LINEA: $V_b = \frac{2.4}{7.5} \times 7.0 = 2.2400$ KV

$Z_b = \frac{(2.24)^2}{30} = .1673$ ohmios

$X = \frac{j.07}{.1673} = j.4185$ pu

T_1: $X = j.10\left[\frac{2.6}{2.24}\right]^2 \times \frac{30}{30} = j.1347$ pu

BARRA 2: $V = \frac{2.6}{2.24} = 1.1607$ pu

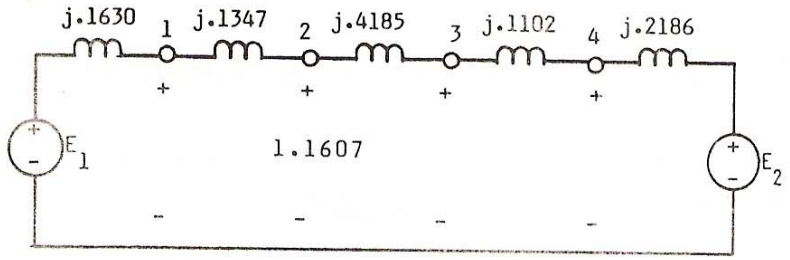
$I_b = \frac{30000}{\sqrt{3} \times 2.24} = 7732.3697$ Amperios

G_1: $V_b = \frac{7.2}{2.6} \times 2.24 = 6.2031$ KV

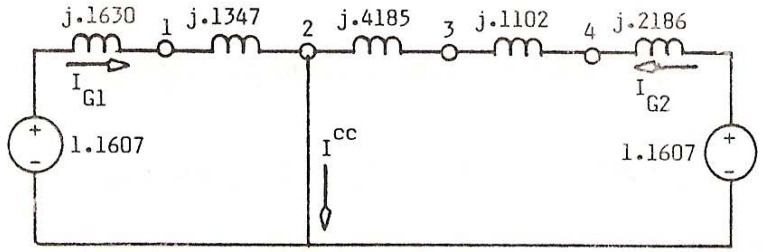
$$X'' = j.12 \times \left[\frac{6.6}{6.2031}\right]^2 \times \frac{30}{25} = j.1630 \text{ pu}$$

$$I_b = \frac{30000}{\sqrt{3} \times 6.2031} = 2792.2342 \text{ Amperios}$$

El diagrama de impedancias y voltajes de una fase en valores por unidad y en la base indicada se muestra en la figura siguiente.



Y el diagrama equivalente del cortocircuito se muestra en la figura siguiente en donde los voltajes de las fuentes se han reemplazado por el voltaje de prefalla en la barra 2.



$$I_{G1} = \frac{1.1607}{j.2977} = -j3.8989 \text{ pu} = -j3.8989 \times 2792.2342$$

$$= 10886.6182 \angle -90^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_{G2} = \frac{1.1607}{j.7473} = -j1.5532 \text{ pu} = -j1.5532 \times 2474.3583$$

$$= 3843.1523 \angle -90^\circ \text{ Amperios}$$

$$I^{cc} = I_{G1} + I_{G2} = -j3.8989 - j1.5532 = -j5.4521 \text{ pu}$$

$$= -j5.4521 \times 7732.3697 = 42157.6528 \angle -90^\circ \text{ Amps.}$$

Compare el lector los resultados de estos tres últimos ejemplos, los cuales deben ser los mismos a pesar de usar diferentes bases en diferentes sitios.

EJEMPLO 13

Los generadores del sistema siguiente están protegidos con los interruptores en aceite B_1 y B_2 de 5 ciclos. Si ocurre un cortocircuito trifásico en la barra 5, calcular en amperios:

a) La corriente del cortocircuito.
b) La corriente de cada generador.
c) La corriente que debe soportar cada interruptor
d) La corriente que debe interrumpir cada interruptor

Considerar las corrientes de prefalla y seleccionar como base 2.2 KV, 20 MVA en la barra 5. Los datos del sistema son:

G_1: 20 MVA, 7.5 KV, X" = j.12 pu.

G_2: 25 MVA, 7.2 KV, X" = j.12 pu.

T_1: 15 MVA, 6.9 - 2.4 KV, X = j.10 pu

T_2: 30 MVA, 7.4 - 2.5 KV, X = j.10 pu

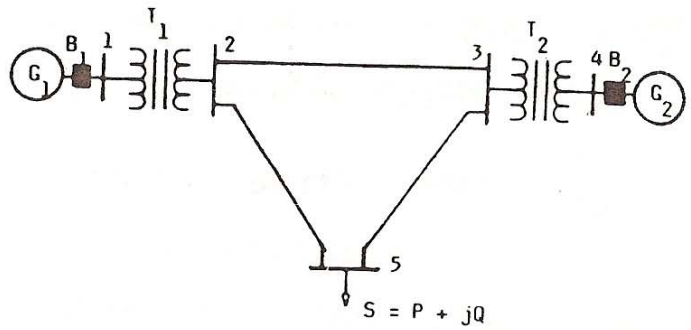
LINEA 2-3: X = j.05 ohmios

LINEA 2-5: X = j.04 ohmios

LINEA 3-5: X = j.07 ohmios

$V_2 = 2.3 \angle -6.0^\circ$ KV $\qquad V_5 = 2.2 \angle -10^\circ$ KV

P = 20 MW Q = 15 MVAR



En el lado de baja tensión:

$V_b = 2.2$ KV $\quad S_b = 20$ MVA

$$I_b = \frac{20000}{\sqrt{3} \times 2.2} = 5248.6388 \text{ Amperios}$$

$$V_5 = 2.2\angle -10^\circ \text{ KV} = \frac{2.2\angle -10^\circ}{2.2} = 1.0\angle -10^\circ \text{ pu}$$

$$= .9848 - j.1736 \text{ pu}$$

$$V_2 = 2.3\angle -6.0^\circ \text{ KV} = \frac{2.3\angle -6.0^\circ}{2.2} = 1.0455\angle -6.0^\circ \text{ pu}$$

$$= 1.0397 - j.1093 \text{ pu}$$

$$Z_b = \frac{(2.2)^2}{20} = .2420 \text{ ohmios}$$

$$X_{25} = \frac{j.040}{.2420} = j.1653 \text{ pu}$$

$$X_{23} = \frac{j.050}{.2420} = j.2066 \text{ pu}$$

$$X_{35} = \frac{j.070}{.2420} = j.2893 \text{ pu}$$

Se calculan las corrientes de prefalla de cada generador:

$$I_{25} = \frac{V_2 - V_5}{X_{25}} = \frac{1.0455\angle -6.0^\circ - 1.0\angle -10^\circ}{j.1653}$$

$$= .3890 - j.3321 = .5115\angle -40.4910^\circ \text{ pu}$$

$$S_5 = \frac{20 + j15}{20} = 1.0 + j.75 = 1.2500\angle 36.8699^\circ \text{ pu}$$

$$I_L = \frac{S_5^*}{V_5^*} = \frac{1.000 - j.7500}{.9848 + j.1736} = .8546 - j.9122 \text{ pu}$$

$$I_{35} = I_L - I_{25} = .4656 - j.5801 = .7438\angle -51.2488^\circ \text{ pu}$$

$$V_3 = V_5 + jX_{35}I_{35} = 1.0\angle 10^\circ + .2893\angle 90^\circ \times .7438\angle -51.2488$$

$$= 1.1526 - j.0389 = 1.1533\angle -1.9334^\circ \text{ pu}$$

$$I_{23} = \frac{V_2 - V_3}{X_{23}} = \frac{1.0455\angle -6.0^\circ - 1.1533\angle -1.9334^\circ}{.2066\angle 90^\circ}$$

$$= -.3408 + j.5465 = .6440\angle 121.9460^\circ \text{ pu}$$

$$I_{G1}^{pf} = I_{23} + I_{25} = .0482 + j.2144 = .2198\angle 77.3298^\circ \text{ pu}$$

$$I_{G2}^{pf} = I_{35} - I_{23} = .8064 - j1.1266 = 1.3855\angle -54.4056^\circ \text{ pu}$$

Se buscan los valores en por unidad en la base referida de las impedancias de los transformadores y de los generadores.

$$T_1: \quad X = j.10 \times \left[\frac{2.4}{2.2}\right]^2 \times \frac{20}{15} = j.1587 \text{ pu}$$

T_2: $X = j.10 \times \left[\frac{2.5}{2.2}\right]^2 \times \frac{20}{30} = j.0861$ pu

G_1: $V_b = \frac{2.2}{2.4} \times 6.9 = 6.3250$ KV

$X'' = j.12 \times \left[\frac{7.5}{6.325}\right]^2 \times \frac{20}{20} = j.1687$ pu

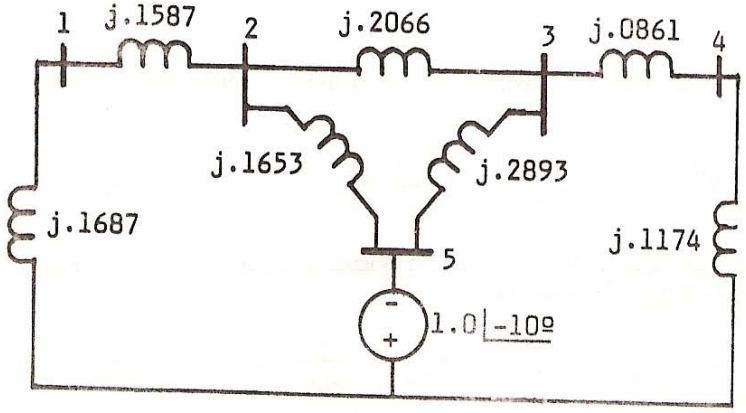
$I_b = \frac{20000}{\sqrt{3} \times 6.325} = 1825.6135$ Amperios

G_2: $V_b = \frac{2.2}{2.5} \times 7.4 = 6.5120$ KV

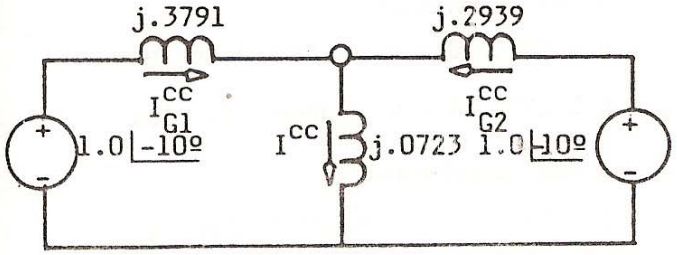
$X'' = j.12 \times \left[\frac{7.2}{6.5120}\right]^2 \times \frac{20}{25} = j.1174$ pu

$I_b = \frac{20000}{\sqrt{3} \times 6.512} = 1773.1888$ Amperios

Se calculan las corrientes debido al cortocircuito. El diagrama de impedancias por fase en el cortocircuito es



o también



de donde

$$\begin{bmatrix} I^{cc}_{G1} \\ I^{cc}_{G2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j.4514 & j.0723 \\ j.0723 & j.3663 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.0|\underline{-10º} \\ 1.0|\underline{-10º} \end{bmatrix}$$

$I^{cc}_{G1} = 1.8360|\underline{-100º} = -.3188 - j1.8081$ pu

$I^{cc}_{G2} = 2.3683|\underline{-100º} = -.4113 - j2.3323$ pu

$I^{cc} = I^{cc}_{G1} + I^{cc}_{G2} = 4.2043|\underline{-100º}$ pu

$= 4.2043|\underline{-100º} \times 5248.6388 = 22066.8521|\underline{-100º}$ A.

La corriente total en el generador 1 es

$I_{G1} = I^{pf}_{G1} + I^{cc}_{G1} = .0482 + j.2144 - .3188 - j1.8081$

$= -.2706 - j1.5937 = 1.6165|\underline{-99.6365º}$ pu

$= 1.6165|\underline{-99.6365} \times 1825.61 = 2951.12|\underline{-99.6365º}$ A

La corriente total en el generador 2 es

$I_{G2} = I^{pf}_{G2} + I^{cc}_{G2} = .8064 - j1.1266 - .4113 - j2.3323$

$= .3951 - j3.4589 = 3.4814|\underline{-83.4819º}$ pu

$= 3.4814|-83.4819 \times 1773.18 = 6173.18|\underline{-83.4819º}$ A

La corriente a soportar cada interruptor es

B_1: I = 1.6 x 2951.12 = 4721.7955 Amperios

B_2: I = 1.6 x 6173.18 = 9877.0979 Amperios

La corriente a interrumpir cada interruptor es

B_1: I = 1.1 x 2951.12 = 3246.2344 Amperios

B_2: I = 1.1 x 6173.18 = 6790.5048 Amperios

6. CALCULO DE LAS CORRIENTES DE CORTOCIRCUITO POR INTERMEDIO DE LA MATRIZ IMPEDANCIA DE BARRA.

En la sección anterior se estudió que se puede calcular la corriente total de cortocircuito calculando previamente los voltajes totales de cortocircuito, los cuales son iguales a los voltajes que existían en las barras antes del cortocircuito más los voltajes en esas barras debido al cortocircuito. Los voltajes en las barras debido al cortocircuito se pueden determinar por medio de la matriz impedancia de barra.

La relación entre la matriz impedancia de barra, la corriente de cortocircuito y los voltajes en las barras debido al cortocircuito es

$$\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{Z}\,\underset{\sim}{I} \qquad 6.30$$

en donde $\underset{\sim}{V}$ es el vector voltaje de barras debido al cortocircuito, $\underset{\sim}{Z}$ es la matriz impedancia de barra o matriz impedancia de cortocircuito e $\underset{\sim}{I}$ es el vector corriente de cortocircuito que entra a las barras.

Sea la red analizada en la sección anterior en la que ocurre un cortocircuito trifásico en la barra 2.

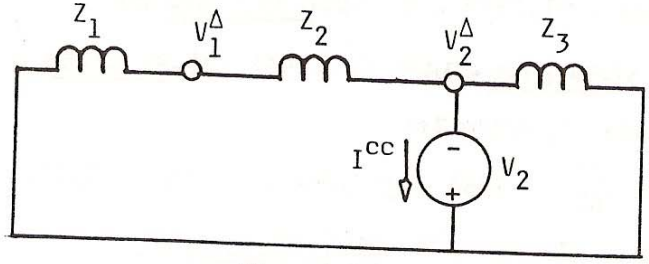


Fig. 6.18

La ecuación de voltajes en las barras debido a la falla es

$$\begin{bmatrix} V_1^{\Delta} \\ V_2^{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad 6.31$$

Particularizando

$$\begin{bmatrix} V_1^{\Delta} \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -I^{cc} \end{bmatrix} \qquad 6.32$$

de donde

$$V_2 = Z_{22} I^{cc} \qquad \text{ó} \qquad I^{cc} = \frac{V_2}{Z_{22}} \qquad 6.33$$

Además

$$V_1^{\Delta} = - Z_{12} I^{cc} = - \frac{Z_{12}}{Z_{22}} V_2 \qquad 6.34$$

Generalizando, para una falla trifásica en la barra k con un voltaje de prefalla en esa barra de V_f, la corriente de cortocircuito es

$$I^{cc} = \frac{V_f}{Z_{kk}} \qquad 6.35$$

El voltaje total en cualquier barra n debido al cortocircuito en la barra k es

$$V_n^{\Delta} = - I^{cc} Z_{nk} = - \frac{Z_{nk}}{Z_{kk}} V_f \qquad 6.36$$

El voltaje total en cualquier barra n es igual al voltaje de prefalla en esa barra más el voltaje debido a la falla

$$V_n = V_{n1} + V_n^{\Delta} = V_{n1} - \frac{Z_{nk}}{Z_{kk}} V_f \qquad 6.37$$

y el voltaje total en la barra m es

$$V_m = V_{m1} + V_m^{\Delta} = V_{m1} - \frac{Z_{mk}}{Z_{kk}} V_f \qquad 6.38$$

La corriente total de cortocircuito entre las barras n y m es

$$I_{nm} = \frac{V_n - V_m}{z_{nm}} \qquad 6.39$$

siendo z_{nm} la impedancia del elemento colocado entre las barras n y m.

Si se desprecian las corrientes de prefalla, los voltajes de prefalla en todas las barras son iguales, por lo que

$$V_n = V_f - \frac{Z_{nk}}{Z_{kk}} V_f = V_f\left(1 - \frac{Z_{nk}}{Z_{kk}}\right) \qquad 6.40$$

$$V_m = V_f\left(1 - \frac{Z_{mk}}{Z_{kk}}\right) \qquad 6.41$$

$$I_{nm} = \frac{V_f(Z_{mk} - Z_{nk})}{z_{nm} \times Z_{kk}} \qquad 6.42$$

Si además de esto se considera que el voltaje de prefalla es igual 1.0 se tiene

$$V_n = 1.0 - \frac{Z_{nk}}{Z_{kk}} \qquad 6.43$$

$$V_m = 1.0 - \frac{Z_{mk}}{Z_{kk}} \qquad 6.44$$

$$I_{nm} = \frac{Z_{mk} - Z_{nk}}{z_{nm} \times Z_{kk}} \qquad 6.45$$

Las ecuaciones anteriores derivadas para el cálculo de voltajes y corrientes de cortocircuitos trifásicos pueden ser representadas por el equivalente de rastrillo, tal como se muestra en la figura 6.19.

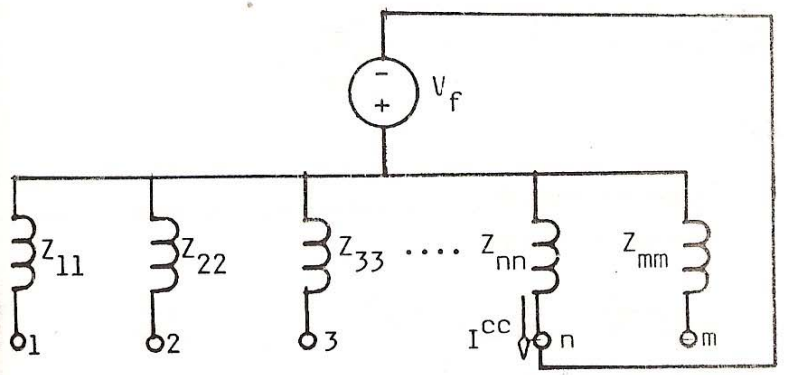


Fig. 6.19

Z_{11}, Z_{22}, Z_{33} . . . Z_{nn} y Z_{mm} son los valores de la diagonal de la matriz impedancia de barra. No aparecen los valores fuera de la diagonal de la matriz Z para no complicar el dibujo, pero hay que tomarlas en cuenta en cada uno de los cálculos.

Para un cortocircuito trifásico en la barra n de la figura 6.19 se tiene

$$I^{cc} = \frac{V_f}{Z_{nn}}$$

$$V_1 = V_f - Z_{1n}I^{cc} = V_f - \frac{Z_{1n}}{Z_{nn}} V_f$$

$$V_2 = V_f - Z_{2n}I^{cc} = V_f - \frac{Z_{2n}}{Z_{nn}} V_f$$

$$V_3 = V_f - Z_{3n}I^{cc} = V_f - \frac{Z_{3n}}{Z_{nn}} V_f$$

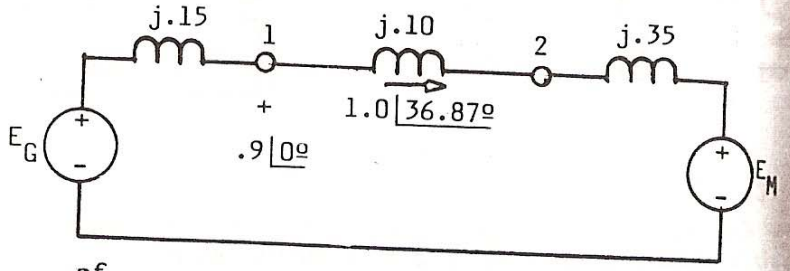
$$V_n = V_f - Z_{nn} I^{cc} = V_f - V_f = 0$$

$$V_m = V_f - Z_{mn} I^{cc} = V_f - \frac{Z_{mn}}{Z_{nn}} V_f$$

EJEMPLO 14

Resolver el Ejemplo 8 por el método de la matriz impedancia de barra.

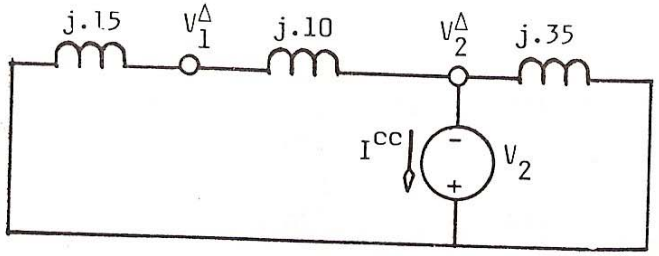
Antes del cortocircuito:



$V_1^{pf} = .9 + j0.0$ $\qquad V_2^{pf} = .96 - j.08$

$E_G = .81 + j.12$ $\qquad E_M = 1.17 - j.36$

Después del cortocircuito:



$$\underset{\sim}{Y} = -j \begin{bmatrix} 16.667 & -10 \\ -10 & 12.857 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\underset{\sim}{Z} = j \begin{bmatrix} .1125 & .0875 \\ .0875 & .1457 \end{bmatrix}$$

$$I^{cc} = \frac{V_2}{Z_{22}} = \frac{.96 - j.08}{j.1457} = -.549 - j6.583 \text{ pu}$$

$$= 6.606\underline{|-94.767º} \text{ pu}$$

$$V_1^{\Delta} = -\frac{Z_{12}}{Z_{22}} V_2 = -\frac{.0875}{.1457} \times (.96 - j.08)$$

$$= -.576 + j.048$$

$$V_1 = V_1^{pf} + V_1^{\Delta} = .9 - .576 + j.048$$

$$= .324 + j.048$$

$$V_2 = V_2^{pf} + V_2^{\Delta} = 0.0$$

$$I_G = \frac{V_1 - V_2}{z_{12}} = \frac{.324 + j.048}{j.10} = .48 - j3.24 \text{ pu}$$

$$= 3.275\underline{|-81.573º} \text{ pu}$$

EJEMPLO 15

Resolver el Ejemplo 9 por el método de la matriz impedancia de barra.

La matriz impedancia de barra del sistema del Ejemplo 9 y calculada en el Capítulo 3 es

$$Z = j \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .1670 & .1359 & .0774 & .0508 & .0318 & .0498 \\ .1359 & .2085 & .1187 & .0778 & .0488 & .0763 \\ .0774 & .1187 & .1968 & .1290 & .0809 & .1265 \\ .0508 & .0778 & .1290 & .2030 & .1276 & .0829 \\ .0318 & .0488 & .0809 & .1276 & .1605 & .0520 \\ .0498 & .0763 & .1265 & .0829 & .0520 & .2420 \end{bmatrix} \end{array}$$

La corriente de cortocircuito

$$I^{cc} = \frac{V_f}{Z_{33}} = \frac{1.0}{j.1968} = -j5.081 \text{ pu}$$

Los voltajes en todas las barras son

$$V_1 = 1.0 - .0774/.1968 = .607$$

$$V_2 = 1.0 - .1187/.1968 = .397$$

$$V_3 = 1.0 - .1968/.1968 = .000$$

$$V_4 = 1.0 - .1290/.1968 = .345$$

$$V_5 = 1.0 - .0809/.1968 = .589$$

$$V_6 = 1.0 - .1265/.1968 = .357$$

Las corrientes son

$$I_{12} = \frac{V_1 - V_2}{z_{12}} = \frac{.607 - .397}{j.12} = -j1.750 \text{ pu}$$

$$I_{23} = \frac{V_2 - V_3}{z_{23}} = \frac{.397 - .000}{j.227} = -j1.749 \text{ pu}$$

$$I_{43} = \frac{V_4 - V_3}{z_{43}} = \frac{.345 - .000}{j.181} = -j1.906 \text{ pu}$$

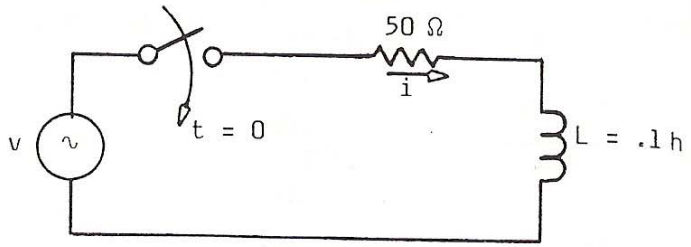
$$I_{54} = \frac{V_5 - V_4}{z_{54}} = \frac{.589 - .345}{j.128} = -j1.906 \text{ pu}$$

$$I_{63} = \frac{V_6 - V_3}{z_{63}} = \frac{.357 - .000}{j.250} = -j1.428 \text{ pu}$$

PROBLEMAS

1. Al circuito siguiente se le aplica una tensión de 80 voltios pico a pico a una frecuencia de 60 Hz. Calcular:

a) El valor de la impedancia.
b) El valor de la componente directa de la corriente al cerrar el interruptor si el valor instantáneo del voltaje en ese momento es de −20 voltios.
c) El valor de la componente directa de la corriente al cerrar el interrupsi el valor instantáneo del voltaje en ese momento es el máximo positivo.
d) El valor instantáneo de la tensión que produce una componente de corriente directa máxima al cerrar el interruptor.
e) El valor instantáneo de la tensión que no produce ninguna componente de corriente directa al cerrar el interruptor.
f) El valor de la corriente directa a .1, .5, 1.0 y 2.0 ciclos después de cerrar el interruptor si este se cierra cuando el valor de la tensión es máxima positiva.
g) El valor eficaz de la corriente total en las condiciones de la parte anterior.
h) Hacer una gráfica de I vs. t de la parte anterior



2. Las medidas siguientes fueron tomadas de un oscilograma resultante de las corrientes de cortocircuito trifásico de un generador de 15 MVA, 11.8 KV, 3F, 60 Hz, 1800 RPM. El voltaje de línea a línea en vacío durante la prueba fue de 5.9 KV.

a) Graficar la componente de corriente directa desde 0.0 hasta 1.0 segundos.
b) Graficar la corriente de cortocircuito desde 0.0 hasta 1.0 segundos descontando la componente de corriente directa.
c) Encontrar las reactancias subtransitoria, transitoria y de régimen permanente del generador

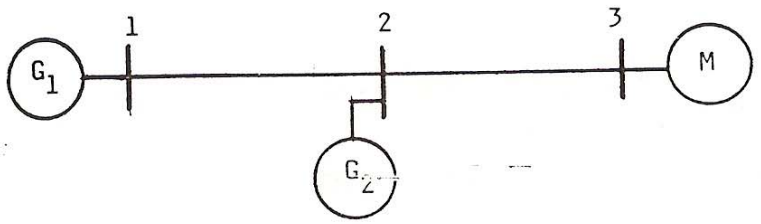
TIEMPO (milisegundos)	VALORES DE LA ORDENADA DE LA ENVOLVENTE (amperios)	
	SUPERIOR	INFERIOR
0	5075	−1215
20	4180	− 910
40	3670	− 796
60	3180	− 780
80	2805	− 800
100	2566	− 868
120	2380	− 960
140	2160	− 995
160	2048	−1050
180	1925	−1110
200	1805	−1165
250	1659	−1196
300	1463	−1212
350	1340	−1180
400	1293	−1177
600	1053	−1091
800	1024	−1024
1000	926	− 926

3. Un sistema de potencia está compuesto de dos generadores que alimentan a un motor sincrónico, tal como lo indica la figura. Las características del sistema son:

G_1: X =j.82 pu, X' =j.65 pu, X" =j.16 pu.
G_2: X =j.85 pu, X' =j.60 pu, X" =j.20 pu.
M : X =j1.1 pu, X' =j.90 pu, X" =j.33 pu.
L_{12}: X =j.45 pu, L_{23}: X =j.52 pu.

En los terminales del motor ocurre un cortocircuito trifásico cuando el voltaje en esos terminales es de .92 $\angle$ 0° pu y la corriente en cada generador es I_{G_1} = .65 $\angle$ −20° pu, I_{G_2} = .83 $\angle$ 35° pu.

Calcular la corriente de cortocircuito en cada parte del sistema usando el método del voltaje detrás de la reactancia subtransitoria.



4. Repetir el problema 3 usando el método de superposición de corrientes. Compare resultados.

5. Los datos del sistema de potencia que se indica son los siguientes:

G_1: 30 MVA, 6.6 KV, X" = j.12 pu.
G_2: 30 MVA, 6.6 KV, X" = j.12 pu
T_1: 25 MVA, 7.5 - 2.4 KV, X = j.10 pu
T_2: 20 MVA, 7.2 - 2.6 KV, X = j.10 pu
LINEA 2-3: X = j.05 Ω

Tomando como base 25 MVA, 7.0 KV en el generador G_2 calcular en amperios la corriente de cada generador y la corriente del cortocircuito para un cortocircuito trifásico en la barra 3, despreciando las corrientes de prefalla. Antes de la falla el voltaje en la barra 3 es 2.6 KV.



6. Repetir el problema 5 tomando como base a 20 MVA, 2.4 KV en la barra 2 y a 30 MVA, 6.6 KV en la barra 1. Tabular estos resultados conjuntamente con los del problema 5.

7. En el siguiente sistema ocurre un cortocircuito en la barra 4. Considerando las corrientes de prefalla calcular circuitalmente en amperios las corrientes de cortocircuito en dicha barra y las corrientes totales de cortocircuito de cada generador. Seleccionar los valores base de 20 MVA, 6.2 KV en la barra 1. Los datos del sistema son:

G_1: 25 MVA, 6.5 KV, $X'' = j.12$ pu

G_2: 25 MVA, 7.2 KV, $X'' = j.10$ pu

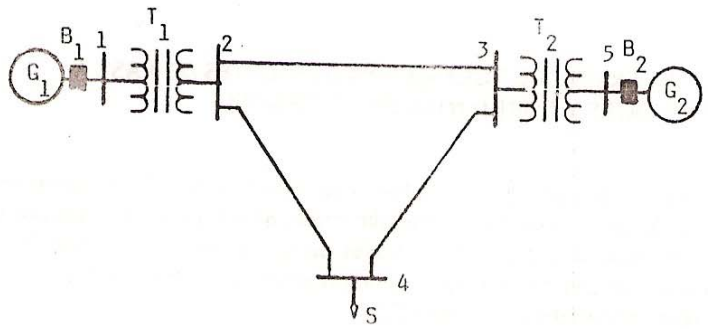
T_1: 20 MVA, 7.5 - 2.2 KV, $X = j.10$ pu

T_2: 25 MVA, 6.2 - 2.4 KV, $X = j.10$ pu

L_{23}: $X = j.07\ \Omega$, L_{34}: $X = j.08\ \Omega$, L_{24}: $X = j.06\ \Omega$.

$V_2 = 2.182\angle -2.53^\circ$ KV, $V_3 = 2.123\angle -1.46^\circ$ KV,

$V_4 = 2.070\angle -3.0^\circ$ KV.



8. Repetir el problema 7 tomando como base 30 MVA, 2.2 KV en la barra 4. Compare resultados.

9. Si los interruptores B_1 y B_2 del problema 7 son del tipo en aceite de 3 ciclos, calcular:

a) La corriente que deben soportar.
b) La corriente que deben interrumpir.
c) La potencia de interrupción en KVA.

10. Repetir el problema 3 usando el método de la matriz impedancia de barra.

11. Repetir el problema 5 usando el método de la matriz impedancia de barra.

12. Repetir el problema 7 usando el método de la matriz impedancia de barra.

CAPITULO VII

COMPONENTES SIMETRICAS Y DIAGRAMAS DE SECUENCIAS

1. INTRODUCCION

El sistema de potencia eléctrica funciona normalmente en forma trifásica balanceada. Sin embargo, existen algunas situaciones que pueden producir efectos de desbalances; siendo una de ellas los diferentes tipos de fallas asimétricas y los diferentes tipos de cargas desbalanceadas. Las corrientes y voltajes trifásicos desbalanceados pueden ser descompuestos, mediante una transformación lineal conveniente, en tres conjuntos de componentes trifásicas balanceadas, llamadas componentes simétricas. Este artificio matemático permite entonces analizar el sistema desbalanceado en forma balanceada por medio de las componentes simétricas y luego transformar los resultados a la forma original de las variables de fase, aplicando la transformación inversa.

2. CONVERSION DE VOLTAJES Y CORRIENTES DE FASE A VOLTAJES Y CORRIENTES DE SECUENCIA.

En esta parte se estudiará la forma de obtener la relación entre las componentes de fase y las componentes simétricas de voltajes y corrientes de sistemas trifásicos desbalanceados a través de la transformación lineal P. Se tienen tres impedancias de valor Z y con reactancias mutuas iguales de valor M, tal como se muestra en la figura 7.1.

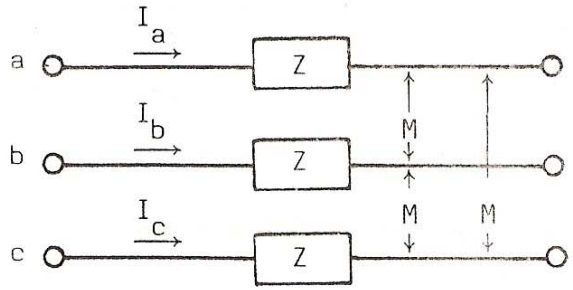


Fig. 7.1

A estas impedancias se les aplican los voltajes de fase V_a, V_b y V_c, resultando las corrientes de fase I_a, I_b e I_c, respectivamente. Los voltajes de fase son entonces:

$$V_a = ZI_a + MI_b + MI_c$$

$$V_b = MI_a + ZI_b + MI_c \qquad 7.1$$

$$V_c = MI_a + MI_b + ZI_c$$

y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & M & M \\ M & Z & M \\ M & M & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \qquad 7.2$$

o también

$$\underset{\sim}{V}_{abc} = \underset{\sim}{Z}_{abc}\ \underset{\sim}{I}_{abc} \qquad 7.3$$

Se desea ahora encontrar una transformación lineal $\underset{\sim}{P}$ que relacione a los valores de fase con los valores de secuencia. Entonces

$$\underset{\sim}{V}_{abc} = \underset{\sim}{P}\ \underset{\sim}{V}_{012} \qquad 7.4$$

e

$$\underset{\sim}{I}_{abc} = \underset{\sim}{P}\ \underset{\sim}{I}_{012} \qquad 7.5$$

En donde V_{012} está formado por los voltajes de secuencia V_0, V_1 y V_2 e $\underset{\sim}{I}_{012}$ está formada por las corrientes de secuencia I_0, I_1 e I_2.

Los voltajes de fase y las corrientes de fase son iguales a la transformación $\underset{\sim}{P}$ aplicada a los voltajes de secuencia y a las corrientes de secuencia respectivamente.

Combinando las ecuaciones 7.3, 7.4 y 7.5 se tiene que

$$\underset{\sim}{V}_{abc} = \underset{\sim}{P}\ \underset{\sim}{V}_{012} = \underset{\sim}{Z}_{abc}\ \underset{\sim}{I}_{abc} = \underset{\sim}{Z}_{abc}\ \underset{\sim}{P}\ \underset{\sim}{I}_{012}$$

y

$$\underset{\sim}{V}_{012} = \underset{\sim}{P}^{-1}\ \underset{\sim}{Z}_{abc}\ \underset{\sim}{P}\ \underset{\sim}{I}_{012} = \underset{\sim}{Z}_{012}\ \underset{\sim}{I}_{012} \qquad 7.6$$

Es decir, el vector voltaje de secuencia es igual a la matriz impedancia de secuencia por el vector corriente de secuencia, siendo la impedancia de secuencia

$$\underset{\sim}{Z}_{012} = \underset{\sim}{P}^{-1}\ \underset{\sim}{Z}_{abc}\ \underset{\sim}{P} \qquad 7.7$$

El resultado de multiplicar la inversa de la transformación por la matriz impedancia de fase y por la transformación es una matriz de secuencia Z_{012} diagonalizada o desacoplada, es decir

$$Z_{012} = \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \qquad 7.8$$

Se ha descrito la forma de relacionar a los voltajes, corrientes e impedancia de fase con los voltajes, corrientes e impedancias de secuencia. En el cálculo se puede tomar cualquier transformación lineal $\underset{\sim}{P}$, pero si se quiere ob-

tener un conjunto de componentes simétricas, se debe seleccionar una transformación $\underline{P}$ cuyas columnas sean simétricas con el sistema de potencia que se desea analizar. Nos concretaremos en este libro al sistema de potencia trifásico, por lo que se desarrollará la forma de obtener la transformación $\underline{P}$ para dicho sistema. Antes de buscar la referida transformación es necesario definir al operador a y conseguir algunas de sus relaciones.

2.1 EL OPERADOR a Y SUS RELACIONES

Por definición el operador a es un vector con una magnitud igual a uno y un ángulo igual a 120 grados. De aquí se pueden derivar las siguientes relaciones:

$$a = 1.0\angle 120^\circ = -.500 + j.866$$

$$a^2 = a \times a = 1.0\angle 240^\circ = -.500 - j.866$$

$$a^3 = a \times a \times a = 1.0\angle 360^\circ = 1.0 + j0.0$$

$$a^4 = a^3 \times a = a$$

$$a^5 = a^3 \times a^2 = a^2$$

$$1 + a = 1.0 - .500 + j.866 = .500 + j.866 = -a^2$$
$$= 1.0\angle 60^\circ$$

$$1 + a^2 = 1.0 - .500 - j.866 = .500 - j.866 = -a$$
$$= 1.0\angle 300^\circ$$

$$1 - a = 1.0 + .500 - j.866 = 1.500 - j.866$$
$$= \sqrt{3}\angle 330^\circ$$

$$1 - a^2 = 1.0 + .500 + j.866 = 1.500 + j.866$$
$$= \sqrt{3}\angle 30^\circ$$

$$1 + a + a^2 = 1.0 - .500 + j.866 - .500 - j.866$$
$$= 0.0 + j0.0$$

$$a - a^2 = -.500 + j.866 + .500 + j.866 = j\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}\angle 90^\circ$$

En la figura 7.2 se enseñan éstas y otras relaciones del operador a.

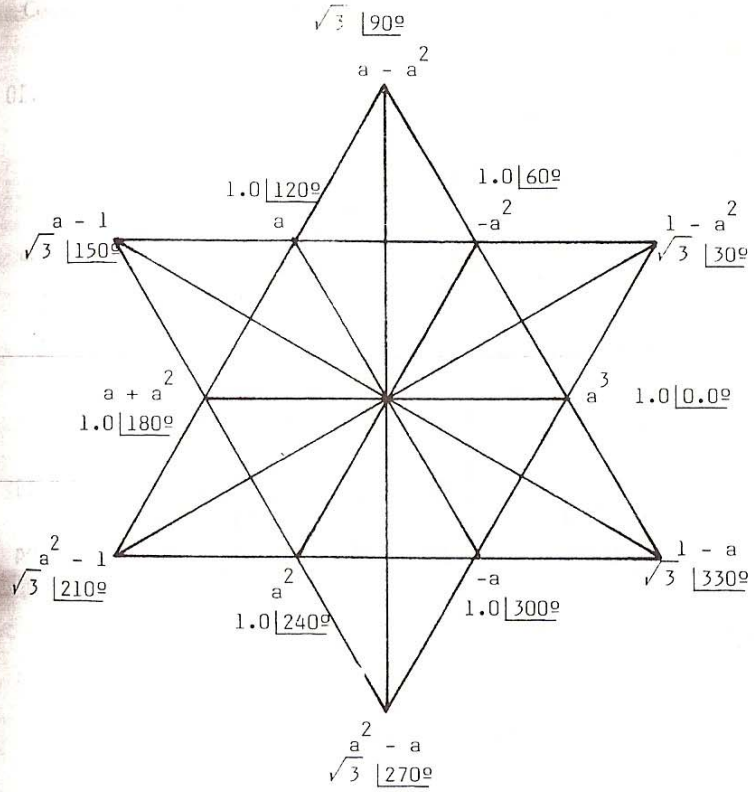


Fig. 7.2

2.2 LA TRANSFORMACION LINEAL P A TRAVES DE LOS VALORES Y VECTORES CARACTERISTICOS.

La forma de conseguir a la transformación $\underset{\sim}{P}$ es a través de los valores y vectores característicos. $\underset{\sim}{P}$ es una matriz cuyas columnas son los vectores característicos.

Se forma la ecuación

$$[\underset{\sim}{Z}_{abc} - \lambda \underset{\sim}{I}]\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{0} \qquad 7.9$$

En donde $\underset{\sim}{I}$ es la matriz unidad, λ es el valor característico y $\underset{\sim}{u}$ es el vector característico.

La ecuación característica se consigue con

$$\det [\underset{\sim}{Z}_{abc} - \lambda \underset{\sim}{I}] = 0 \qquad 7.10$$

de la cual se obtienen los valores característicos.

Desarrollando se tiene

$$[\underset{\sim}{Z}_{abc} - \lambda \underset{\sim}{I}] = \begin{bmatrix} Z & M & M \\ M & Z & M \\ M & M & Z \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Z-\lambda & M & M \\ M & Z-\lambda & M \\ M & M & Z-\lambda \end{bmatrix} \qquad 7.11$$

por lo que

$$\det[\underset{\sim}{Z}_{abc} - \lambda \underset{\sim}{I}] = \lambda^3 - 3Z\lambda^2 + \lambda(3Z^2 - 3M^2) + 3M^2Z - 2M^3 - Z^3$$

y la ecuación característica es

$$(\lambda - Z + M)(\lambda - Z + M)(\lambda - 2M - Z) = 0$$

de donde los valores característicos son

$$\lambda_1 = Z + 2M$$

$$\lambda_2 = Z - M \qquad 7.12$$

$$\lambda_3 = Z - M$$

Para calcular los vectores característicos se introducen los valores característicos obtenidos en la ecuación 7.12 dentro de la ecuación 7.11 y se calculan los vectores $\underset{\sim}{u}$ de manera que se cumpla la ecuación 7.9.

Con $\lambda_1 = Z + 2M$:

$$\begin{bmatrix} -2M & M & M \\ M & -2M & M \\ M & M & -2M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$-2u_{11} + u_{12} + u_{13} = 0$$

$$u_{11} - 2u_{12} + u_{13} = 0 \qquad 7.13$$

$$u_{11} + u_{12} - 2u_{13} = 0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones independientes se obtiene por solución única que

$$u_{11} = u_{12} = u_{13} = 1$$

ó

$$\underset{\sim}{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con $\lambda_2 = Z - M$

$$\begin{bmatrix} M & M & M \\ M & M & M \\ M & M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$u_{21} + u_{22} + u_{23} = 0 \qquad 7.14$$

Se selecciona arbitrariamente

$$u_{21} = 1 \qquad y \qquad u_{22} = a^2$$

y se obtiene

$$u_{23} = -u_{21} - u_{22} = -1 - a^2 = a$$

o también

$$\underset{\sim}{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix}$$

Es decir, se obtiene un vector característico con sus componentes completamente simétricas y de secuencia positiva, tal como se enseña en la figura 7.3.

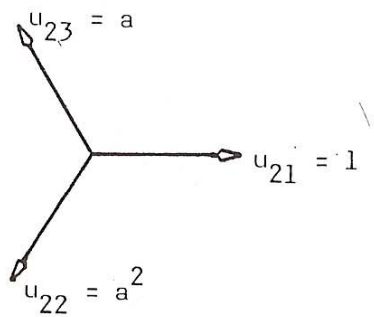


Fig. 7.3

Con $\lambda_3 = Z - M$:

$$\begin{bmatrix} M & M & M \\ M & M & M \\ M & M & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$u_{31} + u_{32} + u_{33} = 0 \qquad 7.15$$

Se selecciona arbitrariamente

$$u_{31} = 1 \qquad y \qquad u_{32} = a$$

y se obtiene

$$u_{33} = -u_{31} - u_{32} = -1 - a = a^2$$

o también

$$\underset{\sim}{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$$

Es decir, se obtiene un vector característico con sus componentes completamente simétricas y de secuencia negativa, tal como se enseña en la figura 7.4.

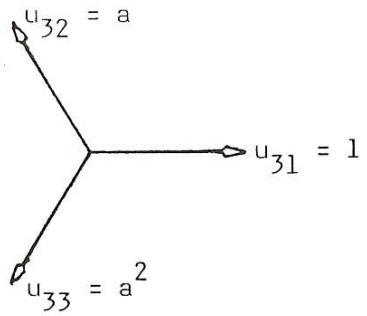


Fig. 7.4

Las columnas de la transformación lineal P son los vectores característicos, por lo tanto

$$\underset{\sim}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \qquad 7.16$$

y

$$\underset{\sim}{P}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \qquad 7.17$$

Aplicando la ecuación 7.4 se obtiene

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$\begin{aligned} V_a &= V_0 + V_1 + V_2 \\ V_b &= V_0 + a^2V_1 + aV_2 \\ V_c &= V_0 + aV_1 + a^2V_2 \end{aligned} \qquad 7.18$$

y también

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$$

por lo que

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{3}(V_a + V_b + V_c) \\ V_1 &= \frac{1}{3}(V_a + aV_b + a^2V_c) \\ V_2 &= \frac{1}{3}(V_a + a^2V_b + aV_c) \end{aligned} \qquad 7.19$$

lo que relaciona a los voltajes de fase con los voltajes de secuencia.

Suponga ahora que cada voltaje de fase tiene tres componentes, de manera que

$$\begin{aligned} V_a &= V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} \\ V_b &= V_{b0} + V_{b1} + V_{b2} \\ V_c &= V_{c0} + V_{c1} + V_{c2} \end{aligned} \qquad 7.20$$

Es decir, que cada voltaje de fase está formado por la suma de sus respectivos voltajes de secuencia. Si se define

$$V_0 \triangleq V_{a0} \qquad V_1 \triangleq V_{a1} \qquad V_2 \triangleq V_{a2} \qquad 7.21$$

en donde los voltajes de secuencia quedan referidos a la fase a. Se tiene entonces que

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix}$$

por lo que

$$V_a = V_0 + V_1 + V_2 = V_{a0} + V_{a1} + V_{a2}$$

$$V_b = V_0 + a^2V_1 + aV_2 = V_{a0} + a^2V_{a1} + aV_{a2} \qquad 7.22$$

$$V_c = V_0 + aV_1 + a^2V_2 = V_{a0} + aV_{a1} + a^2V_{a2}$$

Combinando las ecuaciones 7.20 y 7.22 se tiene que

$$V_{b0} = V_{a0} \qquad V_{c0} = V_{a0}$$

$$V_{b1} = a^2V_{a1} \qquad V_{c1} = aV_{a1}$$

$$V_{b2} = aV_{a2} \qquad V_{c2} = a^2V_{a2}$$

De lo cual se concluye que las componentes de secuencia V_{a_1}, V_{b_1} y V_{c_1} forman un sistema trifásico balanceado con secuencia *abc* o secuencia positiva; V_{a_2}, V_{b_2}, V_{c_2} forman un sistema trifásico balanceado con secuencia cba o secuencia negativa y que V_{a_0}, V_{b_0} y V_{c_0} forman un sistema de tres vectores iguales en magnitud y fase o secuencia cero, tal como se muestra en la figura 7.5.

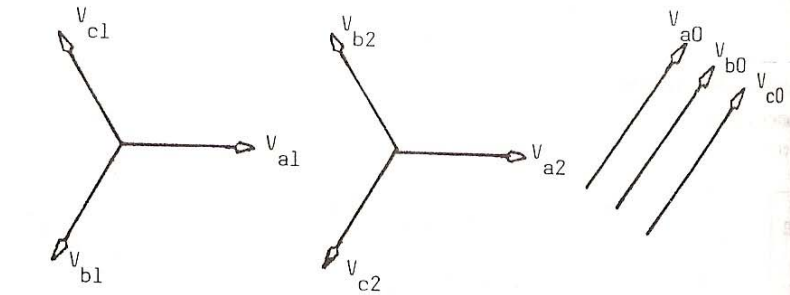


Fig. 7.5

Cuando las componentes de secuencia están relacionadas en esta forma se llaman componentes simétricas. Cada vector de fase estará formado entonces por la suma de las componentes de las tres secuencias.
En forma inversa las componentes de secuencia son

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{P}^{-1} V_{abc} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$$

Todo lo derivado anteriormente ha sido en función de voltajes, pero las relaciones son igualmente válidas para las corrientes, es decir

$$\underset{\sim}{I}_{abc} = \underset{\sim}{P}\ \underset{\sim}{I}_{012} \qquad 7.23$$

$$\underset{\sim}{I}_{012} = \underset{\sim}{P}^{-1}\ \underset{\sim}{I}_{abc} \qquad 7.24$$

Aplicando ahora la ecuación 7.7 se tiene

$$\begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z & M & M \\ M & Z & M \\ M & M & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Z + 2M & 0 & 0 \\ 0 & Z - M & 0 \\ 0 & 0 & Z - M \end{bmatrix} \qquad 7.25$$

Se ha obtenido una matriz desacoplada con valores en la diagonal igual a los valores característicos. Estos resultados serán siempre los mismos independientemente de los valores característicos seleccionados.

De acuerdo a los resultados de las ecuaciones 7.8 y 7.25 se define entonces

$Z_0 = Z + 2M$ = Impedancia de secuencia cero.
$Z_1 = Z - M$ = Impedancia de secuencia positiva.
$Z_2 = Z - M$ = Impedancia de secuencia negativa.

J.L. Fortescue en 1918 extendió la idea de las componentes simétricas para sistemas de N fases de la siguiente manera[1]

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a^{N-1} & a^{N-2} & \cdots & a \\ 1 & a^{N-2} & a^{N-4} & \cdots & a^2 \\ 1 & a^{N-3} & a^{N-6} & \cdots & a^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & a & a^2 & \cdots & a^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{N-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & a^2 & \cdots & a^{N-1} \\ 1 & a^2 & a^4 & \cdots & a^{2(N-1)} \\ 1 & a^3 & a^6 & \cdots & a^{3(N-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & a^{N-1} & a^{2(N-1)} & \cdots & a^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_z \end{bmatrix}$$

[1] C. L. Fortescue, "Method of symmetrical coordinates applied to the solution of polyphase networks," AIEE Transactions, vol. 37, 1918, Páginas 1027 - 1140.

Siendo $a = 1.0 \angle 360°/N$

EJEMPLO 1

Determinar analíticamente las tensiones de fase respecto al neutro en un circuito en el que las componentes de secuencia son

$$V_{an1} = 30 \angle 0º$$

$$V_{an2} = 20 \angle 90º$$

$$V_{an0} = 10 \angle 180º$$

$$V_{an} = V_{an0} + V_{an1} + V_{an2} = 10 \angle 180º + 30 \angle 0º + 20 \angle 90º$$

$$= 28.284 \angle 45º$$

$$V_{bn} = V_{bn0} + V_{bn1} + V_{bn2} = V_{an0} + a^2 V_{an1} + a V_{an2}$$

$$= 10 \angle 180º + 30 \angle 240º + 20 \angle 210º = 55.54 \angle 220.37º$$

$$V_{cn} = V_{cn0} + V_{cn1} + V_{cn2} = V_{an0} + a V_{an1} + a^2 V_{an2}$$

$$= 10 \angle 180º + 30 \angle 120º + 20 \angle 330º = 17.72 \angle 115.67º$$

EJEMPLO 2

Determinar las componentes simétricas de las corrientes de fase

$$I_a = 10 \angle 0º$$

$$I_b = 15 \angle 240º$$

$$I_c = 20 \angle 90º$$

$$I_{a0} = \frac{1}{3}(I_a + I_b + I_c) = \frac{1}{3}(10 \angle 0º + 15 \angle 240º + 20 \angle 90º)$$

$$= 2.48 \angle 70.372º$$

$$I_{a1} = \frac{1}{3}(I_a + aI_b + a^2 I_c) = \frac{1}{3}(10\angle 0º + 15\angle 360º + 20\angle 330º)$$

$$= 14.5\angle -13.9º$$

$$I_{a2} = \frac{1}{3}(I_a + a^2 I_b + aI_c) = \frac{1}{3}(10\angle 0º + 15\angle 120º + 20\angle 210º)$$

$$= 5.030\angle 168.590º$$

EJEMPLO 3

Las corrientes que circulan en las líneas que alimentan a una carga equilibrada conectada en triángulo son

$$I_a = 100\angle 0º \text{ Amperios}$$

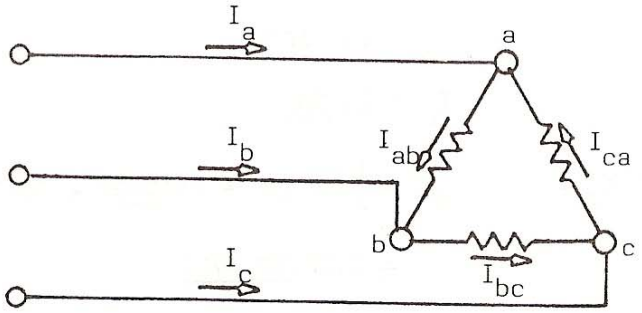
$$I_b = 141.2\angle 225º \text{ Amperios}$$

$$I_c = 100\angle 90º \text{ Amperios}$$

a) Determinar la relación entre las componentes simétricas de las corrientes de línea y las corrientes de fase.

b) Determinar las corrientes de fase a partir de las componentes simétricas de las corrientes de línea.

a) El diagrama de conexiones se muestra en la figura siguiente.



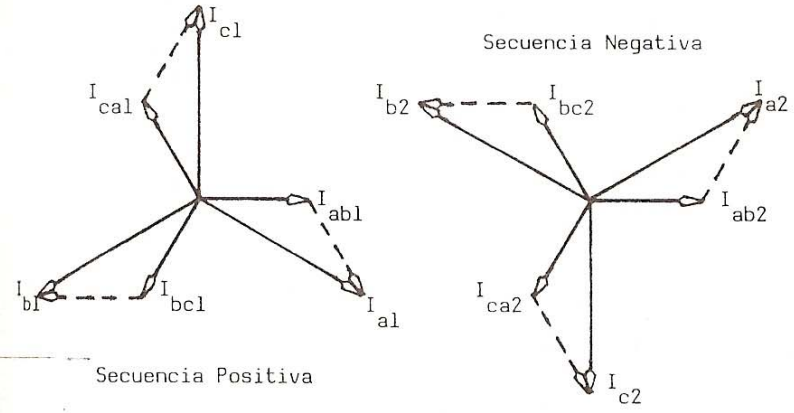
La relación entre las corrientes de línea y las corrientes de fase es

$$I_a = I_{ab} - I_{ca}$$

$$I_b = I_{bc} - I_{ab}$$

$$I_c = I_{ca} - I_{bc}$$

Los diagramas fasoriales para las secuencias positiva y negativa de las corrientes de línea y de fase se muestran en la figura siguiente.



La relación entre las corrientes de línea y de fase es

$$I_{ab1} = \frac{I_{a1}}{\sqrt{3}}\angle 30º \qquad I_{ab2} = \frac{I_{a2}}{\sqrt{3}}\angle -30º$$

Si el análisis se hace en valores por unidad la relación es

$$I_{ab1} = I_{a1}\angle 30º \qquad I_{ab2} = I_{a2}\angle -30º$$

Por lo que

$$I_{a0} = \frac{1}{3}(100\angle 0º + 141.4\angle 225º + 100\angle 90º) = 0.0 + j0.0$$

$$I_{a1} = \frac{1}{3}(100\angle 0º + 141.4\angle 345º + 100\angle 330º) = 111.53\angle -15º$$

$$I_{a2} = \frac{1}{3}(100\angle 0º + 141.4\angle 465º + 100\angle 210º) = 29.88\angle 105º$$

$$I_{b0} = I_{c0} = I_{a0} = 0.0 + j0.0$$

entonces

$$I_{ab0} = 0.0 + j0.0$$

$$I_{ab1} = \frac{111.53}{\sqrt{3}}\angle 30º - 15º = 64.39\angle 15º = 62.20 + j16.67$$

$$I_{ab2} = \frac{29.88}{\sqrt{3}}\angle -30º + 105º = 17.25\angle 75º = 4.47 + j16.67$$

$$I_{ab} = I_{ab0} + I_{ab1} + I_{ab2} = 66.67 + j33.33$$
$$= 74.54\angle 26.56º$$

$$I_{bc} = I_{bc0} + I_{bc1} + I_{bc2} = 64.39\angle 255º + 17.25\angle 195º$$
$$= 74.54\angle -116.56º$$

$$I_{ca} = I_{ca0} + I_{ca1} + I_{ca2} = 64.39\angle 135º + 17.25\angle 315º$$
$$= 47.14\angle 135º$$

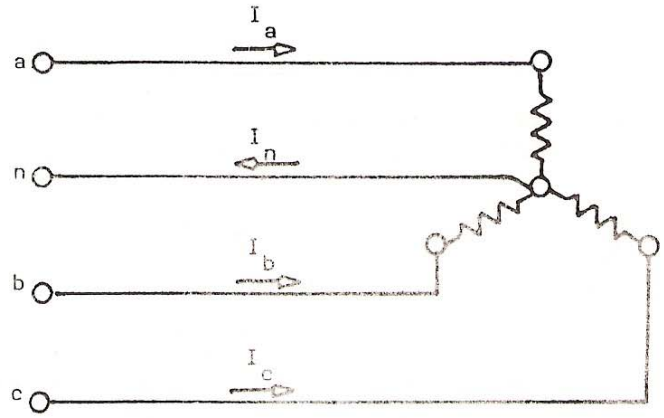
3. LA CORRIENTE DE SECUENCIA CERO EN LOS SISTEMAS TRIFASICOS DE TRES Y DE CUATRO HILOS.

En un sistema trifásico con neutro la suma de las corrientes de las tres fases es igual a la corriente en el neutro. En la figura siguiente se observa que

$$I_n = I_a + I_b + I_c = (I_{a0} + I_{a1} + I_{a2}) + (I_{a0} + a^2 I_{a1} + aI_{a2}) + (I_{a0} + aI_{a1} + a^2 I_{a2}) \qquad 7.26$$

$$= 3I_{a0} + I_{a1}(a^2 + a + 1) + I_{a2}(a^2 + a + 1) = 3I_{a0}$$

Esto quiere decir que la corriente del neutro es igual a tres veces la corriente de secuencia cero. Si el sistema trifásico no tiene neutro, no existirá componentes de secuencia cero. Por esta razón las corrientes de línea que alimentan a una carga trifásica conectada en triángulo o en estrella sin neutro no tienen componentes de corriente de secuencia cero. Asimismo, todas las corrientes del neutro son corrientes de secuencia cero.



EJEMPLO 4

Los voltajes en los terminales de una carga equilibrada formada por tres resistencias de 10 ohmios cada una conectadas en estrella y sin neutro son

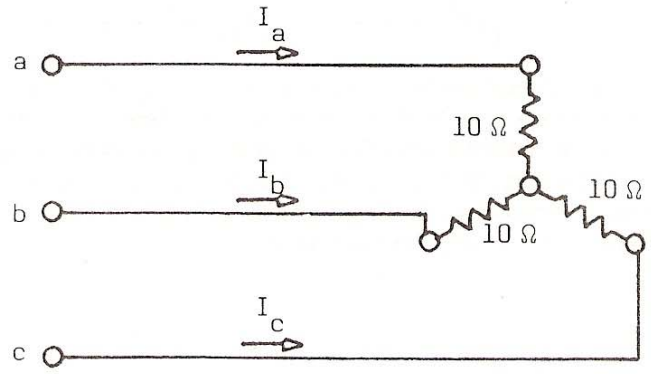
$$V_{ab} = 100\angle 0º \text{ voltios}$$

$$V_{bc} = 90\angle 240º \text{ voltios}$$

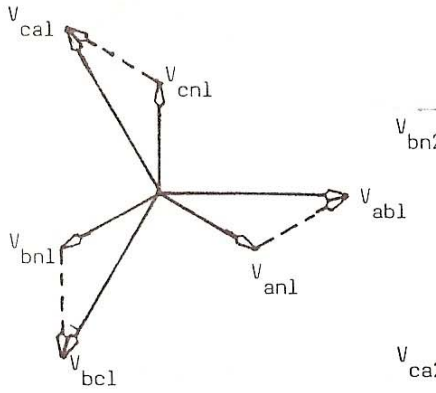
$$V_{ca} = 95.5\angle 125.2º \text{ voltios}$$

a) Determinar la relación entre las componentes simétricas de los voltajes de línea y de fase.

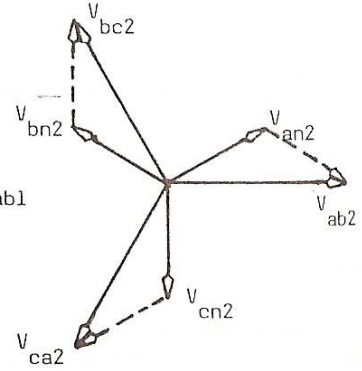
b) Si la carga no tiene neutro calcular las corrientes de línea a partir de las componentes simétricas de los voltajes de línea.



a) Los diagramas fasoriales para las secuencias positiva y negativa de los voltajes de fase y de línea se muestran en la figura siguiente.



Secuencia Positiva



Secuencia Negativa

Los voltajes de secuencia son

$$V_{ab0} = V_{bc0} = V_{ca0} = \frac{1}{3}(100\angle 0^\circ + 90\angle 240^\circ + 95.5\angle 125.2^\circ)$$
$$= 0.0 + j0.0$$

$$V_{ab1} = \frac{1}{3}(100\angle 0^\circ + 90\angle 360^\circ + 95.5\angle 365.2^\circ)$$
$$= 95.08\angle 1.74^\circ$$

$$V_{ab2} = \frac{1}{3}(100\angle 0^\circ + 90\angle 480^\circ + 95.5\angle 245.2^\circ)$$
$$= 5.77\angle -30.36^\circ$$

$$V_{an0} = V_{bn0} = V_{cn0} = 0.0 + j0.0$$

$$V_{an1} = \frac{V_{ab1}}{\sqrt{3}}\angle -30^\circ = \frac{95.89}{\sqrt{3}}\angle 1.74^\circ - 30^\circ$$
$$= 54.89\angle -28.26^\circ = 48.35 - j25.99$$

$$V_{an2} = \frac{V_{ab2}}{\sqrt{3}}\angle 30^\circ = \frac{5.77}{\sqrt{3}}\angle -30.36^\circ + 30^\circ$$
$$= 3.33\angle -.36^\circ = 3.33 - j.02$$

En valores por unidad la relación entre los voltajes de fase y los voltajes de línea es

$$V_{an1} = V_{ab1}\angle -30^\circ \qquad V_{an2} = V_{ab2}\angle 30^\circ$$

b) Los voltajes de fase son

$$V_{an} = V_{an0} + V_{an1} + V_{an2} = 48.35 - j25.99 + 3.33 - j.02 = 51.68 - j26.01 = 57.86\angle -26.72^\circ$$

$$V_{bn} = 54.89\angle -148.26^\circ + 3.33\angle 119.64^\circ = 54.87\angle -151.73^\circ$$

$$V_{cn} = 54.89\angle -268.26^\circ + 3.33\angle -120.36^\circ = 52.10\angle 93.69^\circ$$

Las corrientes de secuencia son iguales a su voltaje de secuencia dividido por la impedancia de esa secuencia.

$$I_{a0} = I_{b0} = I_{c0} = 0.0 + j0.0$$

$$I_{a1} = \frac{V_{an1}}{Z_1} = \frac{54.89\angle -28.26}{10\angle 0º} = 5.489\angle -28.26º$$

$$I_{a2} = \frac{V_{an2}}{Z_2} = \frac{3.33\angle -.36º}{10\angle 0º} = .333\angle -.36º$$

Y las corrientes de fase son

$$I_a = 5.489\angle -28.26º + .333\angle -.36º = 5.786\angle -26.72º$$

$$I_b = 5.489\angle 211.74º + .333\angle 119.64º = 5.487\angle -151.73º$$

$$I_c = 5.489\angle 91.74º + .333\angle 239.64º = 5.210\angle 93.69º$$

EJEMPLO 5

Resolver el Ejemplo 4 en valores por unidad seleccionando una base de 1.0 KVA, 120 V.

La corriente y la impedancia base son

$$I_b = \frac{1000}{\sqrt{3} \times 120} = 4.811 \text{ amperios}$$

$$Z_b = \frac{(120)^2}{1000} = 14.40 \text{ ohmios}$$

Los voltajes de línea en valores por unidad son

$$V_{ab} = 100\angle 0º = \frac{100}{120}\angle 0º = .833\angle 0º \text{ pu}$$

$$V_{bc} = 90\angle 240º = \frac{90}{120}\angle 240º = .750\angle 240º \text{ pu}$$

$$V_{ca} = 95.5\angle 125.2º = \frac{95.5}{120}\angle 125.2º = .796\angle 125.2º \text{ pu}$$

Los voltajes de secuencia son

$$V_{ab0} = V_{bc0} = V_{ca0}$$

$$= \frac{1}{3}(.833\angle 0º + .750\angle 240º + .796\angle 125.2º) = 0.0$$

$$V_{ab1} = \frac{1}{3}(.833\angle 0º + .750\angle 360º + .796\angle 365.2º)$$

$$= .792\angle 1.74º \text{ pu}$$

$$V_{ab2} = \frac{1}{3}(.833\angle 0º + .750\angle 480º + .796\angle 245.2º)$$

$$= .048\angle -30.36º \text{ pu}$$

$$V_{an0} = V_{bn0} = V_{cn0} = 0.0 + j0.0$$

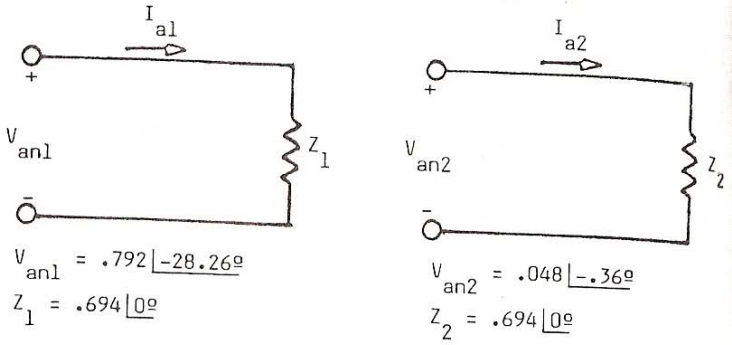
$$V_{an1} = V_{ab1}\angle -30º = .792\angle -28.26º \text{ pu}$$

$$V_{an2} = V_{ab2}\angle 30º = .048\angle -.36º \text{ pu}$$

De acuerdo a la ecuación 7.25 las impedancias de secuencia en este caso son iguales entre sí e iguales a la impedancia de fase, ya que no existen inductancias mutuas.

$$Z_0 = Z_1 = Z_2 = \frac{10}{14.40} = .694 \text{ pu}$$

Se puede escribir los diagramas de impedancias de la fase a para las secuencias positivas y negativas, de manera de calcular las corrientes de secuencia. (El voltaje de secuencia cero es cero y por lo tanto no hay corriente en esa secuencia).



$V_{an1} = .792\angle -28.26^\circ$

$Z_1 = .694\angle 0^\circ$

$V_{an2} = .048\angle -.36^\circ$

$Z_2 = .694\angle 0^\circ$

Las corrientes de secuencia son

$$I_{a1} = \frac{V_{an1}}{Z_1} = \frac{.792\angle -28.26^\circ}{.694\angle 0^\circ} = 1.141\angle -28.26^\circ \text{ pu}$$

$$I_{a2} = \frac{V_{an2}}{Z_2} = \frac{.048\angle -.36^\circ}{.694\angle 0^\circ} = .069\angle -.36^\circ \text{ pu}$$

Las corrientes de fase son

$$I_a = 1.141\angle -28.26^\circ + .069\angle -.36^\circ = 1.202\angle -26.69^\circ \text{ pu}$$

$$= 1.202\angle -26.29^\circ \times 4.811 = 5.783\angle -26.69^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_b = 1.141\angle 211.74^\circ + .069\angle 119.64^\circ = 1.140\angle -151.73^\circ \text{ pu}$$

$$= 1.140\angle -151.73^\circ \times 4.811 = 5.487\angle -151.73^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_c = 1.141\angle 91.74^\circ + .069\angle 239.64^\circ = 1.083\angle 93.68^\circ \text{ pu}$$

$$= 1.083\angle 93.68^\circ \times 4.811 = 5.211\angle 93.68^\circ \text{ Amperios}$$

4. LA POTENCIA EN FUNCION DE LAS COMPONENTES SIMETRICAS

Se puede expresar la potencia activa y reactiva de un sistema de potencia en función de las componentes simétricas de corrientes y voltajes de la siguiente manera:

La potencia aparente en un sistema trifásico en función de las corrientes y voltajes de cada una de las fases es

$$S = P + jQ = V_a I_a^* + V_b I_b^* + V_c I_c^* = \begin{bmatrix} V_a & V_b & V_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^* \\ I_b^* \\ I_c^* \end{bmatrix}$$

$$= \underset{\sim}{V}_{abc}^T \underset{\sim}{I}_{abc}^* \qquad 7.27$$

Substituyendo por las ecuaciones 7.4 y 7.23 se tiene

$$S = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{P} \underset{\sim}{V}_{012} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underset{\sim}{P}^* \underset{\sim}{I}_{012}^* \end{bmatrix} = \underset{\sim}{V}_{012}^T \underset{\sim}{P}^T \underset{\sim}{P}^* \underset{\sim}{I}_{012}^* \qquad 7.28$$

Pero

$$\underset{\sim}{P}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{P} \qquad 7.29$$

y

$$\underset{\sim}{P}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} = 3\underset{\sim}{P}^{-1} \qquad 7.30$$

Por lo que

$$S = V_{012}^T \; P \; 3 \; P^{-1} \; I_{012}^* = 3 \; V_{012}^T \; I_{012}^*$$

$$= 3V_0I_0^* + 3V_1I_1^* + 3V_2I_2^* \qquad 7.31a$$

Lo que demuestra que la potencia activa y reactiva de un sistema trifásico desbalanceado puede calcularse a través de las componentes simétricas de las corrientes y de los voltajes.

En valores por unidad la potencia es

$$S = V_0I_0^* + V_1I_1^* + V_2I_2^* \qquad 7.31b$$

EJEMPLO 6

Calcular la potencia activa y reactiva del sistema del Ejemplo 4.
Del Ejemplo 4 se tiene

$V_{an0} = 0.0 + j0.0$ V $I_{a0} = 0.0 + j0.0$ A

$V_{an1} = 54.84\angle -28.26^\circ$ V $I_{a1} = 5.489\angle -28.26^\circ$ A

$V_{an2} = 3.33\angle -.36^\circ$ V $I_{a2} = .333\angle -.36^\circ$ A

$$S = 3V_{an1}I_{a1}^* + 3V_{an2}I_{a2}^*$$

$$= 3 \times 54.84\angle -28.26^\circ \times 5.489\angle 28.26^\circ$$

$$+ 3 \times 3.33\angle -.36^\circ \times .333\angle .36^\circ = 907.2\angle 0^\circ \text{ VA}$$

Por lo que

$P = 907.2$ w $Q = 0.0$ vars

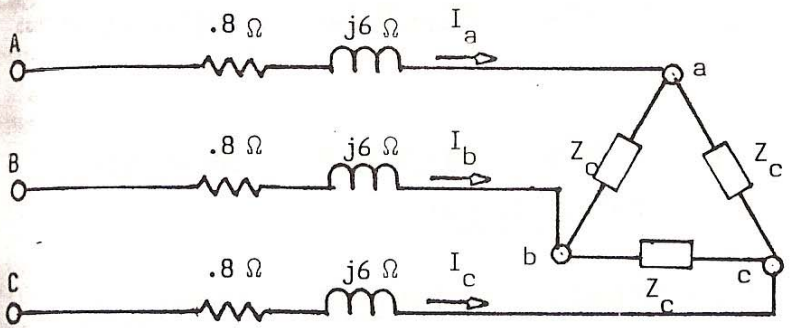
EJEMPLO 7

Una carga trifásica balanceada conectada en triángulo con impedancia por fase de $Z_c = 30 \angle 20°$ ohmios, absorbe corrientes de línea de $|I_a| = 100$ A $|I_b| = 90$ A, $|I_c| = 80$ A. La impedancia por fase de cada línea es $Z_L = .8 + j6$ ohmios. Por medio de las componentes simétricas y sin hacer reducción triángulo-estrella en la carga, calcular cada una de las siguientes partes:

a) El voltaje en voltios en los terminales de la carga (V_{ab}, V_{bc}, V_{ca}).

b) El voltaje en voltios en los terminales de la línea (V_{AB}, V_{BC}, V_{CA}).

c) La potencia activa y reactiva en los terminales de la línea.

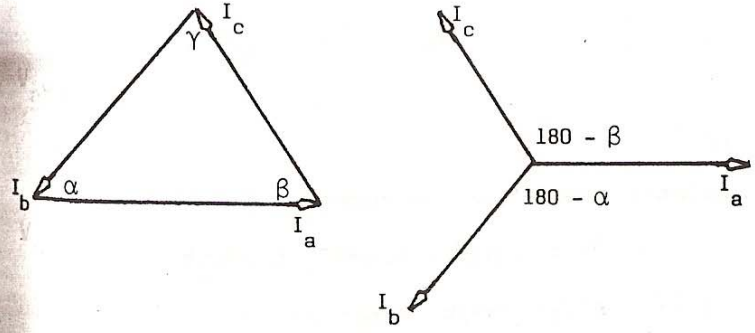


$Z_c = 30\angle 20^\circ \; \Omega$

Como la suma de las corrientes $I_a + I_b + I_c = 0$, en forma trigonométrica se calculan los vectores.

$$(80)^2 = (100)^2 + (90)^2 - 2 \times 100 \times 90 \text{ coseno } \alpha$$

$$\alpha = 49.458^\circ$$



$$(90)^2 = (100)^2 + (80)^2 - 2 \times 100 \times 80 \text{ coseno } \beta$$

$$\beta = 58.751^\circ$$

Por lo que

$$I_a = 100|\underline{0^\circ} \text{ A}, \quad I_b = 90|\underline{-130.541^\circ} \text{ A}, \quad I_c = 80|\underline{121.249^\circ}$$

$$I_{a0} = \frac{1}{3}(100|\underline{0^\circ} + 90|\underline{-130.541^\circ} + 80|\underline{121.249^\circ})$$
$$= 0.0 + j0.0$$

$$I_{a1} = \frac{1}{3}(100|\underline{0^\circ} + 90|\underline{-10.541^\circ} + 80|\underline{361.249^\circ})$$
$$= 89.6218|\underline{-3.1390^\circ} \text{ A}$$

$$I_{a2} = \frac{1}{3}(100|\underline{0^\circ} + 90|\underline{109.459^\circ} + 80|\underline{241.249^\circ})$$
$$= 11.6017|\underline{25.0239^\circ} \text{ A}$$

De acuerdo a las relaciones derivadas en el Ejemplo 3, las componentes de secuencia en cada fase son

$$I_{ab1} = \frac{I_{a1}}{\sqrt{3}}|\underline{30^\circ} = 51.7432|\underline{26.8610^\circ} \text{ A}$$

$$I_{ab2} = \frac{I_{a2}}{\sqrt{3}}|\underline{-30^\circ} = 6.6982|\underline{-4.9761^\circ} \text{ A}$$

$$I_{ab0} = 0.0 + j0.0$$

Las corrientes de fase en la carga son entonces

$$I_{ab} = 51.7432|\underline{26.8610} + 6.6982|\underline{-4.9761^\circ}$$
$$= 57.5423|\underline{23.3405^\circ} \text{ Amperios}$$

$$I_{bc} = 51.7432|\underline{266.8610^\circ} + 6.6982|\underline{115.0239^\circ}$$
$$= 45.9469|\underline{-97.0844^\circ} \text{ Amperios}$$

$$I_{ca} = 51.7432|\underline{146.8610^\circ} + 6.6982|\underline{235.0239^\circ}$$
$$= 52.3875|\underline{154.2034^\circ} \text{ Amperios}$$

Los voltajes en cada fase son iguales a la corriente de esa fase multiplicada por la impedancia de la carga.

$$V_{ab} = Z_c \times I_{ab} = 30|\underline{20^\circ} \times 57.5423|\underline{23.3405^\circ}$$
$$= 1726.2690|\underline{43.3405^\circ} \text{ Voltios}$$

$$V_{bc} = Z_c \times I_{bc} = 30|\underline{20^\circ} \times 45.9469|\underline{-97.0844^\circ}$$
$$= 1378.4070|\underline{-77.0844^\circ} \text{ Voltios}$$

$$V_{ca} = Z_c \times I_{ca} = 30|\underline{20^\circ} \times 52.3875|\underline{154.2034^\circ}$$
$$= 1571.6250|\underline{174.2034^\circ} \text{ Voltios}$$

Los voltajes de secuencia en las fases, por descomposición de los voltajes de fase son

$$V_{ab0} = \frac{1}{3}(1726.269|\underline{43.3405^\circ} + 1378.407|\underline{-77.0844^\circ}$$
$$+ 1571.625|\underline{174.2034^\circ}) = 0.0 + j0.0 \text{ Voltios}$$

$$V_{ab1} = \frac{1}{3}(1726.269|\underline{43.3405^\circ} + 1378.407|\underline{42.9156^\circ}$$
$$+ 1571.625|\underline{54.2034^\circ}) = 1552.2960|\underline{46.8610^\circ} \text{ V}$$

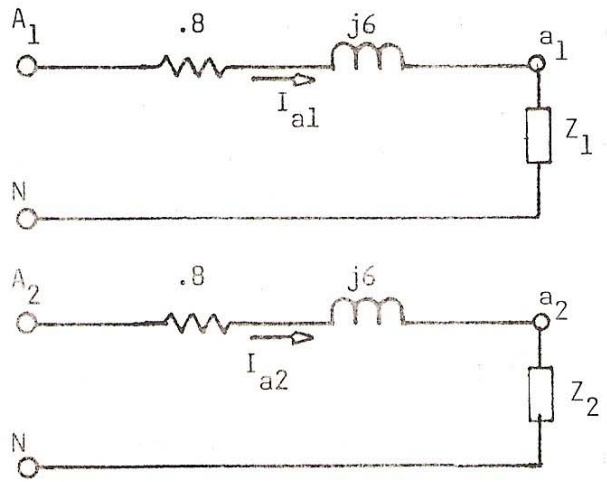
$$V_{ab2} = \frac{1}{3}(1726.269|\underline{43.3405^\circ} + 1378.407|\underline{162.9156^\circ}$$
$$+ 1571.625|\underline{294.2034^\circ}) = 200.9460|\underline{15.0239^\circ} \text{ V}$$

De acuerdo a las relaciones derivadas en el Ejemplo 4 los voltajes de secuencia de fase a neutro son

$$V_{a1} = \frac{V_{ab1}}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ = 896.2185 \angle 16.8610^\circ \quad \text{Voltios}$$

$$V_{a2} = \frac{V_{ab2}}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = 116.0162 \angle 45.0239^\circ \quad \text{Voltios}$$

Los diagramas de impedancias, voltajes y corrientes de las secuencias positiva y negativa de la fase a se enseñan en la figura siguiente.



Las impedancias de secuencia en la línea son

$$Z_{L1} = Z_{L2} = Z_L = .8 + j6 = 6.0531 \angle 82.4054^\circ \text{ ohmios}$$

Los voltajes de secuencia al comienzo de la línea son

$$V_{A1} = V_{a1} + Z_{L1} I_{a1} = 896.2185 \angle 16.8610^\circ$$

$$+ 6.0531 \angle 82.4054^\circ \times 89.6218 \angle -3.1390^\circ$$

$$= 1244.7589 \angle 39.6600^\circ \quad \text{Voltios}$$

$$V_{A2} = V_{a2} + Z_{L2} I_{a2} = 116.0162 \angle 45.0239^\circ$$

$$+ 6.0531 \angle 82.4054^\circ \times 11.6016 \angle 25.0239^\circ$$

$$= 161.0572 \angle 67.7566^\circ \quad \text{Voltios}$$

Los voltajes de cada fase al comienzo de la línea son

$$V_A = 1244.7589 \angle 39.6600^\circ + 161.0572 \angle 67.7566^\circ$$

$$= 1388.9091 \angle 42.7906^\circ \quad \text{Voltios}$$

$$V_B = 1244.7589 \angle 279.6600^\circ + 161.0572 \angle 187.7566^\circ$$

$$= 1249.8187 \angle -87.7399^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_C = 1244.7589 \angle 159.6600^\circ + 161.0572 \angle 307.7566^\circ$$

$$= 1111.2954 \angle 164.0527^\circ \text{ Voltios}$$

Los voltajes entre líneas son

$$V_{AB} = V_A - V_B = 2397.3432 \angle 66.1343^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_{BC} = V_B - V_C = 1914.4137 \angle -54.2751^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_{CA} = V_C - V_A = 2183.1269 \angle -163.0027^\circ \text{ Voltios}$$

Las potencias son

$$S = 3 V_{A1} I_{a1}^* + 3 V_{A2} I_{a2}^*$$

$$= 3 \times 1244.7589 \angle 39.6600^\circ \times 89.6218 \angle 3.1390^\circ$$

$$+ 3 \times 161.0572 \angle 67.7566^\circ \times 11.6017 \angle -25.0239^\circ$$

$$= 249680.7256 + j231189.9521$$

Es decir

$P = 249.680$ KW $\qquad Q = 231.189$ KVAR

5. IMPEDANCIAS ASIMETRICAS

Los sistemas de potencia funcionan normalmente en forma simétrica y se convierten en asimétricos cuando ocurre una falla asimétrica, cuando los voltajes aplicados no están completamente balanceados o cuando las cargas están desequilibradas. En esta oportunidad se estudiará la situación cuando las impedancias de un sistema trifásico son diferentes entre sí, es decir el sistema de potencia es asimétrico. Se analiza nuevamente el sistema inicial de la figura 7.1 pero con las impedancias de valores diferentes y sin inductancias mutuas, tal como se indica en la figura 7.6. Las relaciones entre corrientes y voltajes de fase son

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & 0 & 0 \\ 0 & Z_b & 0 \\ 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

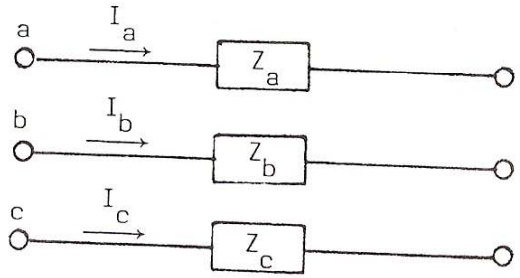


Fig. 7.6

Las impedancias de secuencias son de acuerdo a la ecuación 7.7.

$$\underset{\sim}{Z}_{012} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_a & 0 & 0 \\ 0 & Z_b & 0 \\ 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} Z_a + Z_b + Z_c & Z_a + a^2 Z_b + aZ_c & Z_a + aZ_b + a^2 Z_c \\ Z_a + aZ_b + a^2 Z_c & Z_a + Z_b + Z_c & Z_a + a^2 Z_b + aZ_c \\ Z_a + a^2 Z_b + aZ_c & Z_a + aZ_b + a^2 Z_c & Z_a + Z_b + Z_c \end{bmatrix} \qquad 7.33$$

Por lo que los voltajes de secuencia son

$$\underset{\sim}{V}_{012} = \underset{\sim}{Z}_{012}\ \underset{\sim}{I}_{012}$$

de donde

$$V_0 = \frac{1}{3}\left[(Z_a + Z_b + Z_c)I_0 + (Z_a + a^2 Z_b + aZ_c)I_1 + (Z_a + aZ_b + a^2 Z_c)I_2 \right]$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\left[(Z_a + aZ_b + a^2 Z_c)I_0 + (Z_a + Z_b + Z_c)I_1 + (Z_a + a^2 Z_b + aZ_c)I_2 \right]$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\left[(Z_a + a^2 Z_b + aZ_c)I_0 + (Z_a + aZ_b + a^2 Z_c)I_1 + (Z_a + Z_b + Z_c)I_2 \right] \qquad 7.34$$

Se observa que el voltaje de cada secuencia depende no solamente de la corriente de su secuencia, sino también de las corrientes de las otras secuencias. Se observa además que si las impedancias son iguales los valores fuera de la diagonal son cero y

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad 7.35$$

lo que es lo mismo que

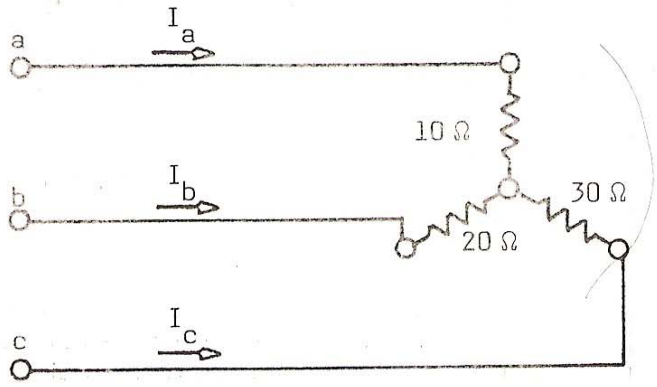
$$V_0 = ZI_0 \qquad V_1 = ZI_1 \qquad V_2 = ZI_2$$

es decir, el voltaje de cada secuencia depende de la corriente de su secuencia solamente.

Debido a que el voltaje de una secuencia depende de todas las corrientes de secuencia cuando las impedancias son diferentes, no se pueden modelar estos voltajes con redes pasivas como es el caso cuando las impedancias son iguales. El modelo forzosamente debe incluir a fuentes dependientes.

EJEMPLO 8

A la red siguiente se le aplican voltajes balanceados de secuencia positiva de 100 voltios de línea a línea. Tomando como referencia a $V_{ab} = 100\angle 0°$ calcular la corriente de cada fase.



Las impedancias de secuencia son

$$\frac{1}{3}(Z_a + Z_b + Z_c) = \frac{1}{3}(10\angle 0º + 20\angle 0º + 30\angle 0º) = 20\angle 0º\ \Omega$$

$$\frac{1}{3}(Z_a + aZ_b + a^2Z_c) = \frac{1}{3}(10\angle 0º + 20\angle 120º + 30\angle 240º)$$

$$= 5.773\angle -150º\ \Omega$$

$$\frac{1}{3}(Z_a + a^2Z_b + aZ_c) = \frac{1}{3}(10\angle 0º + 20\angle 240º + 30\angle 120º)$$

$$= 5.773\angle 150º$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\angle 0º & 5.773\angle 150º & 5.773\angle -150º \\ 5.773\angle -150º & 20\angle 0º & 5.773\angle 150º \\ 5.773\angle 150º & 5.773\angle -150º & 20\angle 0º \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}$$

Pero $I_{a0} = 0.0$ porque el sistema no tiene neutro y $V_{a0} = V_{a2} = 0.0$ porque los voltajes aplicados son simétricos de secuencia positiva. Además

$$V_{a1} = \frac{V_{ab}}{\sqrt{3}}\angle -30º = \frac{100}{\sqrt{3}}\angle -30º = 57.735\angle -30º$$

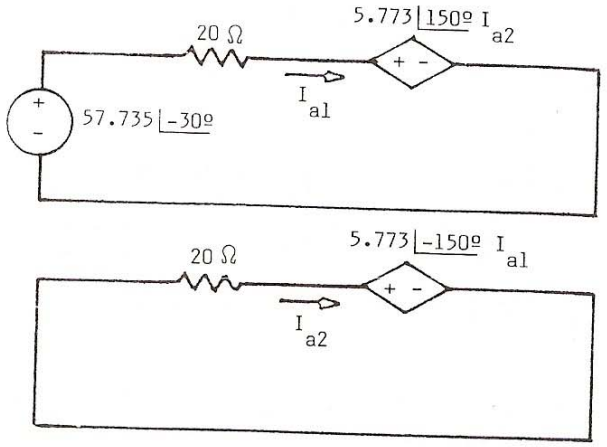
Entonces la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{bmatrix} 57.735\angle -30º \\ 0.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\angle 0º & 5.773\angle 150º \\ 5.773\angle -150º & 20\angle 0º \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}$$

Por lo que

$$\begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\angle 0º & 5.773\angle 150º \\ 5.773\angle -150º & 20\angle 0º \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 57.735\angle -30º \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Los diagramas de secuencia son los siguientes



Resolviendo la ecuación matricial anterior o también circuitalmente se obtiene que

$$I_{a1} = 3.149|\underline{-30º} \text{ Amperios}$$

$$I_{a2} = .909|\underline{0º} \text{ Amperios}$$

e

$$I_a = 3.149|\underline{-30º} + .909|\underline{0º} = 3.962|\underline{-23.413º} \text{ A}$$

$$I_b = 3.149|\underline{210º} + .909|\underline{120º} = 3.277|\underline{-166.101º} \text{ A}$$

$$I_c = 3.149|\underline{90º} + .909|\underline{240º} = 2.405|\underline{-100.893º} \text{ A}$$

EJEMPLO 9

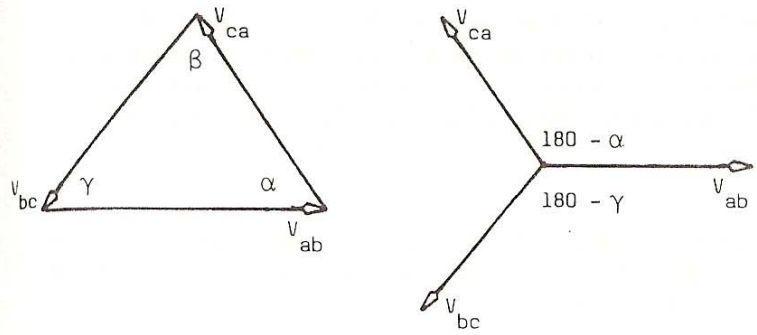
Resolver el Ejemplo 8 si a las cargas anteriores se les aplican los voltajes

$$|V_{ab}| = 210 \text{ Voltios}$$

$$|V_{bc}| = 200 \text{ Voltios}$$

$$|V_{ca}| = 240 \text{ Voltios}$$

Se tiene la magnitud de los voltajes y se debe conseguir sus ángulos de fase. Considerando una secuencia predominantemente positiva y tomando como referencia al voltaje $V_{ab} = 210|\underline{0º}$, se tiene



Usando el teorema del coseno se tiene

$$(240)^2 = (200)^2 + (210)^2 - 2 \times 210 \times 200 \text{ coseno } \gamma$$

$$\gamma = 71.636º$$

$$(200)^2 = (240)^2 + (210)^2 - 2 \times 210 \times 240 \text{ coseno } \alpha$$

$$\alpha = 52.230º$$

Por lo que los voltajes de línea son

$$V_{ab} = 210|\underline{0º} \text{ V}, \quad V_{bc} = 200|\underline{251.636º}, \quad V_{ca} = 240|\underline{127.77º}$$

Los voltajes de secuencia en las líneas son

$$V_{ab0} = \frac{1}{3}(210|\underline{0º} + 200|\underline{251.636º} + 240|\underline{127.770º}) = 0.0$$

$$V_{ab1} = \frac{1}{3}(210|\underline{0º} + 200|\underline{11.636º} + 240|\underline{7.770º})$$

$$= 215.88|\underline{6.459º} \text{ Voltios}$$

$$V_{ab2} = \frac{1}{3}(210|\underline{0º} + 200|\underline{131.636º} + 240|\underline{247.770º})$$

$$= 24.78|\underline{-100.62º} \text{ Voltios}$$

Los voltajes de secuencia en las fases son

$$V_{an0} = 0.0 + j0.0$$

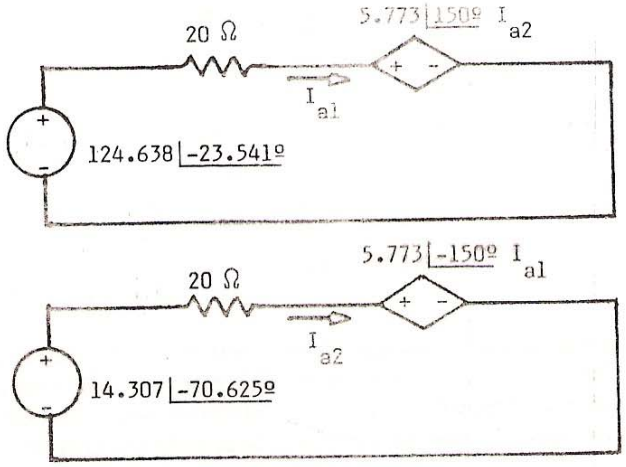
$$V_{an1} = \frac{V_{ab1}}{\sqrt{3}}|\underline{-30º} = 124.638|\underline{-23.541º} \text{ Voltios}$$

$$V_{an2} = \frac{V_{ab2}}{\sqrt{3}}|\underline{30º} = 14.307|\underline{-70.625º} \text{ Voltios}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} 124.638|\underline{-23.541º} \\ 14.307|\underline{-70.625º} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20|\underline{0º} & 5.773|\underline{150º} \\ 5.773|\underline{-150º} & 20|\underline{0º} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}$$

Los diagramas de secuencia son los siguientes



Resolviendo la ecuación matricial anterior o también circuitalmente se obtiene que

$$I_{a1} = 6.852|\underline{-25.38º} \text{ Amperios}$$

$$I_{a2} = 2.270|\underline{-13.132º} \text{ Amperios}$$

e

$$I_a = 6.852|\underline{-25.380º} + 2.270|\underline{-13.132º} = 9.084|\underline{-22.341º}$$

$$I_b = 6.852|\underline{214.62º} + 2.270|\underline{106.868º} = 6.528|\underline{-164.719º}$$

$$I_c = 6.852|\underline{94.620º} + 2.270|\underline{226.868º} = 5.585|\underline{112.121º}$$

6. DIAGRAMAS DE SECUENCIA

Para el análisis de fallas asimétricas y de cargas desbalanceadas, es necesario y conveniente conocer el comportamiento de cada uno de los componentes de la red durante la asimetría, así como también la forma como estarían modelados cada uno de estos componentes para cada una de las secuencias.

6.1 DIAGRAMAS DE SECUENCIA DE GENERADORES SIN CARGA.

Se trata de construir el diagrama de cada una de las secuencias de un generador sin carga. Se supone que los voltajes están equilibrados y son de secuencia positiva. Cada uno de los diagramas de las tres secuencias contiene solamente el voltaje e impedancia de su secuencia. Sea el generador indicado en la figura 7.7.

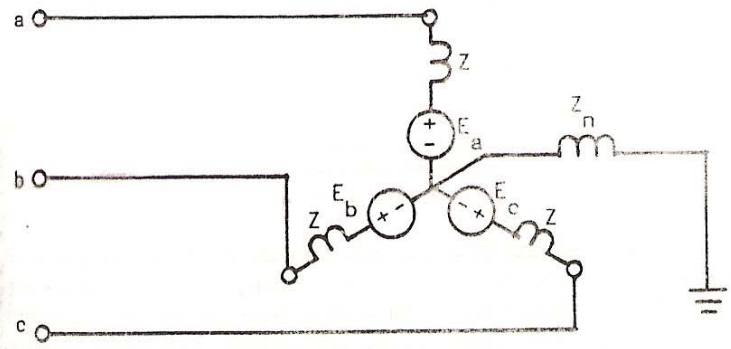


Fig. 7.7

El diagrama de secuencia positiva está formado por el voltaje de secuencia positiva de la fase a o fase de referencia y por la impedancia de secuencia positiva, siendo el punto de referencia el neutro del generador. El voltaje de secuencia positiva desde el terminal a hasta el neutro es

$$V_{a1} = E_a - Z_1 I_{a1} \qquad 7.36$$

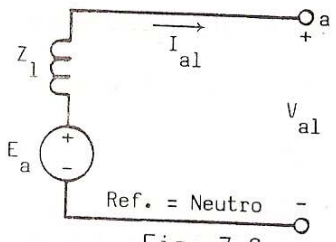


Fig. 7.8

El diagrama de secuencia negativa está formado por la impedancia de secuencia negativa solamente, ya que se ha supuesto que los voltajes están balanceados y por lo tanto no existe componente de voltaje de secuencia negativa ni cero. La referencia de este diagrama es el neutro del generador. La caída de tensión desde el terminal a hasta el neutro es

$$V_{a2} = - Z_2 I_{a2} \qquad 7.37$$

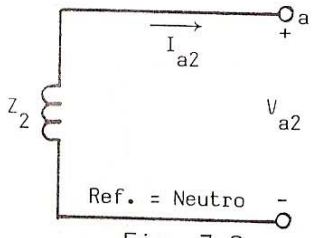


Fig. 7.9

El diagrama de secuencia cero está formado por la impedancia de secuencia cero solamente, siendo la referencia la tierra del sistema, ya que solamente corriente de secuencia cero fluye entre tierra y neutro. Si se considera el diagrama completo de secuencia cero, se tiene lo que se muestra en la figura 7.10.

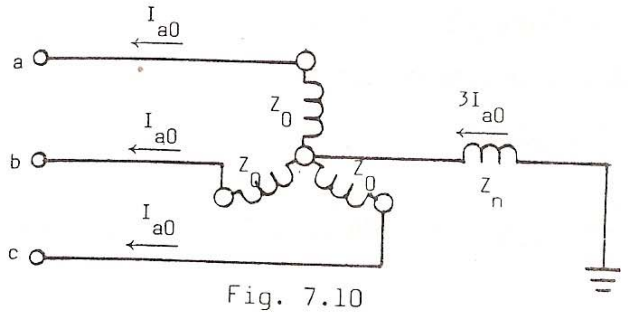


Fig. 7.10

Se observa que la caída de tensión entre la fase a y la referencia es

$$V_{a0} = - 3Z_n I_{a0} - Z_0 I_{a0} = - (3Z_n + Z_0) I_{a0} = - Z_0 I_{a0}$$

siendo la impedancia total de secuencia cero igual a

El diagrama de secuencia cero desde a hasta la referencia incluyendo la impedancia limitadora se muestra en la figura 7.11.

$$Z_0 = (3Z_n + Z_0) \qquad 7.38$$

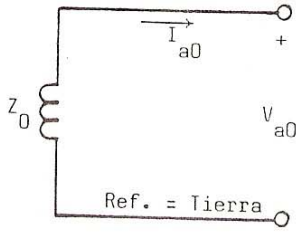


Fig. 7.11

Generalmente las tres impedancias de secuencia de los generadores Z_0, Z_1 y Z_2 son diferentes entre sí. Normalmente estas máquinas están diseñadas para generar voltajes balanceados, por lo que existirán voltajes en uno solo de los diagramas de secuencia, positiva o negativa, de acuerdo a la rotación de la máquina.

6.2 DIAGRAMAS DE SECUENCIA DE LINEAS DE TRANSMISION

Las impedancias de secuencias positiva y negativa de elementos lineales, simétricos y pasivos son idénticas. Si no hay inductancias mutuas entre las líneas trifásicas, la impedancia de secuencia cero también será igual a las impedancias de secuencias positiva y negativa. En la figura 7.12 se muestran las impedancias de secuencia de una línea de transmisión.

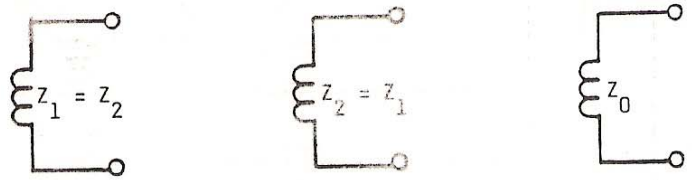


Fig. 7.12

6.3 DIAGRAMAS DE SECUENCIA DE LOS TRANSFORMADORES.

Por las razones expuestas en las líneas de transmisión, las tres impedancias de secuencia de los transformadores son exactamente iguales. Sin embargo los diagramas de secuencia podrían ser diferentes. Los diagramas de secuencia positiva y negativa son siempre exactamente iguales, independientemente de las conexiones de los transformadores, pero el diagrama de secuencia cero depende de esas conexiones. En la figura 7.13 se muestran los diagramas de impedancias de secuencia positiva y negativa para cualquier conexión de los transformadores.

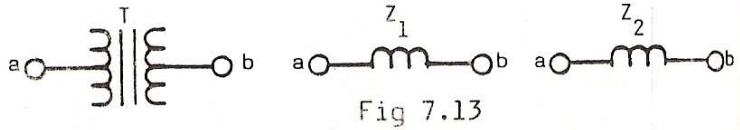


Fig 7.13

Las corrientes de secuencia cero fluyen solamente si tienen un paso de retorno a través del neutro. En una conexión delta o estrella sin neutro este paso no existe y por lo tanto no existirá la componente de corriente de secuencia cero. Por otra parte, en un transformador ideal no existirá corriente en el primario si no existe corriente en el secundario. Y no podrán formarse corrientes en el secundario si esta condición no puede darse en el primario. Con estas informaciones se construyen los diagramas de secuencia cero para las diferentes conexiones de los transformadores.

6.3.1 CONEXION ESTRELLA-ESTRELLA SIN ATERRAMIENTO.

En esta situación no hay paso a tierra en ninguno de los dos lados, por lo que no hay circulación de corriente en ningún bobinado. El diagrama de secuencia cero para esta conexión se muestra en la figura 7.14.

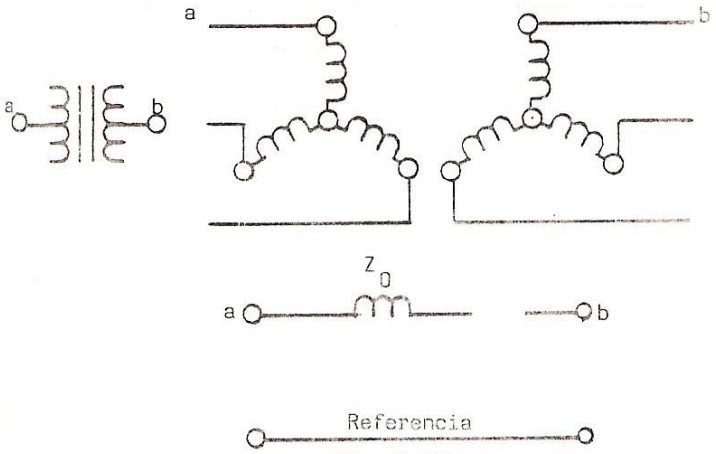


Fig. 7.14

6.3.2 CONEXION ESTRELLA - ESTRELLA CON EL PRIMARIO ATERRADO.

En esta conexión hay un paso a tierra en el primario pero no lo hay en el secundario. Como no existe corriente de secuencia cero en el secundario, esta corriente no puede aparecer en el primario. El diagrama de secuencia cero para esta conexión se muestra en la figura 7.15.

6.3.3 CONEXION ESTRELLA-TRIANGULO SIN ATERRAMIENTO.

En este tipo de conexión no hay paso a tierra en ningún lado, por lo tanto no fluye corriente de secuencia cero en ninguna parte. Existe la posibilidad de corrientes de secuencia cero en el lado del triángulo que circulen internamente, pero no así en el lado de la estrella, por lo que no se podrá formar corrientes de secuencia cero ni en el primario ni en el secundario. El diagrama se muestra en la figura 7.16.

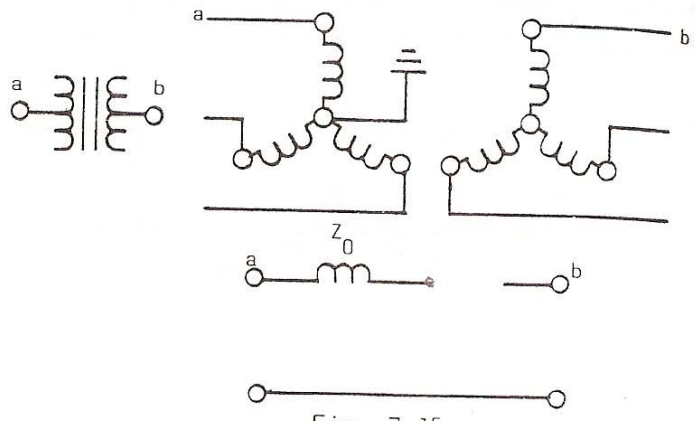


Fig. 7.15

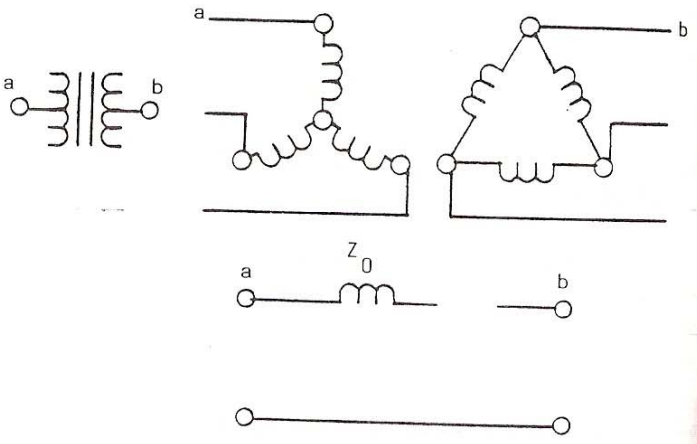


Fig. 7.16

6.3.4 CONEXION TRIANGULO-TRIANGULO

En este tipo de conexión no hay paso a tierra en ninguno de los bobinados, por lo que no habrá circulación de corriente de secuencia cero entre los dos bobinados. Sin embargo hay la posibilidad de circulación de corrientes de secuencia cero internamente en el secundario y éstas dan lugar a las correspondientes corrientes de secuencia cero en el primario, circulando internamente. El diagrama de secuencia cero para este tipo de conexión se muestra en la figura 7.17.

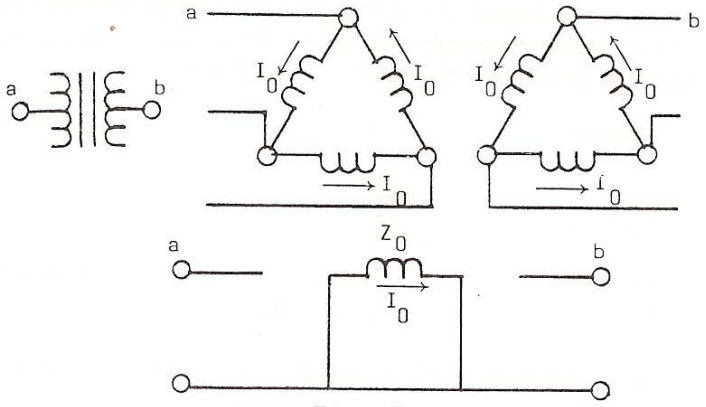


Fig. 7.17

6.3.5. CONEXION ESTRELLA-TRIANGULO CON ATERRAMIENTO

En este tipo de conexión no hay posibilidad de circulación de corrientes de secuencia cero en las líneas del secundario, aunque sí internamente en la conexión triángulo. La correspondiente corriente del primario tiene un paso a tierra, por lo que circulará corriente de secuencia cero en las líneas del primario. El diagrama de secuencia cero para este tipo de conexión se muestra en la figura 7.18.

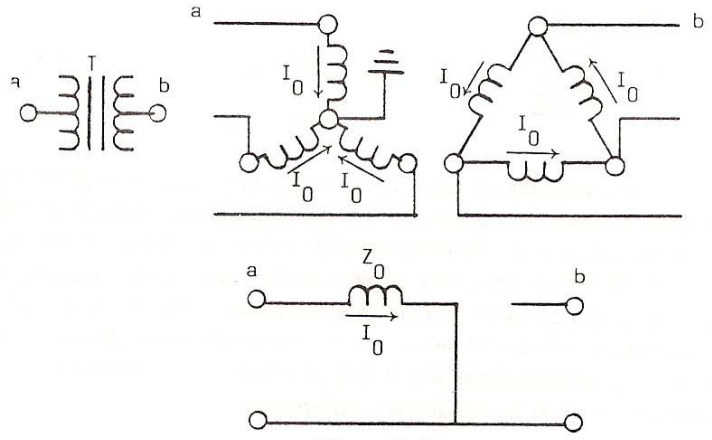


Fig. 7.18

6.3.6 CONEXION ESTRELLA-ESTRELLA ATERRADA EN AMBOS LADOS.

En esta situación hay circulación de corrientes de secuencia cero entre los bobinados primario y secundario y por lo tanto hay circulación de corrientes de secuencia cero en las líneas del primario y del secundario, lo cual se muestra en la figura 7.19.

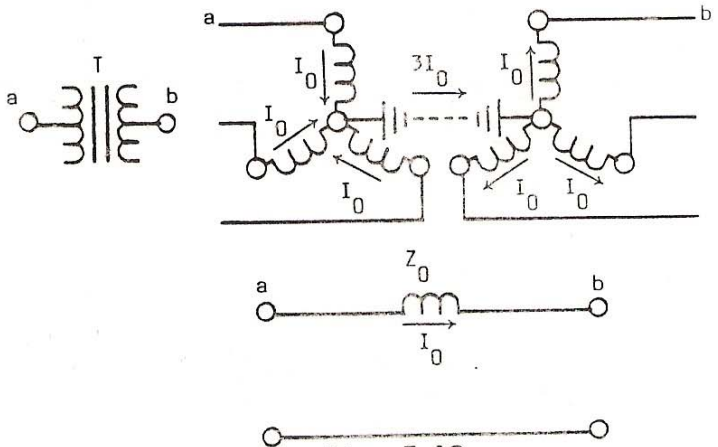


Fig. 7.19

6.4 DIAGRAMA DE SECUENCIA DE LAS CARGAS

Si las tres impedancias de las cargas del sistema trifásico son iguales, las impedancias de las tres secuencias tendrán el mismo valor e iguales a la impedancia de la carga. Los diagramas de secuencia positiva y negativa son similares, pero el diagrama de secuencia cero pudiera ser diferente a los anteriores según la forma de conexión de la carga. En la figura 7.20 se muestran los diagramas de secuencia positiva y negativa para una carga trifásica con cualquier tipo de conexión.

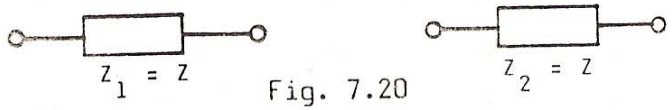


Fig. 7.20

Los diagramas de secuencia cero tienen un comportamiento muy similar a los de los transformadores. En las figuras siguientes se muestran los diagramas de secuencia cero de las cargas trifásicas para los diferentes tipos de conexiones.

Conexión Delta

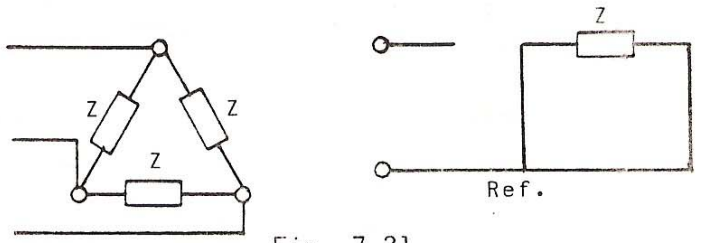


Fig. 7.21

Conexión Estrella sin Tierra

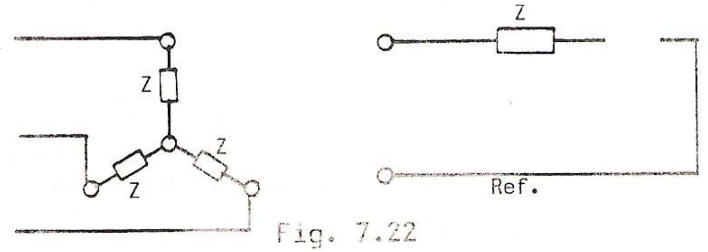


Fig. 7.22

Conexión Estrella con Tierra

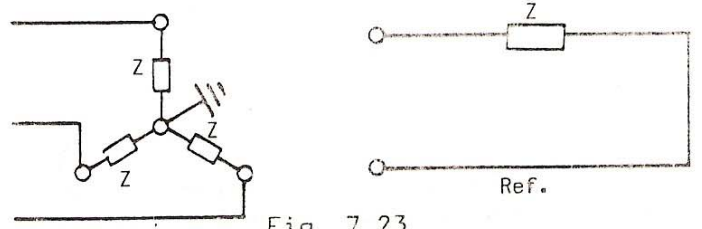


Fig. 7.23

Conexión Estrella a través de una Impedancia Z_n.

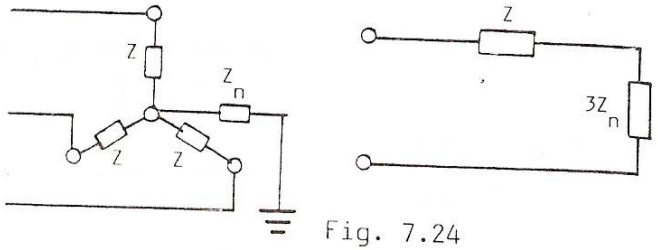


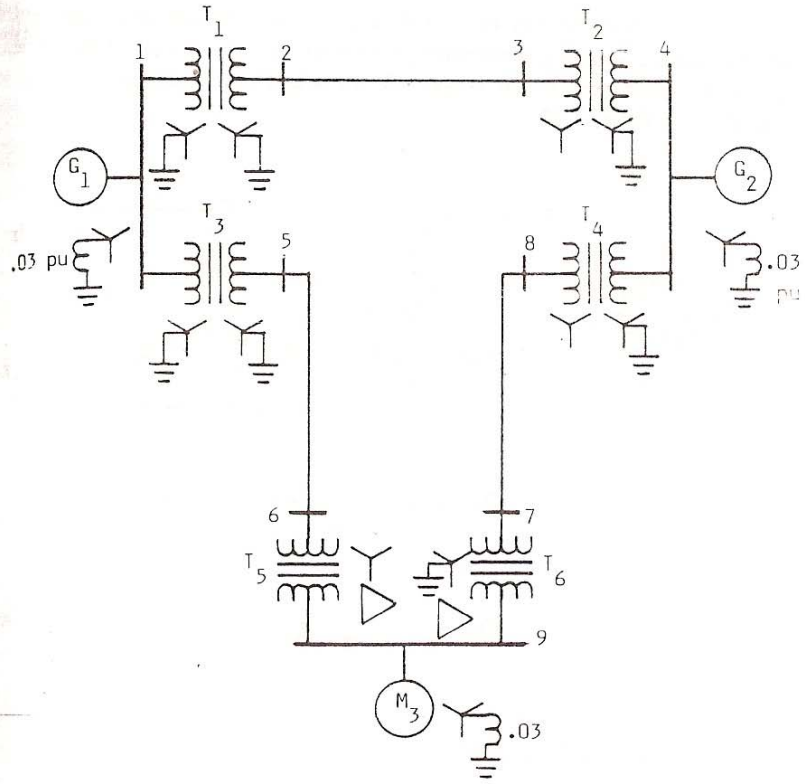
Fig. 7.24

6.5 DIAGRAMAS DE SECUENCIA DE UN SISTEMA DE POTENCIA

Conociendo los valores de los voltajes de secuencia de los generadores, los valores de impedancia de secuencia de cada uno de los elementos del sistema, así como también los diagramas de secuencia de esos elementos, se pueden construir los diagramas de secuencia para un sistema de potencia completo. El diagrama de una secuencia enseña los pasos de la corriente de esa secuencia solamente. La topología de los diagramas de secuencia positiva y negativa es exactamente la misma, siendo la diferencia de que si los voltajes del sistema están equilibrados y de secuencia positiva por ejemplo, sólo en ese diagrama existirán voltajes. Otra diferencia es que los valores de las impedancias de estas dos secuencias de los generadores pudieran ser diferentes. Los diagramas de secuencia cero pudieran ser diferentes y merecen atención especial, siguiendo los lineamientos de las secciones anteriores.

EJEMPLO 10

Dibujar los diagramas de secuencia positiva, negativo y cero de la siguiente red, colocándole sus respectivos valores de impedancia, tomando como valores base a 50 MVA, 138 KV en la línea L_{23}.



Los datos del sistema son

G_1: 20 MVA, 13.6 KV, $X_1 = X_2 = j.12$ pu, $X_0 = j.06$

G_2: 30 MVA, 13.6 KV, $X_1 = X_2 = j.12$ pu, $X_0 = j.06$

M_3: 25 MVA, 6.9 KV, $X_1 = X_2 = j.20$ pu, $X_0 = j.10$

T_1, T_2, T_3, T_4: 30 MVA, 13.8 Y - 138 Y KV,
$X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu.

T_5, T_6: 15 MVA, 6.9 Δ - 138 Y KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$

L_{23}: $X_1 = j30\ \Omega$, $X_2 = j30\ \Omega$, $X_0 = j100\ \Omega$

L_{56}, L_{78}: $X_1 = j25\ \Omega$, $X_2 = j25\ \Omega$, $X_0 = j70\ \Omega$

Las impedancias de secuencia en valores por unidad en la base referida son

L_{23}: $Z_b = \dfrac{(138 \times 10^3)^2}{50 \times 10^6} = 380.8800$ ohmios

$X_1 = X_2 = \dfrac{j30}{380.880} = j.0788$ pu

$X_0 = \dfrac{j100}{380.8800} = j.2625$ pu

G_1: $V_b = \dfrac{13.8}{138} \times 138 = 13.8$ KV

$X_1 = X_2 = j.12 \times (\dfrac{13.6}{13.8})^2 \times \dfrac{50}{20} = j.3000$ pu

$X_0 = j.06 \times (\dfrac{13.6}{13.8})^2 \times \dfrac{50}{20} = j.1500$ pu

$Z_n = j.03 \times (\dfrac{13.6}{13.8})^2 \times \dfrac{50}{20} = j.0750$ pu

T_1: $X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times (\dfrac{13.8}{13.8})^2 \times \dfrac{50}{30} = j.1667$ pu

T_3: $X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times (\dfrac{13.8}{13.8})^2 \times \dfrac{50}{30} = j.1667$ pu

L_{56}: $V_b = \dfrac{138}{13.8} \times 13.8 = 138$ KV

$Z_b = 380.8800$ ohmios

$X_1 = X_2 = \dfrac{j25}{380.880} = j.0656$ pu

$X_0 = \dfrac{j70}{380.880} = j.1838$ pu

T_5: $X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times (\dfrac{138}{138})^2 \times \dfrac{50}{15} = j.3333$ pu

M_3: $V_b = \dfrac{6.9}{138} \times 138 = 6.9$ KV

$X_1 = X_2 = j.20 \times (\dfrac{6.9}{6.9})^2 \times \dfrac{50}{25} = j.4000$ pu

$X_0 = j.10 \times (\dfrac{6.9}{6.9})^2 \times \dfrac{50}{25} = j.2000$ pu

$Z_n = j.03 \times (\dfrac{6.9}{6.9})^2 \times \dfrac{50}{25} = j.06$ pu

T_6: $X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times (\dfrac{6.9}{6.9})^2 \times \dfrac{50}{15} = j.3333$ pu

L_{78}: $V_b = \dfrac{138}{6.9} \times 6.9 = 138$ KV, $Z_b = 380.8800\ \Omega$

$X_1 = X_2 = \dfrac{j25}{380.880} = j.0656$ pu

$X_0 = \dfrac{j70}{380.880} = j.1838$ pu

T_4: $X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times (\frac{138}{138})^2 \times \frac{50}{30} = j.1667$ pu

G_2: $V_b = \frac{13.8}{138} \times 138 = 13.8$ KV

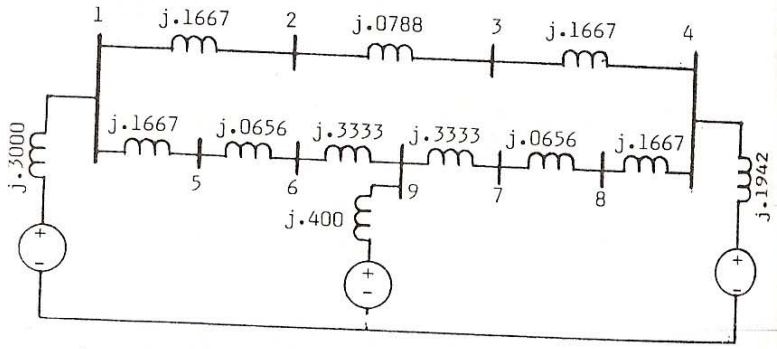
$X_1 = X_2 = j.12 \times (\frac{13.6}{13.8})^2 \times \frac{50}{30} = j.1942$ pu

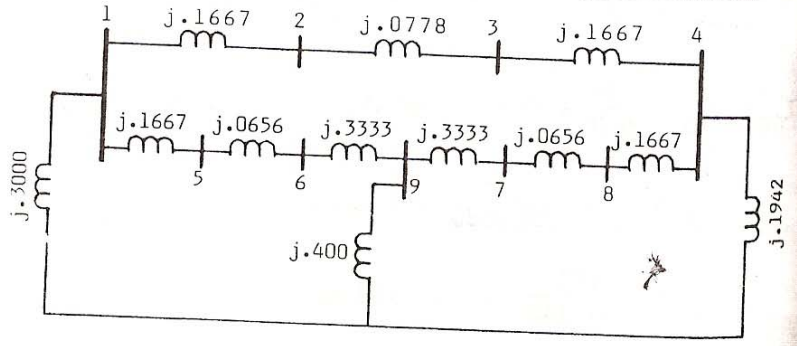
$X_0 = j.06 \times (\frac{13.6}{13.8})^2 \times \frac{50}{30} = j.0971$ pu

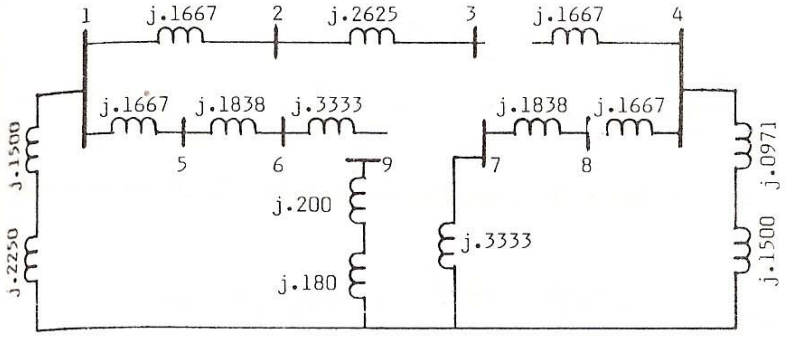
$Z_n = j.03 \times (\frac{13.6}{13.8})^2 \times \frac{50}{30} = j.05$ pu

T_2: $X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times (\frac{13.8}{13.8})^2 \times \frac{50}{30} = j.1667$ pu

Los diagramas de impedancias para las tres secuencias se muestran en las figuras siguientes.







7. DESFASE DE LAS CORRIENTES Y DE LOS VOLTAJES DEL PRIMARIO Y SECUNDARIO DE LOS TRANSFORMADORES.

7.1 TRANSFORMADOR MONOFASICO

Sea el transformador monofásico de la figura 7.25 V_1 y V_2 son los voltajes generados en el primario y secundario del transformador, o muy aproximadamente los voltajes en vacío del primario y del secundario. I_1 e I_2 son las corrientes del primario y secundario respectivamente. Los voltajes V_1 y V_2 están en fase, pero la corriente I_2 está opuesta a la corriente I_1, porque aquélla produce una fuerza magnetomotriz que se opone a la producida por ésta.

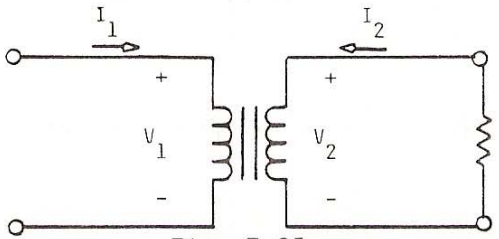


Fig. 7.25

Si se invierte el sentido de la flecha de I_2, las corrientes I_1 e I_2 estarán en fase.

7.2 CONEXION ESTRELLA-ESTRELLA

Se tiene ahora un sistema de tres transformadores conectados en estrella-estrella, como se muestra en la figura 7.26. El sistema reduce voltaje y

el flujo de potencia va desde el lado de alto voltaje, marcado con letras mayúsculas, hasta el lado de bajo voltaje, marcado con letras minúsculas. Las bobinas paralelas pertenecen al mismo transformador. Los diagramas fasoriales de voltajes y corrientes de secuencias positiva y negativa se muestran en la figura 7.27.

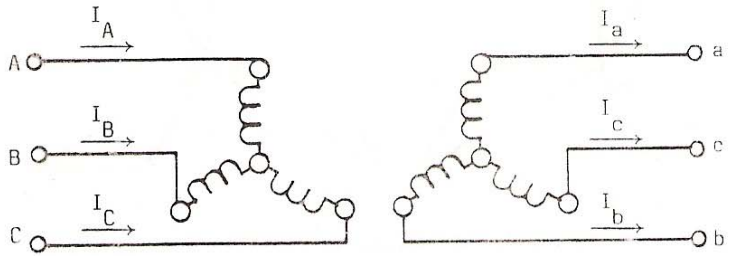
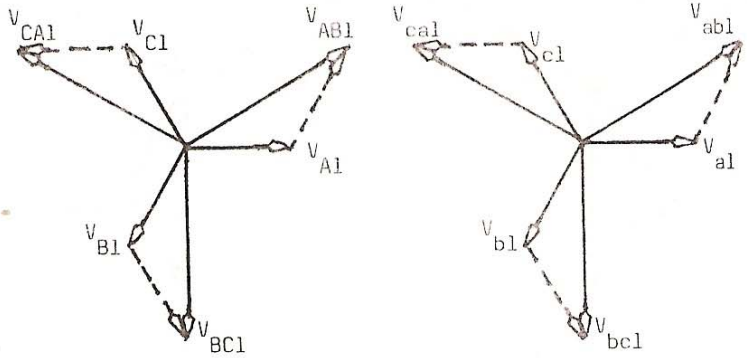


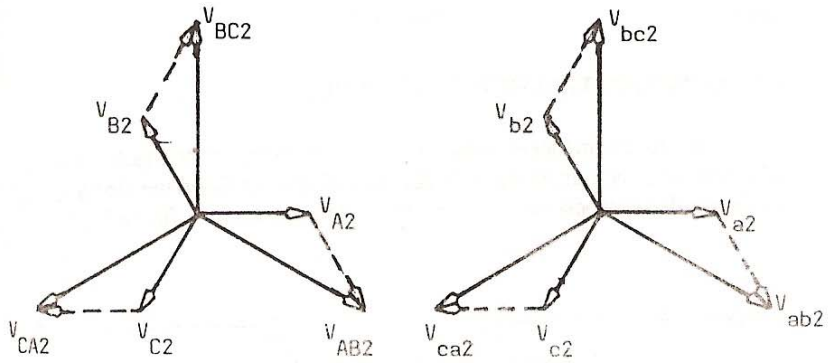
Fig. 7.26



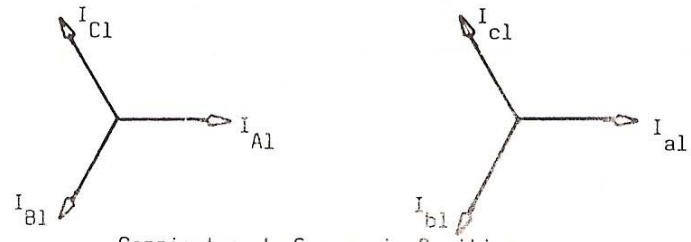
Voltajes de Secuencia Positiva

Fig. 7.27

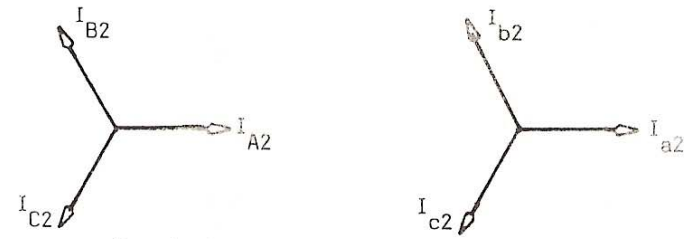
Como puede observarse en la figura 7.27, los voltajes en vacío de secuencia positiva del primario y secundario están en fase. Igualmente sucede con los voltajes en vacío de secuencia negativa del primario y secundario. Las corrientes de secuencia positiva del primario y secundario estarán en fase si se toman las del primario entrando al transformador y las del secundario saliendo del transformador. Lo mismo sucede con las corrientes de secuencia negativa del primario y secundario. Todo esto siempre y cuando se mantenga una



Voltajes de Secuencia Negativa



Corrientes de Secuencia Positiva



Corrientes de Secuencia Negativa

Fig. 7.27 (Continuación)

absoluta relación entre el marcaje de las bobinas del primario con las del secundario, es decir A con a, B con b y C con c. De no existir esta relación habrá un desfasaje de ± 120° entre los voltajes y corrientes del primario y secundario.

7.3 CONEXION TRIANGULO-TRIANGULO

Los transformadores están ahora conectados en triángulo-triángulo, tal como se indica en la figura 7.28. Los diagramas fasoriales de voltajes y corrientes de secuencia positiva y negativa se muestran en la figura 7.29.

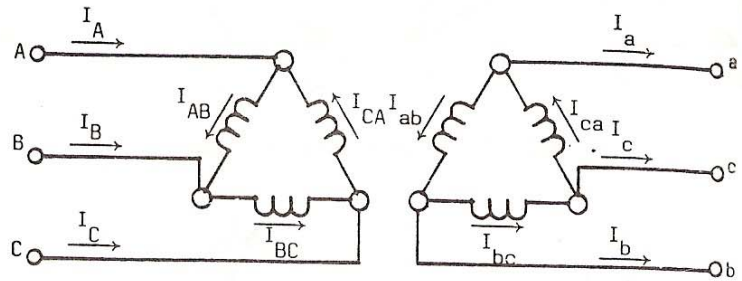
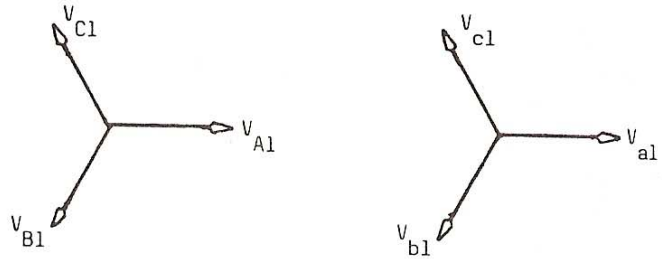
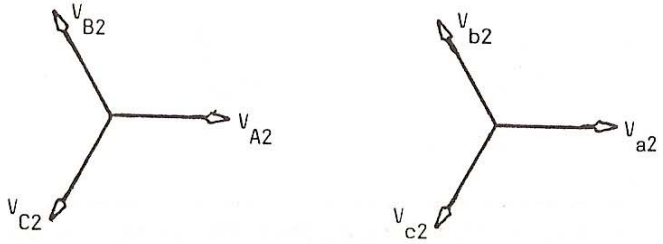


Fig. 7.28

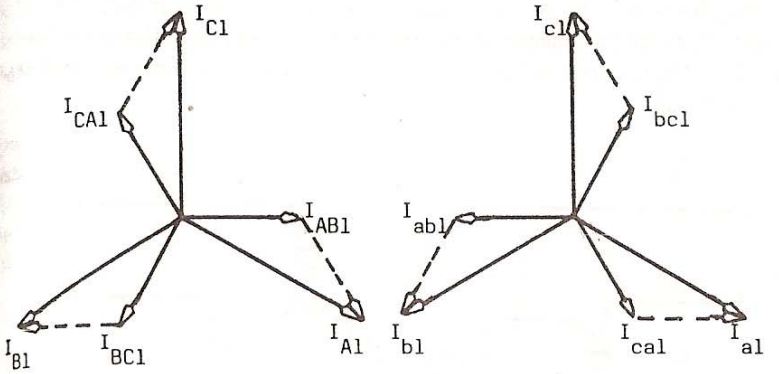


Voltajes de Secuencia Positiva

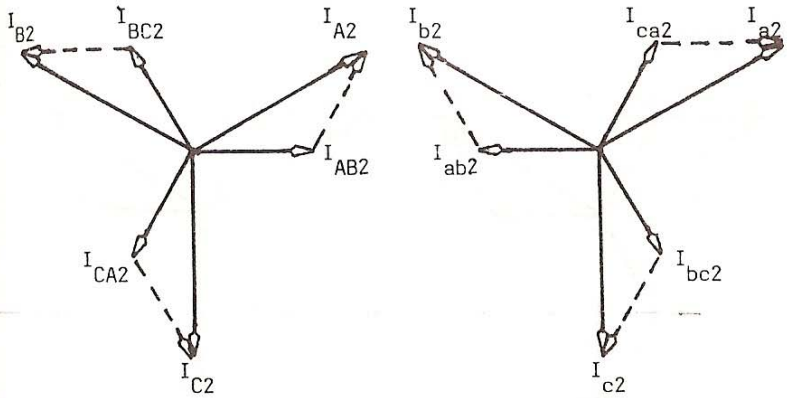


Voltajes de Secuencia Negativa

Fig. 7.29



Corrientes de Secuencia Positiva



Corrientes de Secuencia Negativa

Fig. 7.29 (Continuación)

Como se observa en la figura 7.29, los voltajes de secuencia positiva del primario están en fase con los voltajes de secuencia positiva del secundario. Igual sucede con los voltajes de secuencia negativa del primario y secundario. Las corrientes de fase de secuencia positiva del primario y secundario están opuestas, pero las corrientes de línea de secuencia positiva del primario y del secundario están en fase. Igual sucede con las corrientes de fase y de línea de secuencia negativa del primario y del secundario.

En valores reales en una conexión en estrella las corrientes de fase y de línea son iguales pero los voltajes de línea son iguales a los voltajes de fase

multiplicados por $\sqrt{3}$, estando los de secuencia positiva adelantados 30° de los voltajes de fase, mientras que los de secuencia negativa están atrasados 30° de los voltajes de fase.

En una conexión en triángulo los voltajes de fase y de línea son iguales; pero las corrientes de línea son iguales a las corrientes de fase multiplicadas por $\sqrt{3}$, estando las de secuencia positiva atrasadas 30° de las corrientes de fase, mientras que las de secuencia negativa están adelantadas 30° de las corrientes de fase. Todo esto siempre y cuando se observen las relaciones de marcaje indicadas en párrafos anteriores.

En valores por unidad las magnitudes de los voltajes de línea y voltajes de fase tanto en el primario como en el secundario son iguales entre sí en sus respectivas bases. La relación de los ángulos descrita anteriormente se mantiene igual. Esto mismo es válido para las corrientes.

7.4 CONEXION ESTRELLA-TRIANGULO

Los transformadores se conectan ahora en estrella-triángulo, tal como se muestra en la figura 7.30.

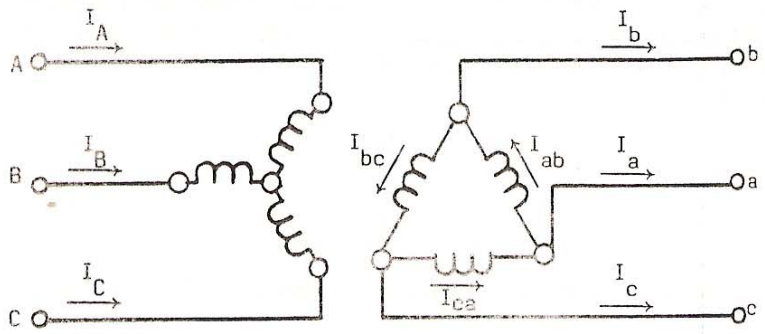


Fig. 7.30

El American National Standard Institute (ANSI) establece normas para el marcaje en el primario y secundario de los transformadores en conexión estrella-triángulo. Sinembargo para efecto de análisis este marcaje puede ser arbitrario siempre y cuando se cumplan debidamente las relaciones entre los voltajes y corrientes de primario y secundario correspondiente a dicho marcaje. No importa como se llamen en el análisis a cada una de las líneas del primario y secundario, los resultados de voltajes y corrientes en esas líneas serán siempre los mismos.

En el diagrama de la figura 7.30 la bobina A del primario corresponde a la bobina bc del secundario, así como también B y C del primario corresponden a ca y ab del secundario respectivamente, tal como se indica en la figura 7.31.

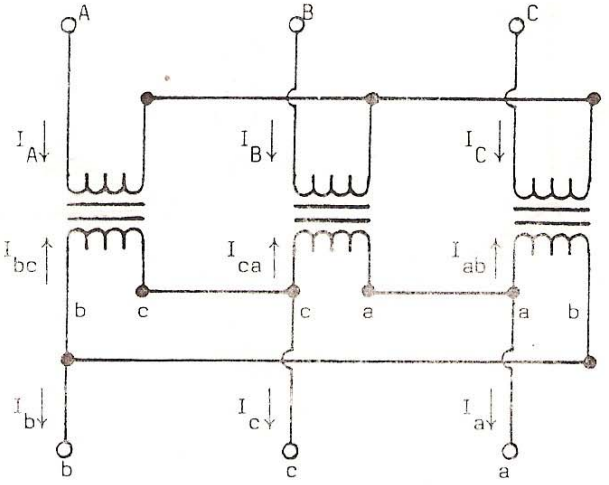
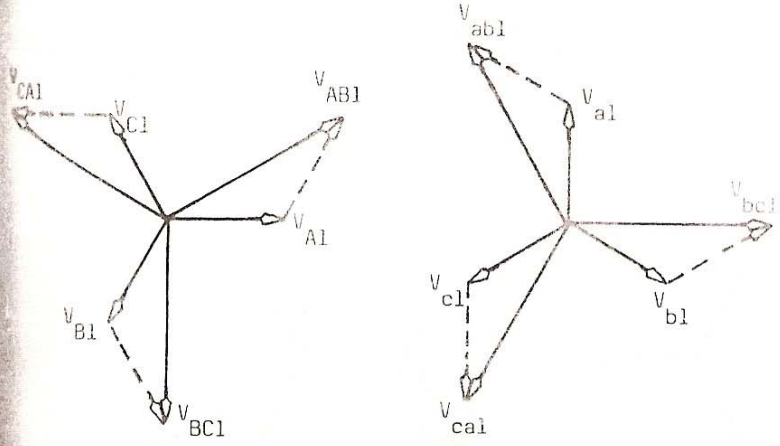


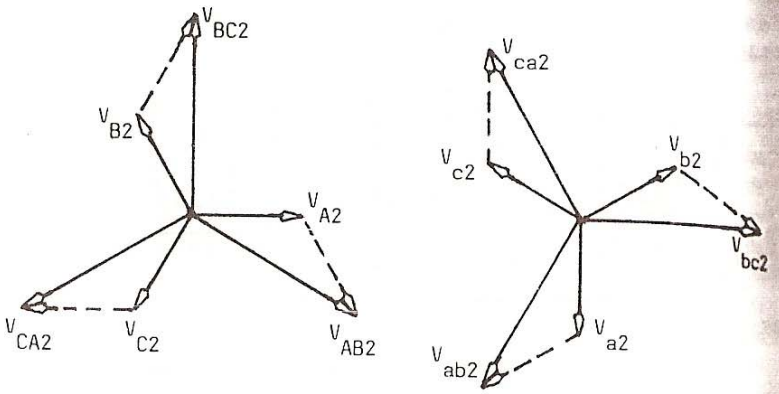
Fig. 7.31

Con los marcajes anteriores los diagramas fasoriales de voltajes y corrientes para las diferentes secuencias son los que se muestran en las figuras 7.32 y 7.33.



Voltajes de Secuencia Positiva

Fig. 7.32

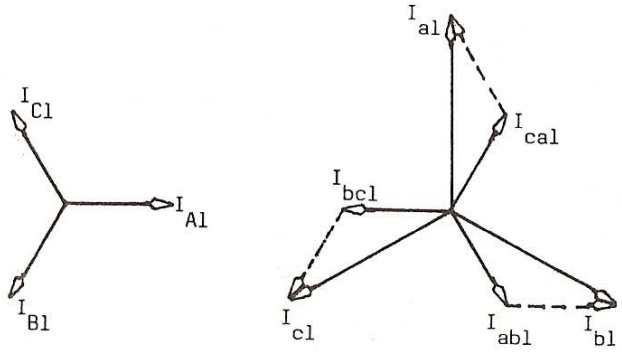


Voltajes de Secuencia Negativa

En la figura 7.32 se observa que en la secuencia positiva el voltaje de fase del secundario queda adelantado 90° de su correspondiente voltaje de fase del primario. En la secuencia negativa el voltaje de fase del secundario queda atrasado 90° de su correspondiente voltaje de fase del primario, por lo que en valores por unidad

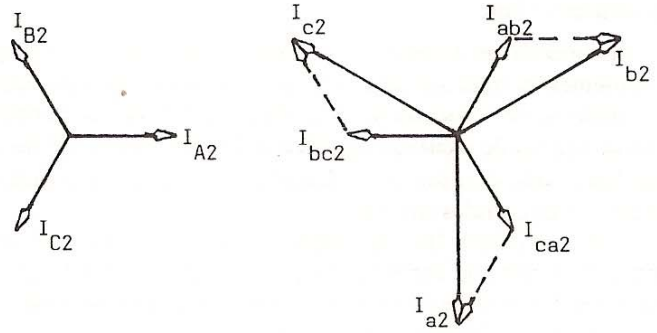
$$V_{A1} = -jV_{a1}$$

$$V_{A2} = jV_{a2} \qquad 7.39$$



Corrientes de Secuencia Positiva

Fig. 7.33



Corrientes de Secuencia Negativa

En la figura 7.33 se observa que en la secuencia positiva la corriente de línea del secundario queda adelantada 90° de su correspondiente corriente de línea del primario. En la secuencia negativa la corriente de línea del secundario queda atrasada 90° de su correspondiente corriente de línea del primario, por lo que

$$I_{A1} = -jI_{a1}$$

$$I_{A2} = jI_{a2} \qquad 7.40$$

El transformador se marca ahora en la forma como se indica en la figura 7.34.

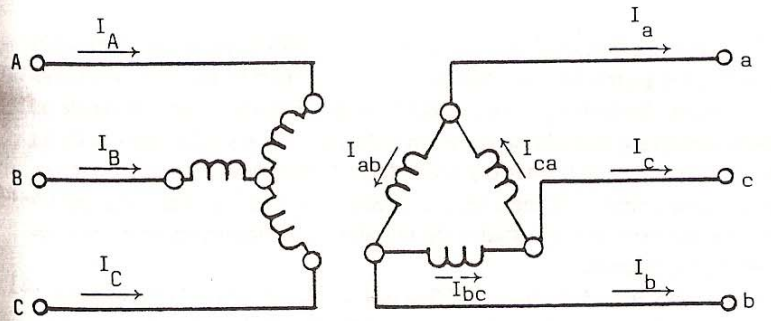
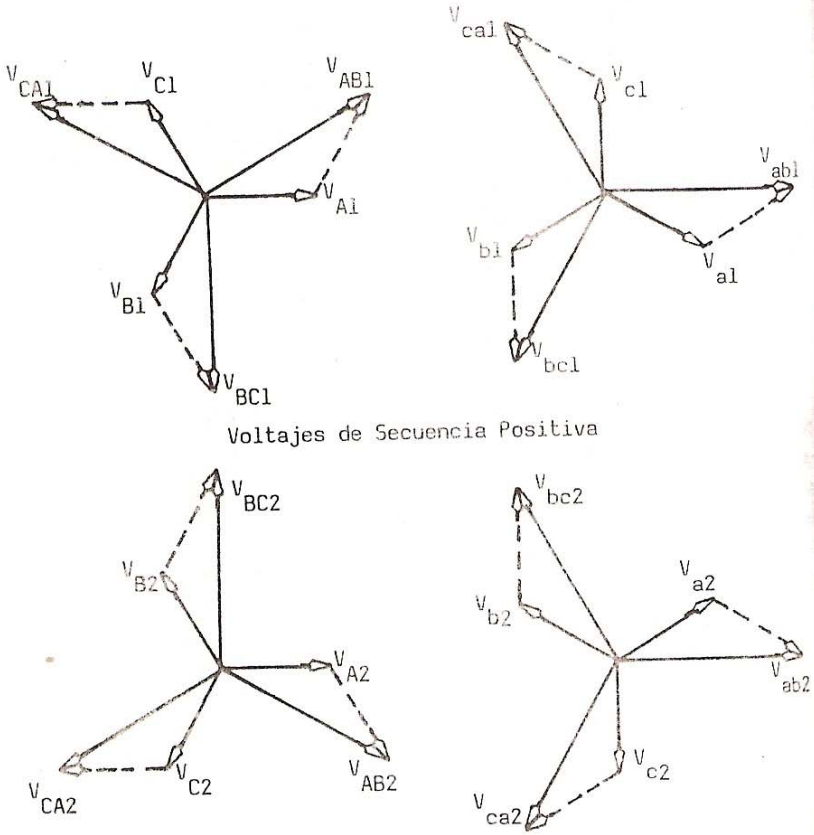


Fig. 7.34

La relación entre las corrientes y voltajes del primario y secundario para las secuencias positivas y negativas se muestran en las figuras 7.35 y 7.36.



Voltajes de Secuencia Positiva

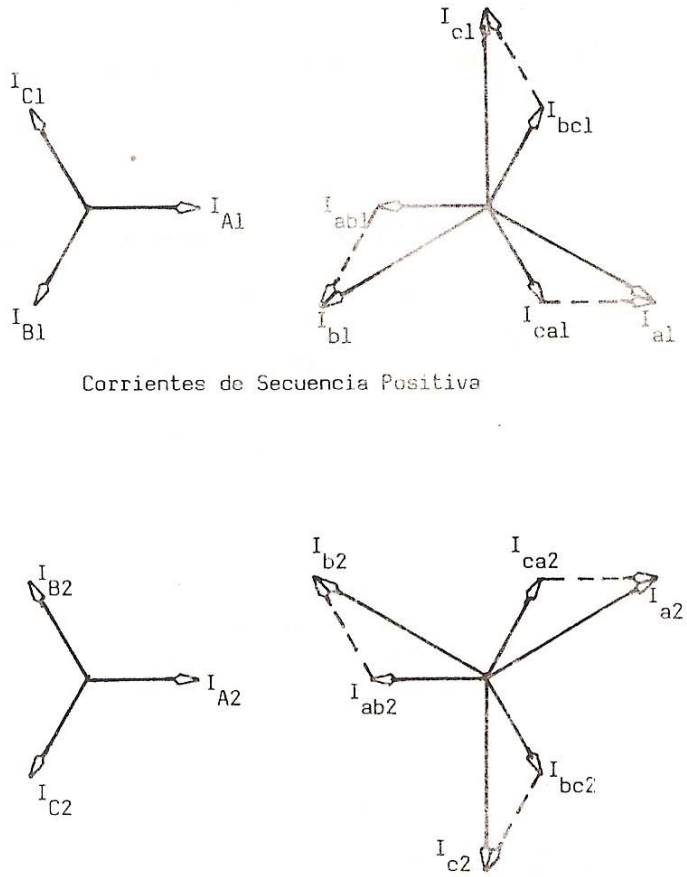
Voltajes de Secuencia Negativa

Fig. 7.35

Las relaciones de los voltajes en las diferentes secuencias son

$$V_{A1} = V_{a1}\angle 30^\circ \qquad 7.41$$

$$V_{A2} = V_{a2}\angle -30^\circ$$



Corrientes de Secuencia Positiva

Corrientes de Secuencia Negativa

Fig. 7.36

Las relaciones de las corrientes en las diferentes secuencias en ambos lados del transformador en valores por unidad son

$$I_{A1} = I_{a1}\angle 30^\circ \qquad 7.42$$

$$I_{A2} = I_{a2}\angle -30^\circ$$

El transformador se marca de nuevo en la forma como se indica en la figura 7.37.

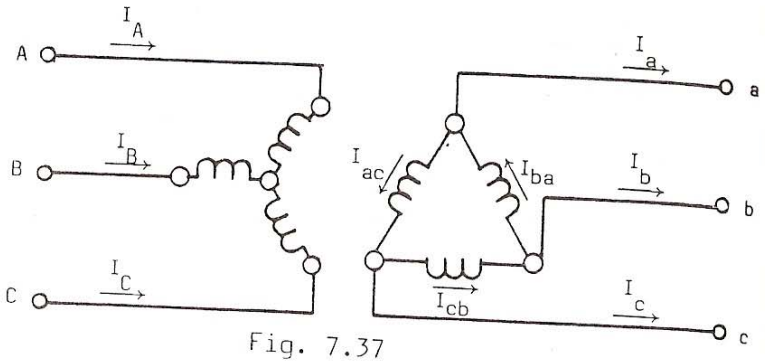
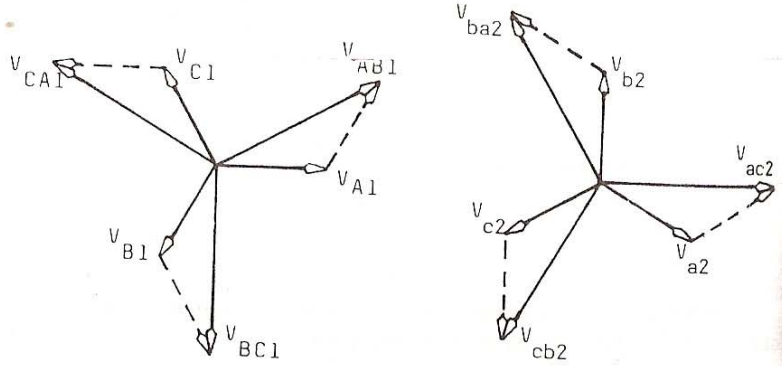


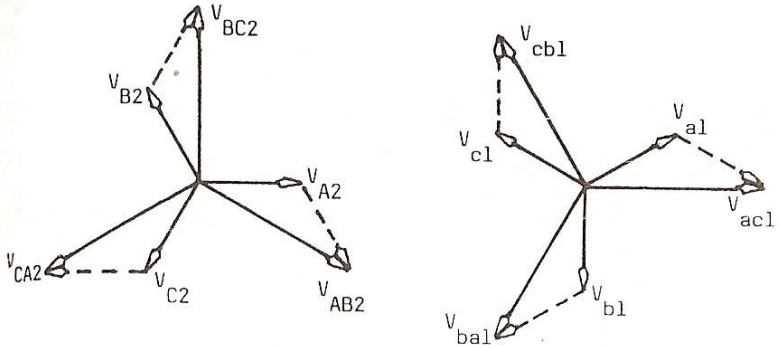
Fig. 7.37

La relación entre los voltajes y corrientes del primario y secundario para las secuencias positiva y negativa se muestran en las figuras 7.38 y 7.39.



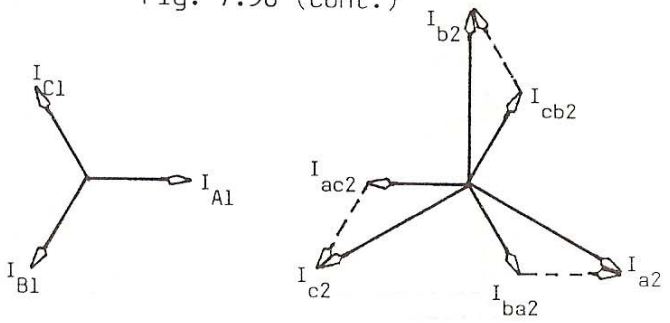
Voltajes de Secuencia Positiva-Negativa

Fig. 7.38

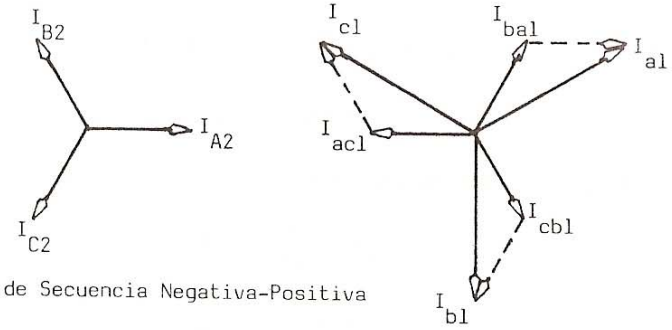


Voltajes de Secuencia Negativa-Positiva

Fig. 7.38 (Cont.)



Corrientes de Secuencia Positiva-Negativa



Corrientes de Secuencia Negativa-Positiva

Fig. 7.39

Las relaciones entre voltajes de fase de secuencias y corrientes de secuencias en valores por unidad son

$$V_{A1} = V_{a2}\angle 30^\circ \qquad V_{A2} = V_{a1}\angle -30^\circ$$
$$I_{A1} = I_{a2}\angle 30^\circ \qquad I_{A2} = I_{a1}\angle -30^\circ \qquad 7.43$$

Se observa en este caso que la relación entre voltajes y entre corrientes de los dos lados del transformador es de secuencia negativa a secuencia positiva y viceversa.

Se observa además en todos los casos tratados que la relación de ángulos de desfase entre los voltajes de ambos lados del transformador es exactamente igual a la relación de ángulos de desfase entre las corrientes y que la relación de ángulos de desfase entre los voltajes de la secuencia negativa de ambos lados del transformador es el conjugado de la relación de ángulos de desfase de los voltajes de la secuencia positiva. Igual sucede con las corrientes.

7.5 CONEXION TRIANGULO-ESTRELLA

Por último los transformadores se conectan en triángulo-estrella, tal como se muestra en la figura 7.40.

Los diagramas fasoriales de voltajes y corrientes de secuencia positiva y negativa se muestran en las figuras 7.41 y 7.42.

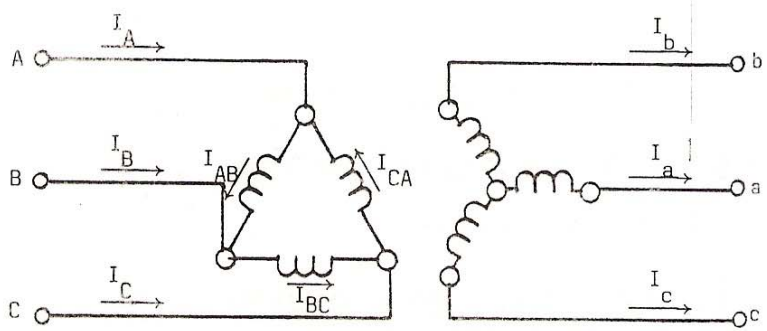
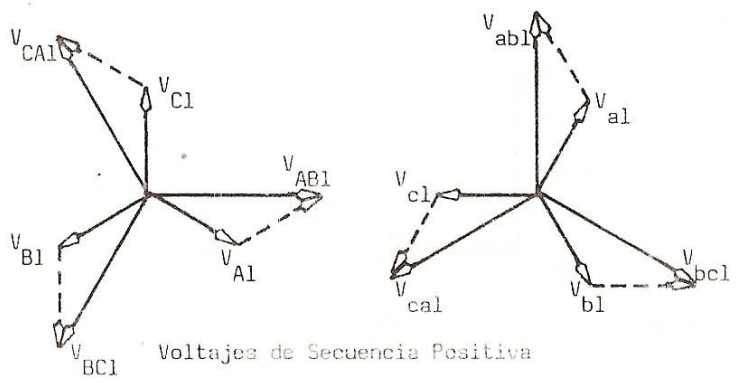
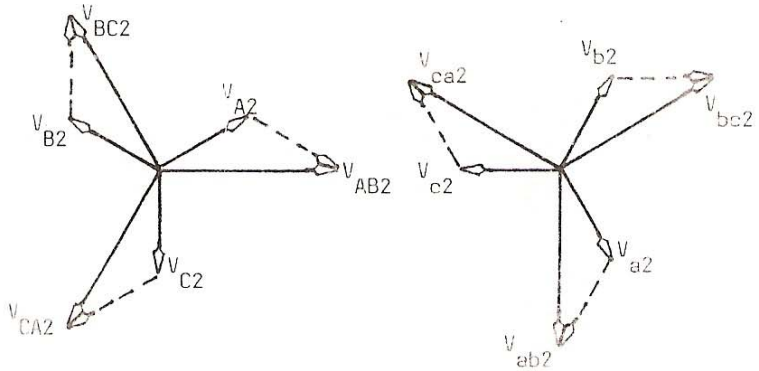


Fig. 7.40



Voltajes de Secuencia Positiva

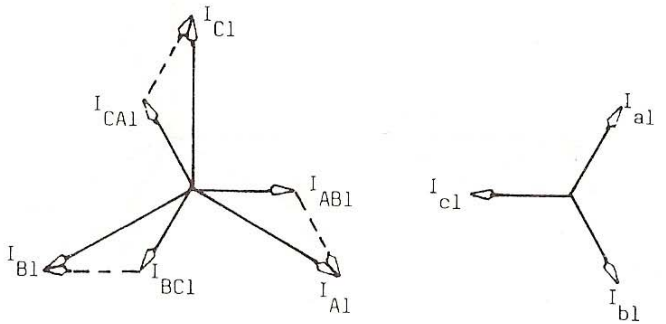


Voltajes de Secuencia Negativa

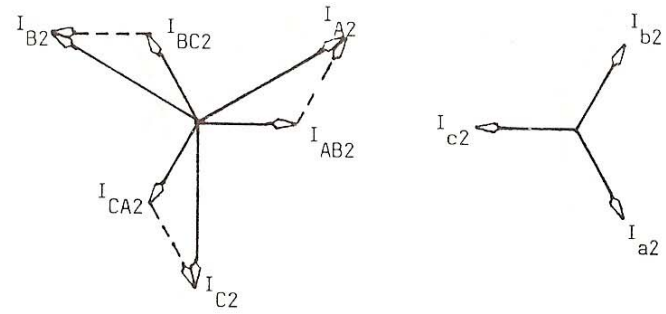
Fig. 7.41

En la figura 7.41 se observa que en la secuencia positiva el voltaje de fase del secundario queda adelantado 90° de su correspondiente voltaje de fase del primario. En la secuencia negativa el voltaje de fase del secundario queda atrasado 90° de su correspondiente voltaje de fase del primario. Asimismo en la figura 7.42 se observa que en la secuencia positiva la corriente de línea del secundario queda adelantada 90° de su correspondiente corriente de línea del primario. En la secuencia negativa la corriente de línea del secundario queda atrasada 90° de su correspondiente corriente de línea del primario, es decir

$$V_{A1} = -jV_{a1} \qquad V_{A2} = jV_{a2}$$
$$I_{A1} = -jI_{a1} \qquad I_{A2} = jI_{a2} \qquad 7.44$$



Corrientes de Secuencia Positiva



Corrientes de Secuencia Negativa

Fig. 7.42

Estas relaciones son las mismas derivadas en la configuración estrella-triángulo, lo que quiere decir que sin importar qué tipo de conexión esté en el primario y en el secundario, en una conexión triángulo-estrella las relaciones de voltajes y corrientes de secuencia serán las mismas de la conexión estrella-triángulo para el mismo marcaje. Las relaciones 7.41, 7.42 y 7.43 son entonces igualmente válidas para la conexión triángulo-estrella con el marcaje indicado.

EJEMPLO 11

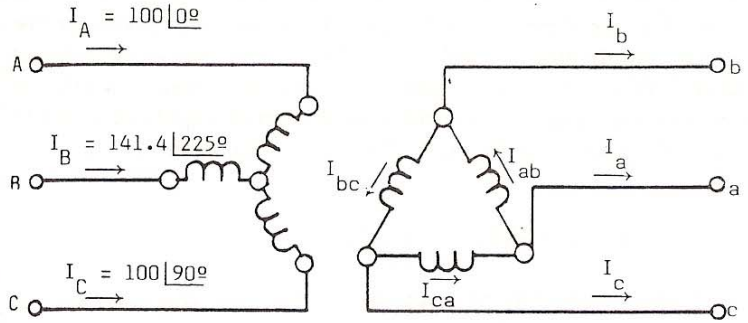
Las corrientes de línea en la entrada de un transformador estrella-triángulo de 10000 KVA, 66 Y – 13.2 Δ KV son $I_a = 100 \lfloor \underline{0°}$ A, I_B

$= 141.4 \lfloor \underline{225°}$ A, $I_C = 100 \lfloor \underline{90°}$ A. Calcular las corrientes que circulan en las líneas del lado del transformador conectado en triángulo con el marcaje indicado en la figura.

La corriente de línea base en el lado estrella es

$$I_b = \frac{10000}{\sqrt{3} \times 66} = 87.477 \text{ amperios}$$

La corriente de línea base en el lado triángulo es



$$I_b = \frac{10000}{\sqrt{3} \times 13.2} = 437.387 \text{ amperios}$$

Las componentes de secuencia en el lado estrella son

$$I_{A0} = \frac{1}{3}(100\lfloor \underline{0º} + 141.4\lfloor \underline{225º} + 100\lfloor \underline{90º}) = 0.0$$

$$I_{A1} = \frac{1}{3}(100\lfloor \underline{0º} + 141.4\lfloor \underline{345º} + 100\lfloor \underline{330º})$$

$$= 111.53\lfloor \underline{-15º} \text{ amperios}$$

$$I_{A2} = \frac{1}{3}(100\lfloor \underline{0º} + 141.4\lfloor \underline{465º} + 100\lfloor \underline{210º})$$

$$= 29.88\lfloor \underline{105º} \text{ amperios}$$

En valores por unidad

$I_{A0} = 0.0$

$$I_{A1} = \frac{111.53\angle -15^\circ}{87.477} = 1.275\angle -15^\circ \text{ pu}$$

$$I_{A2} = \frac{29.88\angle 105^\circ}{87.477} = .342\angle 105^\circ \text{ pu}$$

Este marcaje corresponde al de la figura 7.30, por lo que las relaciones de corrientes en las diferentes secuencias son las indicadas en la ecuación 7.40. Entonces.

$I_{a1} = jI_{A1} = 1.275\angle 75^\circ$ pu

$I_{a2} = -jI_{A2} = .342\angle 15^\circ$ pu

$I_{a0} = 0.0$

$I_a = 1.275\angle 75^\circ + .342\angle 15^\circ = 1.476\angle 63.435^\circ$ pu

$= 437.387 \times 1.476\angle 63.435^\circ = 645.583\angle 63.435^\circ$ A

$I_b = 1.275\angle 315^\circ + .342\angle 135^\circ = .933\angle -45^\circ$ pu

$= 437.387 \times .933\angle -45^\circ = 408.082\angle -45^\circ$ Amperios

$I_c = 1.275\angle 195^\circ + .342\angle 255^\circ = 1.477\angle -153.452^\circ$ pu

$= 437.387 \times 1.477\angle -153.452^\circ = 646.021\angle -153.452^\circ$ A

EJEMPLO 12

Resolver el Ejemplo 11 usando el marcaje de la figura 7.34.

La relación entre las corrientes del primario y secundario para las secuencias positiva y negativa es la indicada en la ecuación 7.42. Entonces

$I_{a1} = I_{A1}\angle -30^\circ = 1.275\angle -45^\circ$ pu

$I_{a2} = I_{A2}\angle 30^\circ = .342\angle 135^\circ$ pu

$I_a = 1.275\angle -45^\circ + .342\angle 135^\circ = .933\angle -45^\circ$ pu

$= 408.082\angle -45^\circ$ Amperios

$I_b = 1.275\angle 195^\circ + .342\angle 255^\circ = 1.477\angle -153.452^\circ$ pu

$= 646.021\angle -153.452^\circ$ Amperios

$I_c = 1.275\angle 75^\circ + .342\angle 375^\circ = 1.476\angle 63.435^\circ$ pu

$= 645.583\angle 63.435^\circ$ Amperios

EJEMPLO 13

Resolver el Ejemplo 11 usando el marcaje de la figura 7.37.

La relación entre las corrientes del primario y secundario para las secuencias positiva y negativa es la indicada en la ecuación 7.43. Entonces

$I_{a1} = I_{A2}\angle 30^\circ = .342\angle 135^\circ$ pu

$I_{a2} = I_{A1}\angle -30^\circ = 1.275\angle -45^\circ$ pu

$I_a = .342\angle 135^\circ + 1.275\angle -45^\circ = .933\angle -45^\circ$ pu

$= 408.082\angle -45^\circ$ Amperios

$I_b = .342\angle 375^\circ + 1.275\angle 75^\circ = 1.476\angle 63.435^\circ$

$= 645.583\angle 63.435^\circ$ Amperios

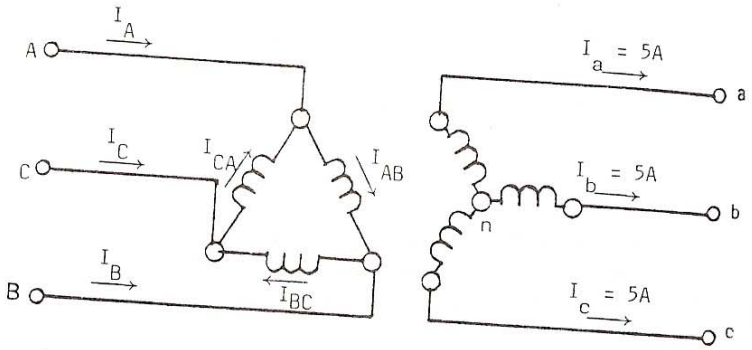
$I_c = .342\angle 255^\circ + 1.275\angle 195^\circ = 1.477\angle -153.452^\circ$ pu

$= 645.583\angle -153.452^\circ$ Amperios

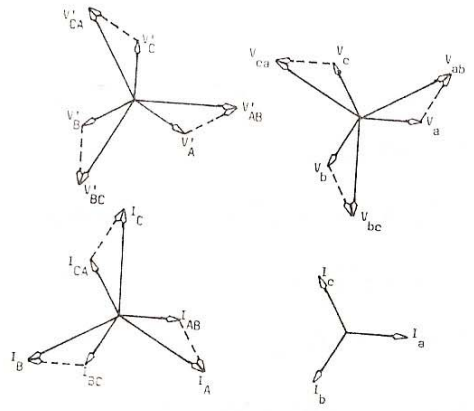
Se observa en estos tres últimos ejemplos que los resultados son los mismos en las mismas líneas sin importar el marcaje que se use.

EJEMPLO 14

Tres transformadores monofásicos cada uno con características de 1 KVA, 220/110 V, X = j9.65 ohmios referido al primario, se conectan en triángulo-estrella, como indica la figura, para alimentar a una carga trifásica balanceada de 5 amperios de línea y 110 voltios de línea a neutro, con factor de potencia de 1.0. Calcular el voltaje de la fase a en el primario.



La relación de voltajes generados y corrientes de línea se indica en el siguiente diagrama fasorial tomando al voltaje V_a como referencia.



Se tiene entonces la siguiente información

$V_a = 110\angle 0º$ V, $V_b = 110\angle -120º$ V, $V_c = 110\angle -240º$ V

$I_a = 5\angle 0º$ A, $I_b = 5\angle -120º$ A, $I_c = 5\angle -240º$ A

Por lo que

$V_{ab} = \sqrt{3} \times V_a\angle 30º = \sqrt{3} \times 110\angle 30º = 190.5256\angle 30º$ V

$V_{bc} = 190.5256\angle -90º$ V, $V_{ca} = 190.5256\angle -210º$ V

$V'_{AB} = 2 \times V_a = 2 \times 110\angle 0º = 220\angle 0º$ V

$V'_{BC} = 220\angle -120º$ V, $V'_{CA} = 220\angle -240º$ V

$$V'_A = \frac{V'_{AB}}{\sqrt{3}}\angle -30º = \frac{220}{\sqrt{3}}\angle -30º = 127.0171\angle -30º \text{ V}$$

$V'_B = 127.0171\angle -150º$ V, $V'_C = 127.0171\angle -270º$ V

$$I_{AB} = \frac{I_{ab}}{2} = \frac{5}{2}\angle 0º = 2.5\angle 0º \text{ A}$$

$I_{BC} = 2.5\angle -120º$ A, $I_{CA} = 2.5\angle -240º$ A

$I_A = I_{AB} - I_{CA} = \sqrt{3} \times I_{AB}\angle -30º = \sqrt{3} \times 2.5\angle -30º$

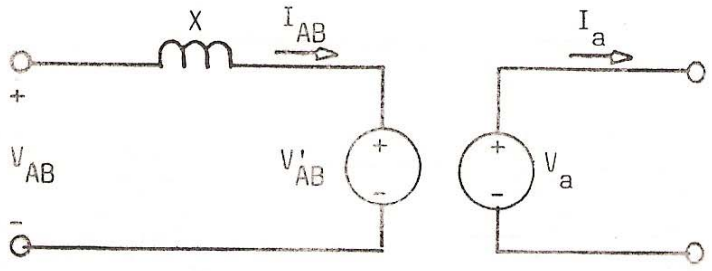
$= 4.3301\angle -30º$ A

$I_B = 4.3301\angle -150º$ A, $I_C = 4.3301\angle -270º$ A

El problema se resolverá de diferentes maneras

a) Se resuelve en valores reales en forma monofásica

El diagrama de impedancias y voltajes del transformador de la fase a es



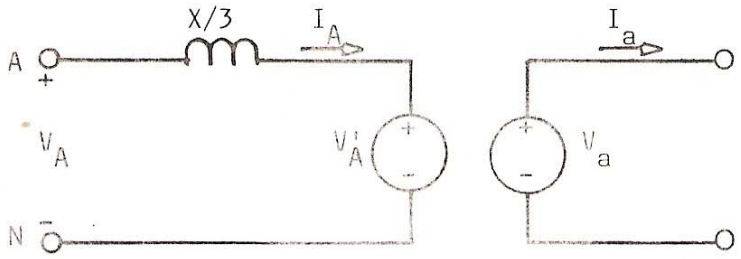
$$V_{AB} = V'_{AB} + jX\,I_{AB} = 220\angle 0º + j2.5 \times 9.66$$

$$= 221.3215\angle 6.2644º \text{ Voltios}$$

$$V_A = \frac{V_{AB}}{\sqrt{3}}\angle -30º = 127.780\angle -23.7356º \text{ Voltios}$$

b) Se resuelve en valores reales transformando el triángulo en estrella.

El diagrama de impedancias y voltajes de la fase a después de la transformación es



$$V_A = V'_A + j\frac{X}{3}I_A = 127.0171\angle -30º + 3.22 \times 4.3301\angle 60º$$

$$= 127.780\angle -23.7356º \text{ Voltios}$$

c) Se resuelve en valores por unidad en forma monofásica.

En el lado del primario se tiene

$$V_{bLL} = 220 \text{ V},\ V_{bLN} = 127.0171 \text{ V},\ S_b = 1000 \text{ VA}$$

$$Z_b = \frac{(220)^2}{1000} = 48.40 \text{ ohmios}$$

$$Z_{pu} = \frac{9.66}{48.40} = .1996 \text{ pu}$$

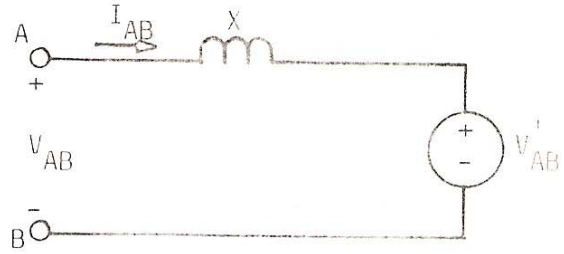
$$I_b = \frac{1000}{220} = 4.5455 \text{ amperios}$$

$$I_{pu} = \frac{2.5}{4.5455} = .5500 \text{ pu}$$

$$V'_{AB} = 220\angle 0º \text{ V} = \frac{220\angle 0º}{220} = 1.0\angle 0º \text{ pu}$$

$$I_{AB} = .5500\angle 0º \text{ pu}$$

El diagrama de impedancias y voltajes del transformador de la fase a en valores por unidad es



$$V_{AB} = V'_{AB} + jX\,I_{AB} = 1.0\angle 0º + j.5500 \times .1996$$

$$= 1.0060\angle 6.2624º \text{ pu} = 220 \times 1.0060\angle 6.2624º$$

$$= 221.3215\angle 6.2624º \text{ voltios}$$

$$V_A = V_{AB}\angle -30º = 1.0060\angle -23.7356º \text{ pu}$$

$$V_A = 127.0171 \times 1.0060\angle -23.7356º = 127.78\angle -23.7356º \text{ V}$$

d) Se resuelve en valores por unidad en forma trifásica.

Los valores base y por unidad en el primario son

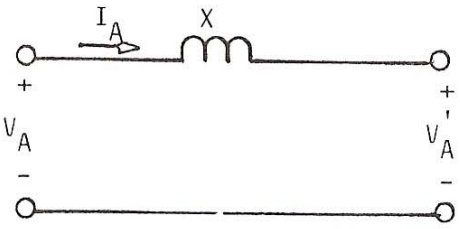
$V_{bLL} = 220$ V, $V_{bLN} = 127.0171$ V, $S_b = 3000$ va

$$I_b = \frac{3000}{\sqrt{3} \times 220} = 7.8730 \text{ amperios}$$

$$I_A = 4.3301\angle -30^\circ \text{ A} = \frac{4.3301\angle -30^\circ}{7.8730} = .5500\angle -30^\circ \text{ pu}$$

$X = .1996$ pu, $V'_A = 1.0\angle -30^\circ$

El diagrama de impedancias y voltajes de la fase a en el primario es



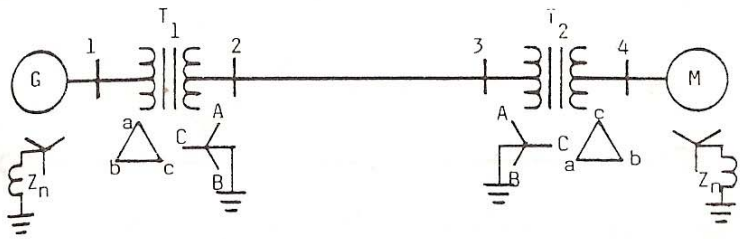
$$V_A = V'_A + jXI_A = 1.0\angle -30^\circ + .1996 \times .55\angle 60^\circ$$

$$= 1.0060\angle -23.7356^\circ \text{ pu} = 127.0171 \times 1.0060\angle -23.7356$$

$$= 127.780\angle -23.7356^\circ \text{ voltios}$$

EJEMPLO 15

Un generador alimenta a un motor sincrónico a través de transformadores y líneas de transmisión, tal como lo indica la figura



Los datos de todo el sistema son

G: 20 MVA, 6.6 KV, $X_1 = X_2 = j.12$ pu, $X_0 = j.05$ pu, $Z_n = j.010$ pu.

M: 15 MVA, 6.6 KV, $X_1 = X_2 = j.10$ pu, $X_0 = j.04$ pu, $Z_n = j.010$ pu.

T_1: 20 MVA, 7.5 Δ - 13.8 Y KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu

T_2: 30 MVA, 6.9 Δ - 13.8 Y KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu

LINEA 2-3: $X_1 = X_2 = j1.0\ \Omega$ $X_0 = j1.6\ \Omega$

Si el motor toma de la línea 9.8 MW con factor de potencia de .82 en adelanto a voltajes balanceados entre líneas de 6.1 KV ($V_{ab} = 6.1\angle 0^\circ$ KV), calcular

a) La corriente de cada fase en el motor en la línea y en el generador.
b) Los voltajes de líneas en las barras 3, 2 y 1.

Tomar como base los valores del generador en la barra 1 y dar los resultados en voltios y amperios, trabajando con componentes simétricas y en valores por unidad.

Como el sistema es balanceado no existen componentes de secuencia negativa ni cero y todo el análisis se hará con la secuencia positiva. Se busca entonces el diagrama de impedancia de secuencia positiva solamente.

Los valores base en la barra 1 son:

$V_b = 6.6$ KV, $S_b = 20$ MVA

$$I_b = \frac{20000}{\sqrt{3} \times 6.6} = 1749.5463 \text{ amperios}$$

En el generador:

$$X_1 = X_2 = j.12 \text{ pu}, \quad X_0 = j.05 \text{ pu}, \quad Z_n = j.010 \text{ pu}.$$

En el transformador T_1:

$$X_1 = X_2 = X_0 = j.1 \times \left[\frac{7.5}{6.6}\right]^2 \times \frac{20}{20} = j.1291 \text{ pu}$$

En la línea 2-3:

$$V_b = \frac{13.8}{7.5} \times 6.6 = 12.1440 \text{ KV}$$

$$I_b = \frac{20000}{\sqrt{3} \times 12.144} = 950.8404 \text{ amperios}$$

$$Z_b = \frac{(12.1440)^2}{20} = 7.3738 \text{ ohmios}$$

$$X_1 = X_2 = \frac{j1.0}{7.3738} = j.1356 \text{ pu}$$

$$X_0 = \frac{j1.6}{7.3738} = j.2170 \text{ pu}$$

En el transformador T_2:

$$X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times \left[\frac{13.8}{12.144}\right]^2 \times \frac{20}{30} = j.0861 \text{ pu}$$

En el motor:

$$V_b = \frac{6.9}{13.8} \times 12.1440 = 6.0720 \text{ KV}$$

$$I_b = \frac{20000}{\sqrt{3} \times 6.072} = 1901.6807 \text{ amperios}$$

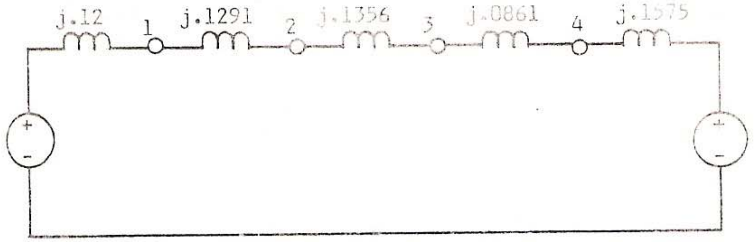
$$X_1 = X_2 = j.10 \times \left[\frac{6.6}{6.072}\right]^2 \times \frac{20}{15} = j.10 \times 1.5753$$

$$= j.1575 \text{ pu}$$

$$X_0 = j.04 \times 1.5753 = j.0630 \text{ pu}$$

$$Z_n = j.010 \times 1.5753 = j.0157 \text{ pu}$$

El diagrama de impedancias de secuencia positiva es entonces



Los valores de potencia, corriente y voltaje en el motor son

$$P_M = 9.8 \text{ MW} = \frac{9.8}{20} = .4900 \text{ pu}$$

$$S_M = \frac{.4900}{.82}\angle -34.9152^\circ = .5976\angle -34.9152^\circ \text{ pu}$$

$$V_{ab} = \frac{6.1\angle 0^\circ}{6.0720} = 1.0046\angle 0^\circ \text{ pu}$$

$$V_a = V_{ab}\angle -30^\circ = 1.0046\angle -30^\circ \text{ pu}$$

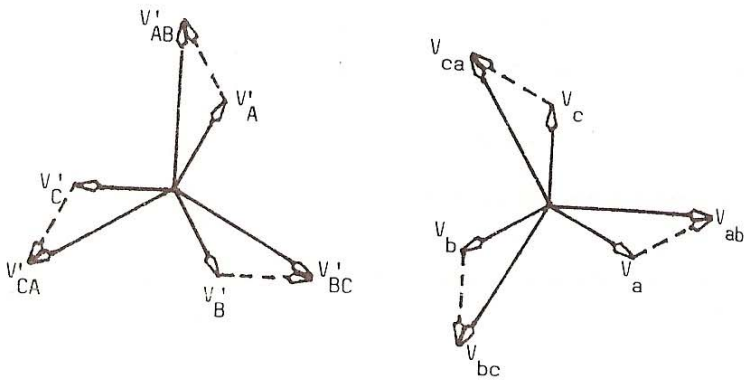
$$I_a = \frac{S^*}{V_a^*} = \frac{.5976\angle 34.9152^\circ}{1.0046\angle 30^\circ} = .5949\angle 4.9152^\circ \text{ pu}$$

$$= 1901.6807 \times .5949\angle 4.9152^\circ = 1131.3099\angle 4.9152^\circ \text{ A}$$

$$I_b = a^2 I_a = 1131.3099\angle 244.9152^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_c = aI_a = 1131.3099\angle 124.9152^\circ \text{ Amperios}$$

La relación fasorial de voltajes en T_2 es



por lo que

$$V'_A = jV_a = 1.0046|\underline{60^\circ} \text{ pu}$$

$$I_A = jI_a = .5949|\underline{94.9152^\circ}$$

En la línea entonces

$$I_A = .5949|\underline{94.9152^\circ} = 950.8404 \times .5949|\underline{94.9152^\circ}$$

$$= 565.6550|\underline{94.9152^\circ} \text{ amperios}$$

$$I_B = a^2 I_A = 565.6560|\underline{334.9152^\circ} \text{ amperios}$$

$$I_C = aI_A = 565.6550|\underline{214.9152^\circ} \text{ amperios}$$

En la barra 3:

$$V_A = V'_A + jX_{T2}I_A = 1.0046|\underline{60^\circ} + .0861|\underline{90^\circ} \times .5949|\underline{94.9152}$$

$$= .9762|\underline{62.4657^\circ} \text{ pu}$$

$$V_{AB} = V_A|\underline{30^\circ} = .9762|\underline{92.4657^\circ} \text{ pu}$$

$$V_{AB} = 12.1440 \times .9762|\underline{92.4657^\circ} = 11.8547|\underline{92.4657^\circ} \text{ KV}$$

$$V_{BC} = a^2 V_{AB} = 11.8547|\underline{332.4657^\circ} \text{ KV}$$

$$V_{CA} = aV_{AB} = 11.8547|\underline{212.4657^\circ} \text{ KV}$$

En la barra 2:

$$V_A = .9762|\underline{62.4657^\circ} + .1356|\underline{90^\circ} \times .5949|\underline{94.9152^\circ}$$

$$= .9354|\underline{66.6371^\circ} \text{ pu}$$

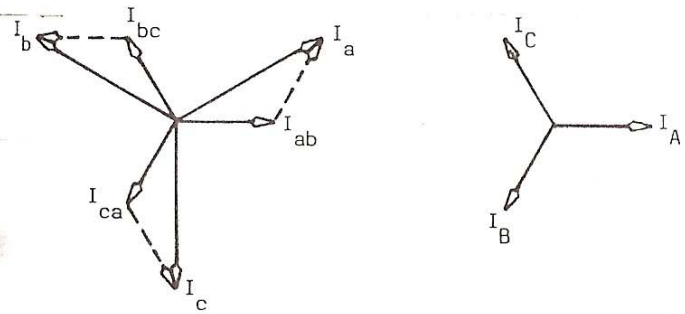
$$V_{AB} = .9354|\underline{96.6371^\circ} \text{ pu} = 12.1440 \times .9354|\underline{96.6371^\circ}$$

$$= 11.3595|\underline{96.6371^\circ} \text{ KV}$$

$$V_{BC} = a^2 V_{AB} = 11.3595|\underline{336.6371^\circ} \text{ KV}$$

$$V_{CA} = aV_{AB} = 11.3595|\underline{216.6371^\circ} \text{ KV}$$

La relación fasorial de corrientes en el transformador T_1 es



por lo que

$$I_{a2} = I_{A1}|\underline{30^\circ} = .5949|\underline{124.9152^\circ} \text{ pu}$$

$$V'_{a2} = V_{A1}|\underline{30^\circ} = .9354|\underline{96.6371^\circ} \text{ pu}$$

En el generador:

$$I_a = .5949\angle 124.9152^\circ \text{ pu} = 1749.5463 \times .5949\angle 124.9152^\circ$$

$$= 1040.8051\angle 124.9152^\circ \text{ amperios}$$

$$I_b = aI_a = 1040.8051\angle 244.9152^\circ \text{ amperios}$$

$$I_c = a^2 I_a = 1040.8051\angle 4.9152^\circ \text{ amperios}$$

En la barra 1:

$$V_a = V_a' + jX_{T1} I_a$$

$$= .9354\angle 96.6371^\circ + .1291\angle 90^\circ \times .5949\angle 124.9152^\circ$$

$$= .9015\angle 100.9415^\circ \text{ pu}$$

$$V_{ab} = .9015\angle 70.9415^\circ \text{ pu} = 6.6 \times .9015\angle 70.9415^\circ$$

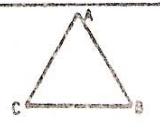
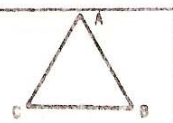
$$= 5.9500\angle 70.9415^\circ \text{ KV}$$

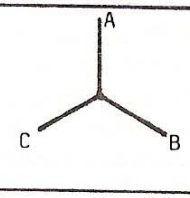
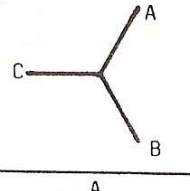
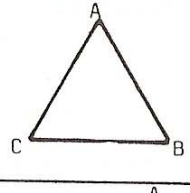
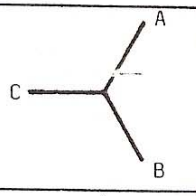
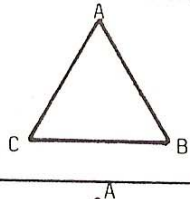
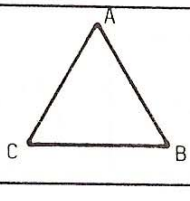
$$V_{bc} = aV_{ab} = 5.9500\angle 190.9415^\circ \text{ KV}$$

$$V_{ca} = a^2 V_{ab} = 5.9500\angle 310.9415^\circ \text{ KV}$$

7.6 RESUMEN DE CONEXIONES DE LOS TRANSFORMADORES

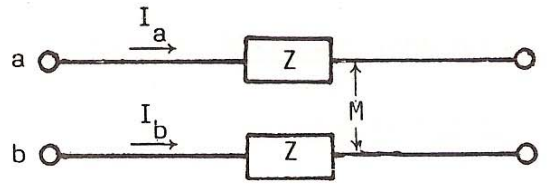
En la práctica las conexiones y los marcajes de los transformadores están normalizados en los llamados grupos de conexión. En esta normalización se designa con la letra D a la conexión en triángulo y con la letra Y a la conexión en estrella, usándose la letra mayúscula para indicar el primario y la letra minúscula para indicar el secundario. Cada grupo se identifica con un número llamado índice de conexión, que al ser multiplicado por 30° indica el ángulo que existe entre las corrientes de línea de secuencia positiva (o voltajes generados de fase de secuencia positiva) del primario respecto a las corrientes de líneas de secuencia positiva (o voltajes generados de fase de secuencia positiva) del secundario. Es decir, si el ángulo de la corriente de línea de secuencia positiva del primario está en fase con la corriente de línea de secuencia positiva del secundario el índice de conexión es 0, y si además la conexión es estrella-estrella, el grupo de conexión se indicará como Yy0. Para una conexión triángulo-estrella en donde la referida corriente del primario está adelantada de la del secundario en 150° el grupo de conexión será Dy5. En las tablas siguientes se indican algunas conexiones de los transformadores con su ángulo de desfase y su respectivo grupo de conexión.

δ	GRUPO DE CONEXION	DIAGRAMA DE CONEXIONES	
		PRIMARIO	SECUNDARIO
0º	Yy0		
30º	Dy1		
60º	Dd2		
90º	Yd3		
120º	Yy4		
150º	Dy5		

δ	GRUPO DE CONEXION	DIAGRAMA DE CONEXIONES	
		PRIMARIO	SECUNDARIO
180º	Yy6		
210º	Yd7		
240º	Dd8		
270º	Yd9		
300º	Dd10		
330º	Dy11		

PROBLEMAS

a) Conseguir y dibujar un conjunto de componentes simétricas para el siguiente sistema de dos fases.



b) Usando las componentes simétricas, determinar las corrientes de fase I_a e I_b del sistema anterior si

$$V_a = 10\angle 30º \text{ V}, \quad V_b = 15\angle 70º \text{ V}, \quad Z = 10\angle 0º \quad M = 0$$

2. Determinar las componentes simétricas de los voltajes.

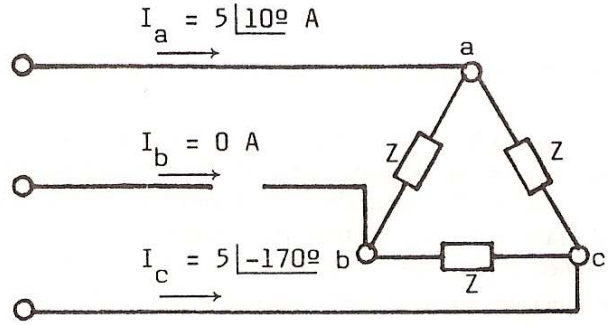
$$V_a = 110\angle 0º \text{ V}, \quad V_b = 100\angle 50º \text{ V}, \quad V_c = 130\angle -90º \text{ V}$$

3. Determinar los valores de las corrientes de línea de un sistema trifásico si las componentes de secuencia son

$$I_0 = 3.25\angle 10º \text{ A}, \quad I_1 = 12.58\angle 80º \text{ A}, \quad I_2 = 4.23\angle -100º$$

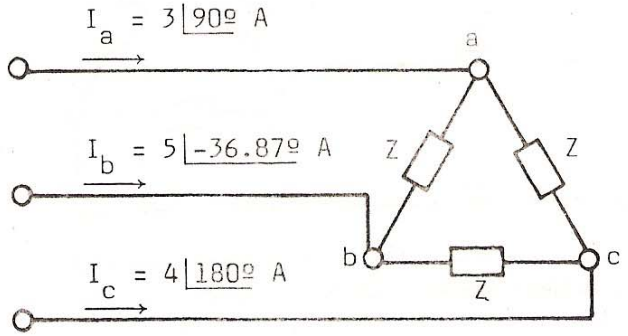
4. a) En el siguiente sistema calcular las componentes de secuencia de las corrientes en las líneas y en cada una de las fases.

b) Con los valores de secuencia en las fases calculados en la parte anterior, calcular las corrientes de fase I_{ab}, I_{bc} e I_{ca}.



5. En el siguiente sistema,calcular

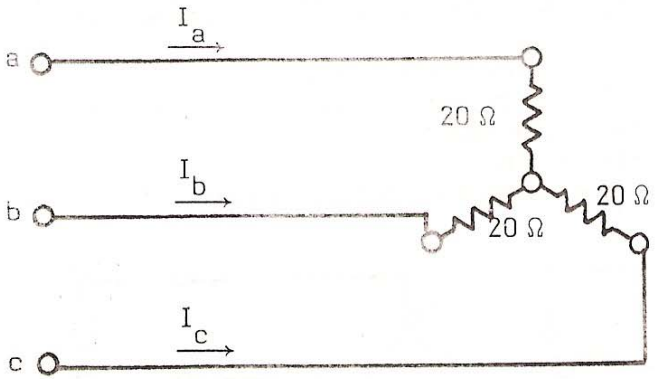
a) Las componentes de secuencia en las líneas.
b) Las componentes de secuencia en las fases.
c) Las corrientes en cada una de las fases.



6. En la red siguiente los voltajes de línea son

$$V_{ab} = 120\angle 0º \text{ V}, \quad V_{bc} = 100\angle 120º \text{ V}, \quad V_{ca} = 111.355\angle -141.052$$

Calcular las corrientes de línea y las potencias por medio de las componentes simétricas.

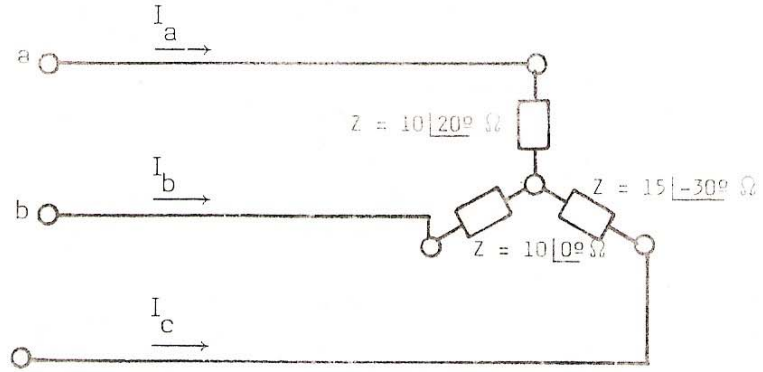


7. Resolver el problema anterior en valores por unidad usando una base de 120 V, 1.0 KVA.

8. Repetir los problemas 6 y 7 si $|V_{ab}| = 130\text{V}$ $|V_{bc}| = 100$ V, $|V_{ca}| = 90$ V.

9. A la red siguiente se le aplican voltajes balanceados de

$$V_{ab} = 100\angle 0º \text{ V}, \quad V_{bc} = 100\angle 120º \text{ V}, \quad V_{ca} = 100\angle 240º \text{V}$$



a) Escribir los diagramas de secuencia.
b) Calcular en amperios las corrientes en cada una de las fases.
c) Calcular las potencias activa y reactiva del sistema.

10. Resolver el problema anterior en valores por unidad, seleccionando como base a 100 V y 1.0 KVA. Dar los resultados en amperios, vatios y voltiamperios.

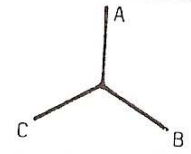
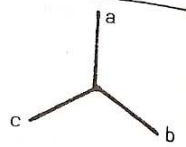
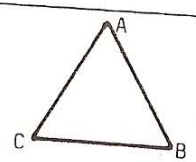
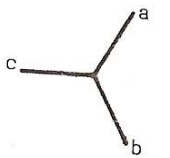
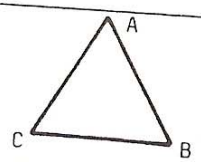
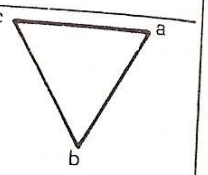
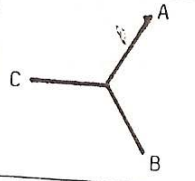
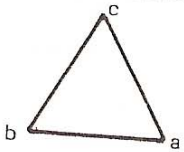
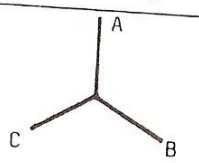
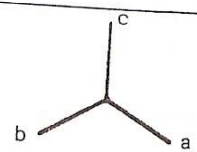
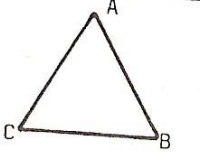
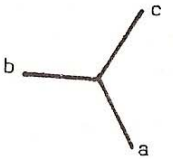
11. A la red siguiente se le aplican los voltajes balanceados de

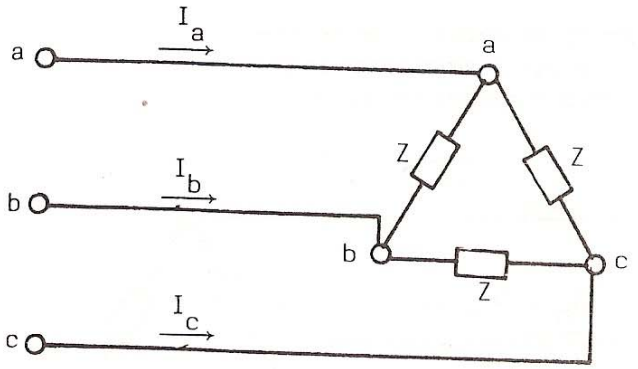
$$V_{ab} = 120\angle 0º \text{ V}, \quad V_{bc} = 120\angle 240º \text{ V}, \quad V_{ca} = 120\angle 120º \text{ V}.$$

Usando las componentes simétricas:

a) Calcular en amperios las corrientes en cada una de las fases y en cada una de las líneas.
b) Calcular la potencia activa y reactiva de cada fase y de todo el sistema.
c) Dibujar los diagramas de secuencia

$$Z_{ab} = 20\angle -15º\ \Omega, \quad Z_{bc} = 25\angle 50º\ \Omega, \quad Z_{ca} = 10\angle 20º\ \Omega$$

δ	GRUPO DE CONEXION	DIAGRAMA DE CONEXIONES	
		PRIMARIO	SECUNDARIO
0º	YyO		
30º	Dy1		
60º	Dd2		
90º	Yd3		
120º	Yy4		
150º	Dy5		

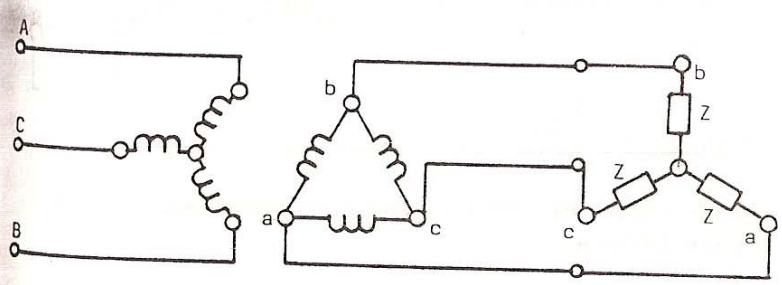


12. Seleccionar como base a 120 voltios y 10 amperios en línea y trabajar el problema anterior en valores por unidad.
13. Repetir el problema 11 si los voltajes aplicados son

$$|V_{ab}| = 100\ V, \quad |V_{bc}| = 120\ V, \quad |V_{ca}| = 90\ V.$$

14. Una carga conectada en estrella con impedancia por fase igual a $Z = 5\ \underline{|30^\circ}$ ohmios, es alimentada a través de un transformador Y-Δ de 50 KVA, 2200/220 V, $Z_1 = Z_2 = Z_0 = j.021$ pu, al cual se le aplican los voltajes de secuencia positiva $V_{AB} = 2000\ \underline{|0^\circ}$ V, $V_{BC} = 1800\ \underline{|220^\circ}$ V, tal como se indica en la figura. Por medio de las componentes simétricas calcule:

a) Las corrientes en cada fase en la carga.
b) Las corrientes en cada fase del secundario del transformador.
c) El voltaje en cada fase de la carga.
d) Las corrientes en el primario del transformador.
e) La potencia aparente de entrada al transformador.



15. Repetir el problema 14 trabajando con valores por unidad, seleccionado como base a 2200 V y a 50 KVA en el primario del transformador.

16. Repetir los problemas 14 y 15 si las cargas son $Z_a = 5\angle 30°\ \Omega$, $Z_b = 6\angle 0°\ \Omega$, $Z_c = 6\angle -30°\ \Omega$.

17. En la red siguiente la carga trifásica está formada por 3 impedancias iguales con $Z = 5\angle 20°\ \Omega$ conectadas en estrella. Los voltajes en los terminales de la carga son

$$|V_{ab}| = 220\ V,\quad |V_{bc}| = 250\ V,\quad |V_{ca}| = 210\ V.$$

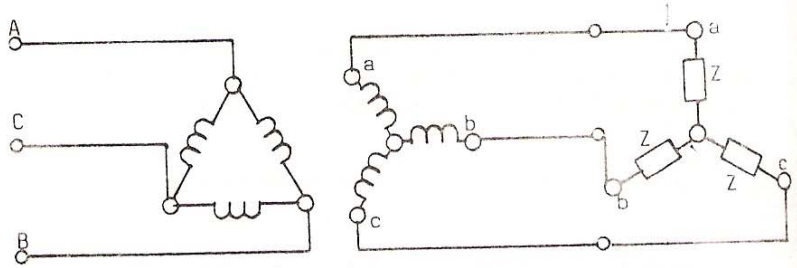
Las características del transformador son

$$25\ KVA,\ 2.5\ KV\ \Delta - 240\ V\ Y,\ X_1 = X_2 = X_0 = .10\ pu.$$

Calcular:

a) La corriente en amperios en la carga y en el primario del transformador.
b) Los voltajes a la entrada del transformador.
c) La potencia en la carga y a la entrada del transformador.

Seleccionar como base a 20 KVA, 2.4 KV en el primario del transformador y trabajar en valores por unidad.



18. Repetir el problema 17 si las cargas son

$$Z_a = 5\angle 0°\ \Omega \qquad Z_b = 15\angle 30°\ \Omega \qquad Z_c = 10\angle -30°\ \Omega$$

19. Los datos del sistema de potencia que se indica son los siguientes:

G_1: 25 MVA, 6.6 KV, $X_1 = X_2 = j.12$ pu, $X_0 = j.05$ pu, $Z_n = j.015$ pu.

G_2: 25 MVA, 6.6 KV, $X_1 = X_2 = j.12$ pu, $X_0 = j.05$ pu, $Z_n = j.015$ pu.

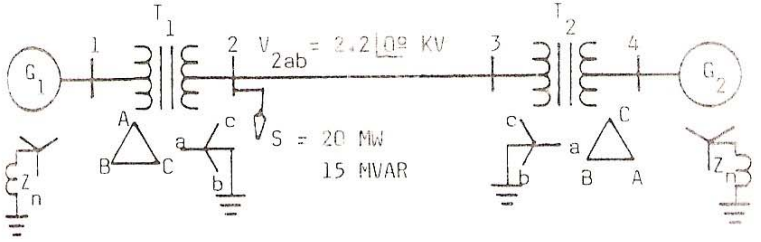
T_1: 30 MVA, 7.2 Y - 2.5 Δ KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu.

T_2: 20 MVA, 7.5 Y - 2.6 Δ KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu.

LINEA 2-3: $X_1 = X_2 = j.06\ \Omega$ $X_0 = j.10\ \Omega$

Tomar como base los valores del generador G_1 y dar los resultados en voltios, amperios, MW y MVA, usando las componentes simétricas y los valores por unidad. En la barra 2: $V_{ab} = 2.2\angle 0°$ KV. En la barra 3: $V_{ab} = 2.35\angle 6.2°$ KV.

a) Escribir los diagramas de secuencia.
b) Calcular la corriente de cada fase en la carga en la línea y en los generadores.
c) Calcular los voltajes de línea en las barras 1 y 4.
d) Calcular la potencia que suministra cada generador.



CAPITULO VIII

FALLAS ASIMETRICAS

1. INTRODUCCION

La mayoría de las fallas que ocurren en los sistemas de potencia son fallas asimétricas, las cuales son fallas de línea a tierra, fallas de línea a línea y fallas de línea a línea y tierra. Todas estas fallas producen corrientes asimétricas, por lo que es muy conveniente usar en el análisis el método de las componentes simétricas. En este Capítulo se conseguirán primero los modelos de impedancias de secuencia del sistema vistos desde el punto de la falla y dependiendo del tipo de falla, dichos modelos se conectarán en ciertas y determinadas formas, calculándose circuitalmente las corrientes y voltajes de secuencia del cortocircuito y en cada parte del sistema, con lo cual posteriormente se calculan las cantidades reales. También se considera la posibilidad de que existan o no corrientes de prefalla y que las fallas sean a través de impedancias. Por último se extiende la idea de las fallas a través de impedancias para calcular las corrientes y voltajes con cargas asimétricas.

2.— FALLA DE LINEA A TIERRA

Supongamos a un sistema trifásico actuando en una condición de voltajes y cargas balanceadas y que tiene un cortocircuito de línea a tierra en la fase a de cualquier parte del sistema, tal como se indica en la figura 8.1.

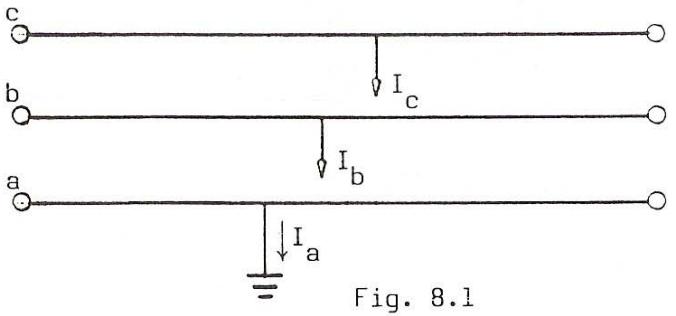


Fig. 8.1

Los diagramas de secuencia vistos desde el punto de la falla se enseñan en la figura 8.2 en donde V_f es el voltaje de prefalla en la fase a y Z_1, Z_2, Z_0, son las impedancias de secuencia vistas desde el mismo punto.

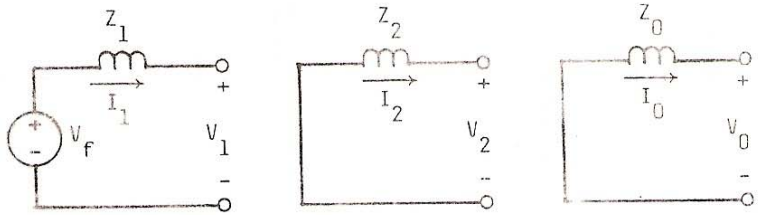


Fig. 8.2

Las relaciones entre los voltajes de secuencia y las corrientes de secuencia son

$$V_1 = V_f - Z_1 I_1$$

$$V_2 = - Z_2 I_2 \qquad 8.1$$

$$V_0 = - Z_0 I_0$$

o matricialmente

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_f \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad 8.2$$

La relación entre las componentes de corrientes de fase y corrientes de secuencia es

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \qquad 8.3$$

Además, las condiciones para la falla de línea a tierra son

$$V_a = 0 \qquad I_b = I_c = 0 \qquad 8.4$$

Aplicando estas condiciones a las relaciones de la ecuación 8.3 se tiene

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 8.5$$

de donde

$$I_0 = I_1 = I_2 = \frac{1}{3} I_a$$

ó

$$I_a = 3I_0 = 3I_1 = 3I_2 \qquad 8.6$$

Además

$$V_a = V_0 + V_1 + V_2 = -Z_0 I_0 + V_f - Z_1 I_1 - Z_2 I_2$$

$$= V_f - (Z_0 + Z_1 + Z_2) I_0 = 0 \qquad 8.7$$

ó

$$I_0 = I_1 = I_2 = \frac{V_f}{Z_0 + Z_1 + Z_2} \qquad 8.8$$

La corriente de falla en todas las fases es

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3I_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 8.9$$

De manera que se puedan cumplir las condiciones de corrientes y voltajes de secuencia, resultantes de la falla de línea a tierra, es decir

$$I_0 = I_1 = I_2 \qquad y \qquad V_0 + V_1 + V_2 = 0$$

los tres diagramas de secuencia de la figura 8.2 deben quedar conectados en serie y en circuito cerrado, tal como se indica en la figura 8.3.

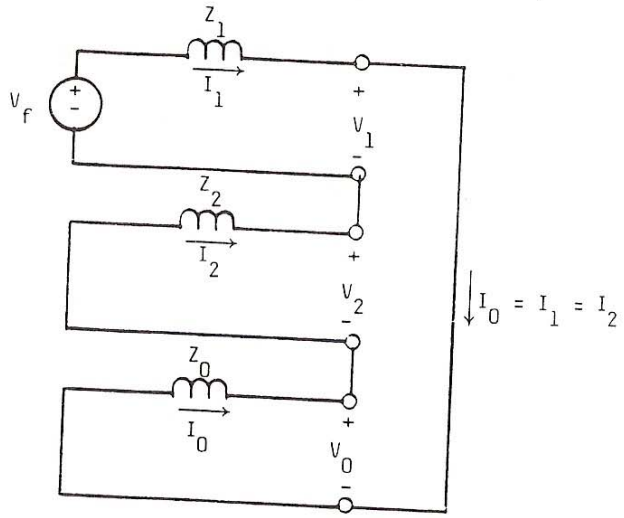


Fig. 8.3

Las corrientes y voltajes reales en cualquier parte del sistema se consiguen calculando en los respectivos diagramas de secuencia y a partir de las corrientes de secuencia en las fallas, las corrientes y voltajes de secuencia en esa parte y aplicando luego las relaciones

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad 8.10$$

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad 8.11$$

EJEMPLO 1

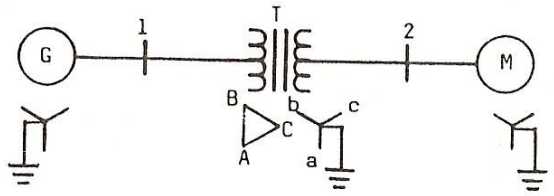
Un generador se conecta a un motor sincrónico a través de un transformador, tal como se indica en la figura siguiente. Las reactancias de secuencia son

G: $X_1 = j.15$ pu, $X_2 = j.20$ pu, $X_0 = j.5$ pu

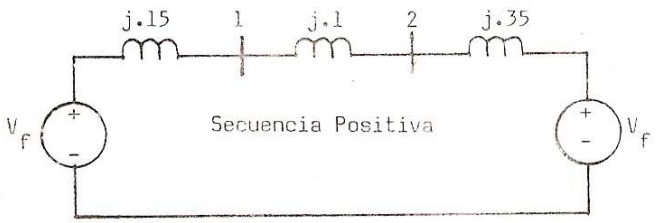
T: $X_1 = X_2 = X_0 = j.1$ pu.

M: $X_1 = j.35$ pu, $X_2 = j.45$ pu, $X_0 = j.8$ pu.

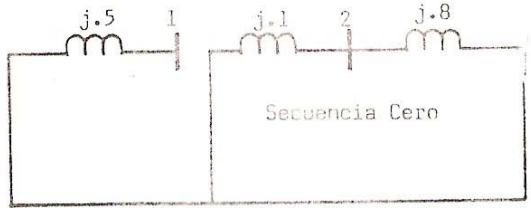
En los terminales del motor se produce un cortocircuito de línea a tierra en la fase a cuando el voltaje en la fase a de esos terminales es $.9 \lfloor 0°$ pu. Despreciándo las corrientes de prefalla, calcule las corrientes de fase en la falla y en cada parte del sistema.



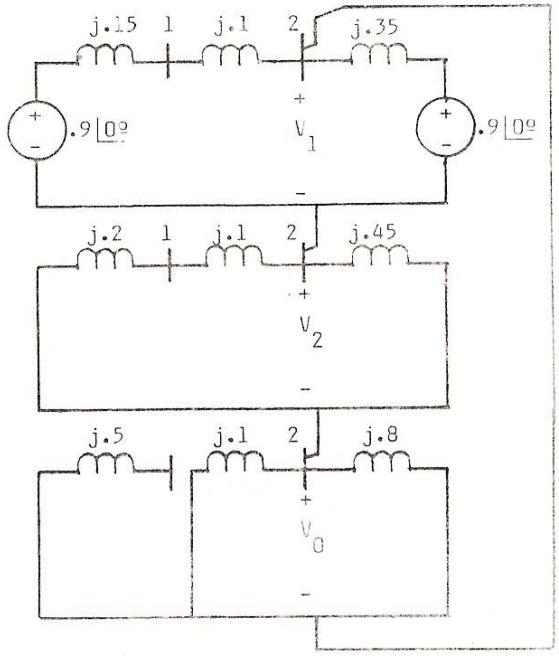
Los diagramas de impedancias de secuencia se enseñan en la figura siguiente.







Al ocurrir un cortocircuito de línea a tierra en los terminales del motor, se tiene el diagrama de la figura siguiente



El equivalente Thevenin de la figura anterior se enseña en la figura siguiente en donde las impedancias son

$$Z_1 = \frac{j.35 \times .25}{.60} = j.146$$

$$Z_2 = \frac{j.45 \times .30}{.75} = j.180$$

$$Z_0 = \frac{j.8 \times .1}{.9} = j.089$$

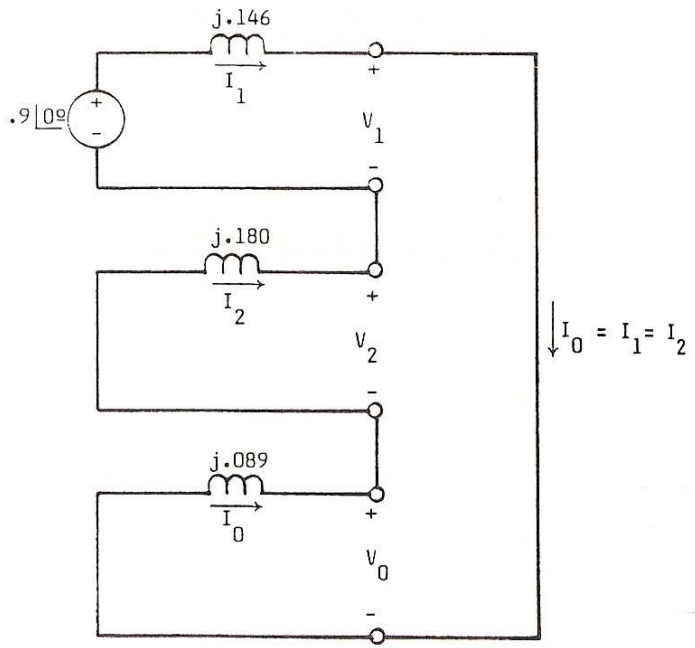
Las corrientes de secuencia son en el punto de falla

$$I_0 = I_1 = I_2 = \frac{.9 + j.0}{j.146 + j.180 + j.089} = -j2.169 \text{ pu.}$$

Las corrientes de fase en las fallas son

$$I_a = 3I_0 = 3I_1 = 3I_2 = 3 \times (-j2.169) = -j6.506 \text{ pu.}$$

$$I_b = I_c = 0$$



Los voltajes de secuencia en el punto de la falla son

$$V_1 = .9 + j.0 - j.146 \times (-j2.169) = .583 + j0.0$$

$$V_2 = - j.180 \times (-j2.169) = -.390 + j0.0$$

$$V_0 = - j.089 \times (-j2.169) = -.193 + j0.0$$

Los voltajes de fase en el punto de la falla son

$$V_a = V_0 + V_1 + V_2 = -.193 - .390 + .583 = 0.0 + j0.0$$

$$V_b = V_0 + a^2V_1 + aV_2 = .193|\underline{180º} + .583|\underline{240º}$$
$$+ .390|\underline{300º} = .891|\underline{-108.928º} = -.289 - j.843$$

$$V_c = V_0 + aV_1 + a^2V_2 = .193|\underline{180º} + .583|\underline{120º}$$
$$+ .390|\underline{60º} = .891|\underline{108.928º} = -.289 + j.843$$

$$V_{ab} = \frac{V_a - V_b}{\sqrt{3}} = \frac{.289 + j.843}{\sqrt{3}} = .515|\underline{71.077º}$$

$$V_{bc} = \frac{V_b - V_c}{\sqrt{3}} = \frac{-j1.686}{\sqrt{3}} = .973|\underline{270º}$$

$$V_{ca} = \frac{V_c - V_a}{\sqrt{3}} = \frac{-.289 + j.843}{\sqrt{3}} = .515|\underline{108.929º}$$

Las corrientes de secuencia dentro del sistema debido a la falla se calculan por divisor de corrientes a partir de las corrientes de secuencia en la falla.

Las corrientes de secuencia y de fase en el motor son

$$I_1 = -j2.169 \times \frac{.25}{.60} = -j.904$$

$$I_2 = -j2.169 \times \frac{.30}{.75} = -j.868$$

$$I_0 = -j2.169 \times \frac{.10}{.90} = -j.241$$

$$I_a = -j.241 - j.904 - j.868 = -j2.013 = 2.013|\underline{-90º}$$

$$I_b = .241|\underline{-90º} + .904|\underline{150º} + .868|\underline{30º} = .646|\underline{92.752º}$$
$$= -.031 + j.645$$

$$I_c = .241|\underline{-90º} + .904|\underline{30º} + .868|\underline{150º} = .646|\underline{87.248º}$$
$$= .031 + j.645$$

Las corrientes de secuencia y de fase que salen del transformador son

$$I_1 = -j2.169 \times \frac{.35}{.60} = -j1.265$$

$$I_2 = -j2.169 \times \frac{.45}{.75} = -j1.301$$

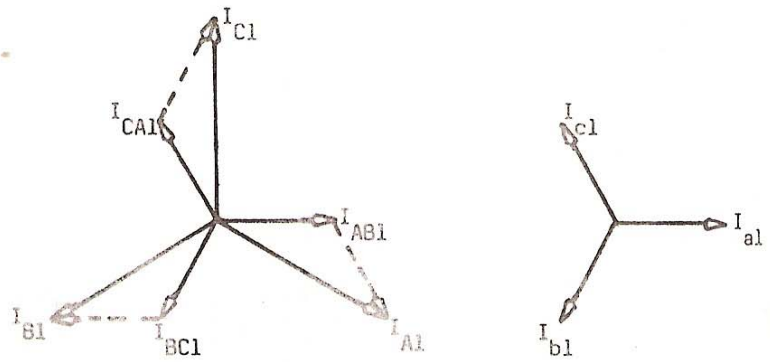
$$I_0 = -j2.169 \times \frac{.80}{.90} = -j1.928$$

$$I_a = -j1.928 - j1.265 - j1.301 = -j4.494 = 4.494\angle -90^\circ$$

$$I_b = 1.928\angle -90^\circ + 1.265\angle 150^\circ + 1.301\angle 30^\circ$$
$$= .646\angle -87.248^\circ = .031 - j.645$$

$$I_c = 1.928\angle -90^\circ + 1.265\angle 30^\circ + 1.301\angle 150^\circ$$
$$= .646\angle 92.752^\circ = -.031 - j.645$$

La relación entre las corrientes de secuencia que entran y salen del transformador es



$$I_{A0} = 0.0 + j0.0$$

$$I_{A1} = I_{a1}\angle -30^\circ = 1.265\angle -120^\circ$$

$$I_{A2} = I_{a2}\angle 30^\circ = 1.301\angle -60^\circ$$

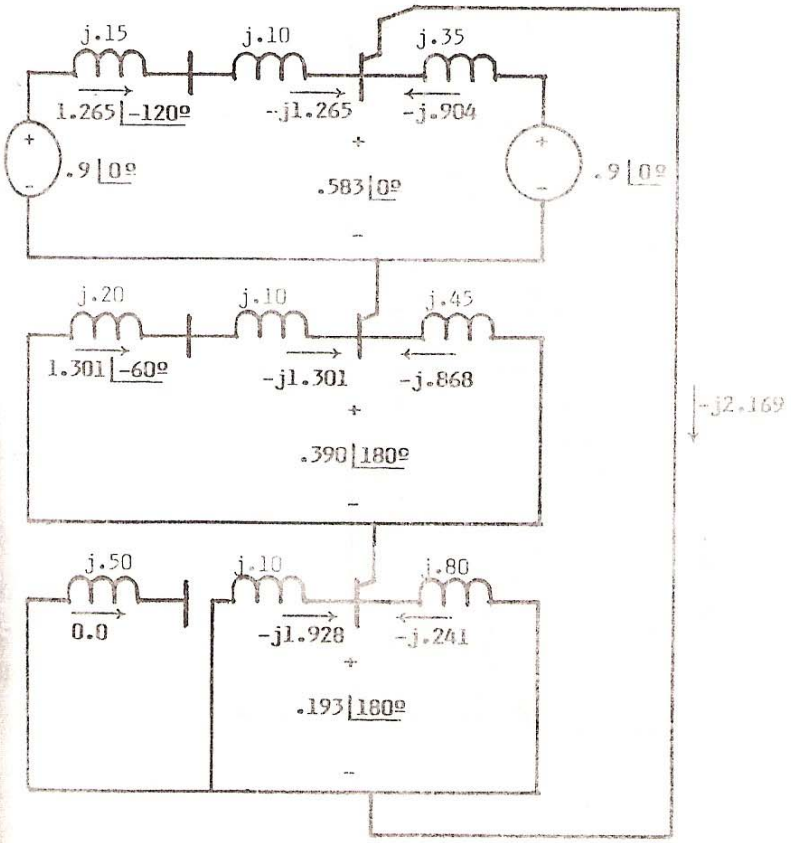
Las corrientes de fase que salen del generador y entran al transformador son entonces

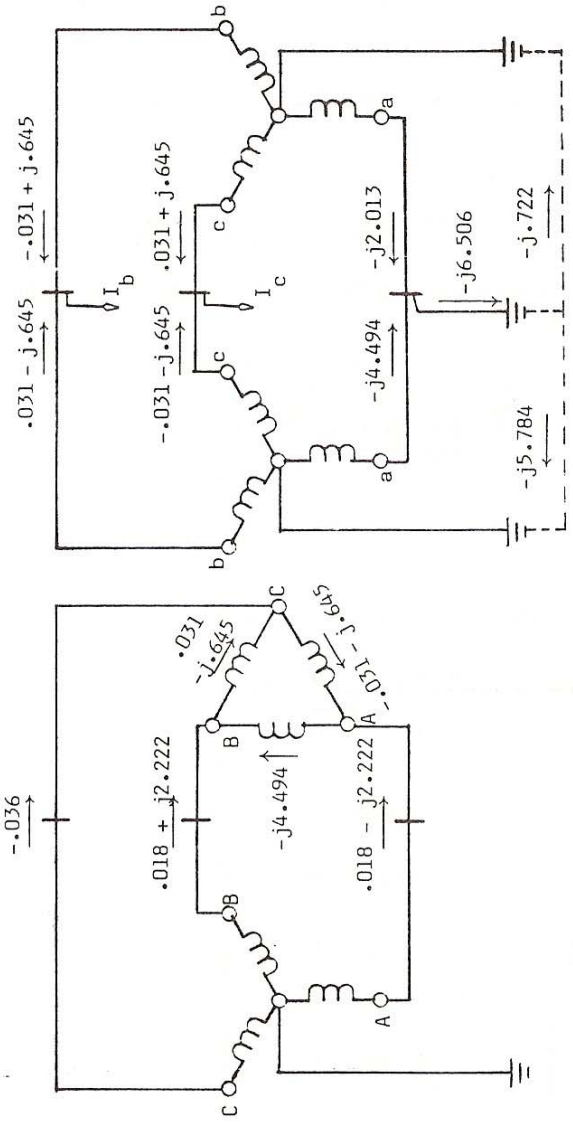
$$I_A = 1.265\angle -120^\circ + 1.301\angle -60^\circ = 2.222\angle -89.536^\circ$$
$$= .0180 - j2.222$$

$$I_B = 1.265\angle 120^\circ + 1.301\angle 60^\circ = 2.222\angle 89.536^\circ$$
$$= .0180 + j2.222$$

$$I_C = 1.265\angle 0^\circ + 1.301\angle 180^\circ = .0360\angle 180^\circ = -.0360$$

Las corrientes de secuencia y de fase en las diferentes partes se enseñan en las figuras siguientes.





3. FALLA DE LINEA A LINEA

Supongamos ahora que ocurre un cortocircuito entre las líneas b y c en cualquier parte del sistema balanceado, tal como se enseña en la figura 8.4.

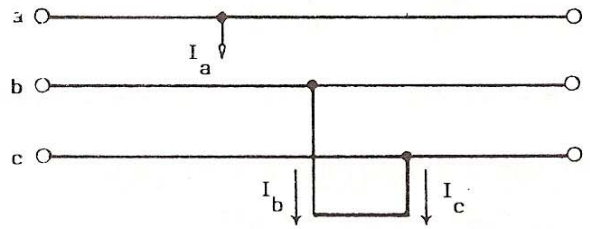


Fig. 8.4

Las condiciones de fallas son

$$I_a = 0 \qquad I_b = -I_c \qquad V_b = V_c \qquad 8.11$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ I_b \\ -I_b \end{bmatrix} \qquad 8.12$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_b \end{bmatrix} \qquad 8.13$$

De la relación 8.12 se obtiene que

$$I_0 = \frac{1}{3}(0 + I_b - I_b) = 0$$

lo cual significa que V_0 también es cero, ya que Z_0 existe.

Además de la relación 8.12 se tiene que

$$I_1 = \frac{1}{3}(a - a^2)I_b = j\, I_b/\sqrt{3} \qquad 8.14$$

$$I_2 = \frac{1}{3}(a^2 - a)I_b = -j\, I_b/\sqrt{3} = -I_1 \qquad 8.15$$

por lo que

$$I_b = -j\sqrt{3}\, I_1 = j\sqrt{3}\, I_2 \qquad 8.16$$

$$I_c = j\sqrt{3}\, I_1 = -j\sqrt{3}\, I_2 \qquad 8.17$$

Por otra parte de la relación 8.13 se tiene

$$V_0 = \frac{1}{3}(V_a + V_b + V_b) = \frac{1}{3}(V_a + 2V_b) = 0$$

de donde

$$V_a = -2V_b \qquad 8.18$$

$$V_1 = \frac{1}{3}[V_a + (a + a^2)V_b] = \frac{1}{3}(V_a - V_b) = \frac{1}{\sqrt{3}}V_{ab} \qquad 8.19$$

$$V_2 = \frac{1}{3}[V_a + (a^2 + a)V_b] = \frac{1}{3}(V_a - V_b) = \frac{1}{\sqrt{3}}V_{ab} \qquad 8.20$$

Concluyendo entonces que

$$V_1 = V_2 \qquad 8.21$$

$$V_{ab} = \sqrt{3}\, V_1 = \sqrt{3}\, V_2 \qquad 8.22$$

Poniendo entonces estos resultados en la ecuación 8.2 se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_f \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

De donde

$$V_1 = V_f - Z_1 I_1 \qquad \text{y} \qquad V_1 = Z_2 I_1 \qquad 8.23$$

Restando ambas expresiones se tiene

$$V_1 - V_1 = V_f - Z_1 I_1 - Z_2 I_1 = 0$$

y finalmente

$$I_1 = \frac{V_f}{Z_1 + Z_2} \qquad 8.24$$

De manera que se puedan cumplir todas las condiciones anteriores, es decir

$$I_0 = 0, \quad V_0 = 0, \quad I_1 = -I_2, \quad V_1 = V_2, \quad I_1 = \frac{V_f}{Z_1 + Z_2}$$

los diagramas de secuencia positiva y negativa deben estar conectados en paralelo, sin incluir el diagrama de secuencia cero, tal como se indica en la figura 8.5.

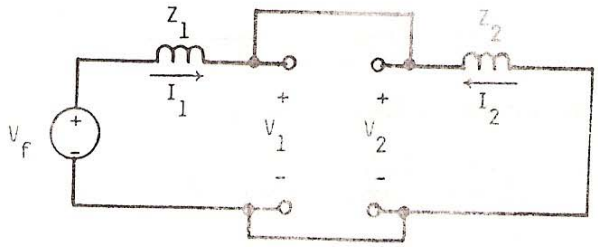
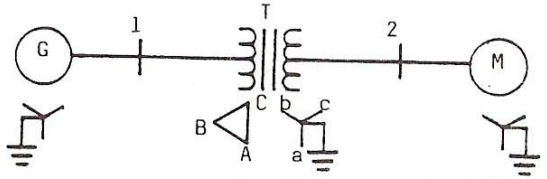


Fig. 8.5

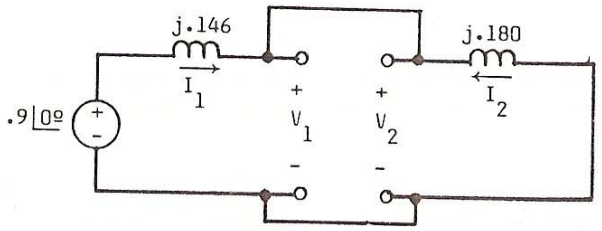
Conociendo el voltaje de prefalla en la fase a y las impedancias de secuencia Z_1 y Z_2 vistas desde el punto de la falla, se pueden calcular las corrientes de secuencia I_1 e I_2. Con esto se pueden determinar los voltajes de secuencia V_1 y V_2. Aplicando las relaciones entre las corrientes y voltajes de secuencia con las corrientes y voltajes de fases respectivamente, se calculan las corrientes y voltajes de fase en el punto de la falla. Las corrientes y voltajes de secuencia en cualquier parte del sistema se consiguen, al igual que en la falla de línea a tierra, calculando en los diagramas de secuencia los voltajes y corrientes de secuencia en esa parte y luego se aplican las relaciones para encontrar los valores de fase.

EJEMPLO 2

Resolver el Ejemplo 1 para una falla de línea a línea en los terminales del motor, si el transformador tiene las conexiones y marcaje indicado en la figura siguiente.



Conectando en paralelo a los diagramas de secuencia positiva y negativa de la figura 8.5 se tiene



y las corrientes de secuencia y de fase en la falla son

$$I_1 = \frac{.9 + j0.0}{j.146 + j.180} = -j2.761$$

$$I_2 = -I_1 = j2.761 \qquad I_0 = 0.0$$

$$I_a = 0.0 - j2.761 + j2.761 = 0.0$$

$$I_b = 2.761\angle 150º + 2.761\angle 210º = 4.782\angle 180º = -4.782$$

$$I_c = 2.761\angle 30º + 2.761\angle 330º = 4.782\angle 0.0º = 4.782$$

Los voltajes de secuencia y de fase en el punto de falla son

$$V_1 = .9 + j0.0 - j.146 \times (-j2.761) = .497$$

$$V_2 = V_1 = -j.180 \times j2.761 = .497$$

$$V_0 = 0.0$$

$$V_a = V_0 + V_1 + V_2 = 0.0 + .497 + .497 = .994$$

$$V_b = V_0 + a^2V_1 + aV_2 = (a^2 + a)V_1 = -V_1 = -.497$$

$$V_c = V_b = -.497$$

$$V_{ab} = \frac{V_a - V_b}{\sqrt{3}} = \frac{.994 + .497}{\sqrt{3}} = .861$$

o también

$$V_{ab} = \sqrt{3}\, V_1 = \sqrt{3} \times .497 = .861$$

$$V_{bc} = \frac{V_b - V_c}{\sqrt{3}} = \frac{-.497 + .497}{\sqrt{3}} = 0.0$$

$$V_{ca} = \frac{V_c - V_a}{\sqrt{3}} = \frac{-.497 - .994}{\sqrt{3}} = -.861$$

Las corrientes de secuencia y de fase en el motor son

$$I_1 = -j2.761 \times \frac{.25}{.60} = -j1.150 = 1.150\angle -90º$$

$$I_2 = j2.761 \times \frac{.30}{.75} = j1.104 = 1.104\angle 90^\circ$$

$$I_a = 1.150\angle -90^\circ + 1.104\angle 90^\circ = .046\angle -90^\circ = -j.046$$

$$I_b = 1.150\angle 150^\circ + 1.104\angle 210^\circ = 1.952\angle 179.325^\circ$$

$$= -1.952 + j.023$$

$$I_c = 1.150\angle 30^\circ + 1.104\angle 330^\circ = 1.952\angle 0.675^\circ$$

$$= 1.952 + j.023$$

Las corrientes de secuencia y de fase que salen del transformador son

$$I_1 = -j2.761 \times \frac{.35}{.60} = -j1.611 = 1.611\angle -90^\circ$$

$$I_2 = j2.761 \times \frac{.45}{.75} = j1.657 = 1.657\angle 90^\circ$$

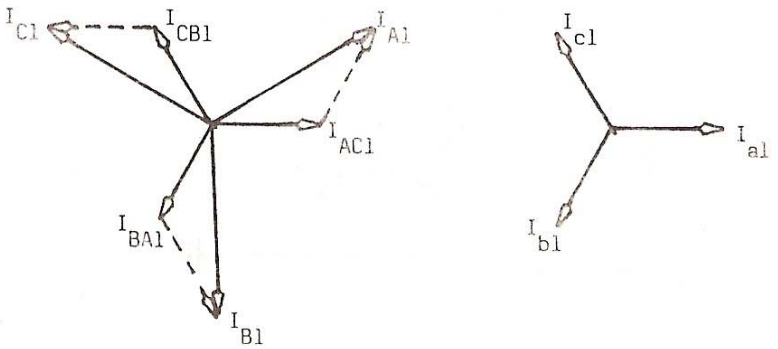
$$I_a = 1.611\angle -90^\circ + 1.657\angle 90^\circ = .046\angle 90^\circ = j.046$$

$$I_b = 1.611\angle 150^\circ + 1.657\angle 210^\circ = 2.830\angle -179.534^\circ$$

$$= -2.830 - j.023$$

$$I_c = 1.611\angle 30^\circ + 1.657\angle 330^\circ = 2.830 - j.023$$

La relación entre las corrientes de secuencia que entran y salen del transformador es



$$I_{A0} = 0.0 + j0.0$$

$$I_{A1} = I_{a1}\angle 30^\circ = 1.611\angle -60^\circ$$

$$I_{A2} = I_{a2}\angle -30^\circ = 1.657\angle 60^\circ$$

Las corrientes de fase que salen del generador y entran al transformador son entonces

$$I_A = 1.611\angle -60^\circ + 1.567\angle 60^\circ = 1.635\angle 1.402^\circ$$

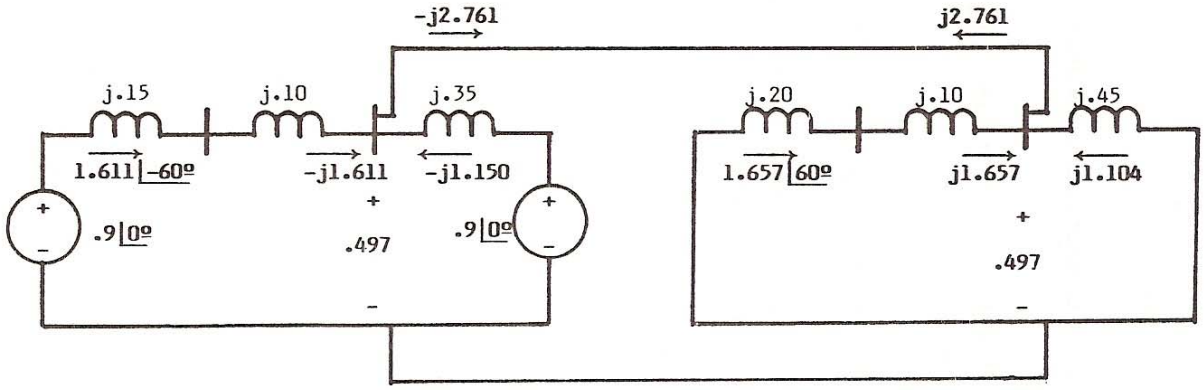
$$= 1.635 + j.040$$

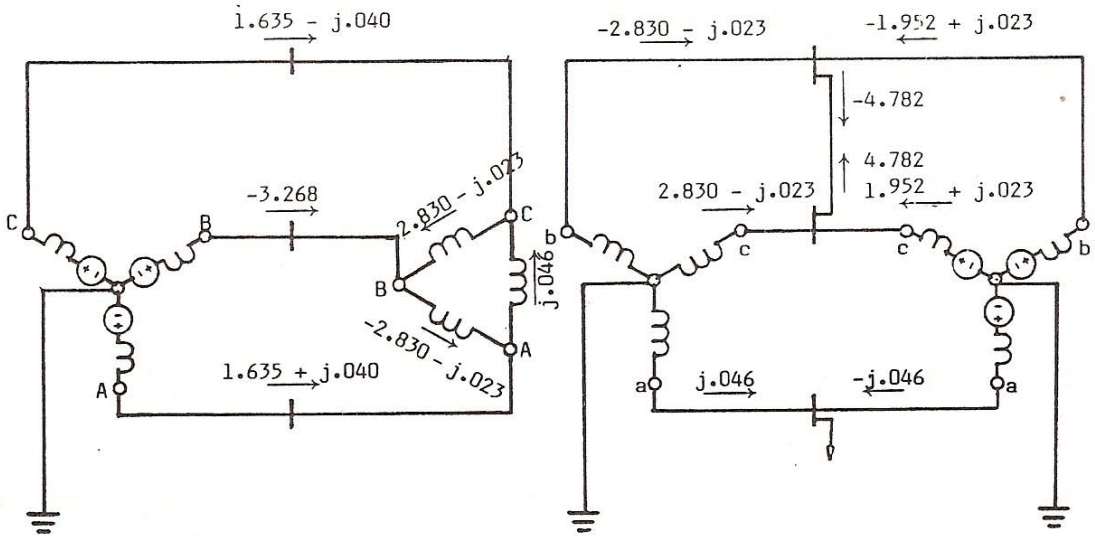
$$I_B = 1.611\angle 180^\circ + 1.657\angle 180^\circ = 3.268\angle 180^\circ = -3.268$$

$$I_C = 1.611\angle 60^\circ + 1.657\angle 300^\circ = 1.635\angle -1.402^\circ$$

$$= 1.635 - j.040$$

Las corrientes de secuencia y de fase en las diferentes partes del sistema se enseñan en las figuras siguientes.


-j2.761
j2.761
j.15
j.10
j.35
j.20
j.10
j.45
1.611⌊-60º
-j1.611
-j1.150
1.657⌊60º
j1.657
j1.104
.9⌊0º
.497
.9⌊0º
.497


1.635 - j.040
-2.830 - j.023
-1.952 + j.023
-4.782
4.782
-3.268
2.830 - j.023
2.830 - j.023
1.952 + j.023
j.046
-2.830 - j.023
1.635 + j.040
j.046
-j.046

4. FALLA DE LINEA A LINEA Y TIERRA

Supongamos de nuevo que ocurre un cortocircuito entre las líneas b y c y tierra en cualquier parte del sistema trifásico balanceado, tal como se enseña en la figura 8.6.

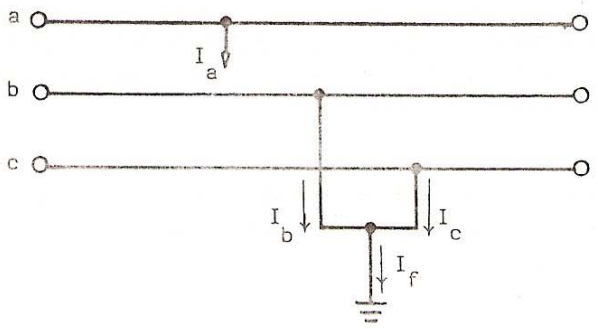


Fig. 8.6

Las condiciones de esta falla son

$$I_a = 0, \qquad V_b = V_c = 0 \tag{8.25}$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.26}$$

de donde

$$V_0 = V_1 = V_2 = \frac{1}{3}V_a \tag{8.27}$$

Además

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_f \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{8.28}$$

de donde

$$V_0 = V_1 = V_2 = -Z_0I_0 = V_f - Z_1I_1 = -Z_2I_2 \tag{8.29}$$

Substituyendo las relaciones de 8.29 en la ecuación 8.28 se tiene

$$\begin{bmatrix} V_f - Z_1I_1 \\ V_f - Z_1I_1 \\ V_f - Z_1I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_f \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Ordenando

$$\begin{bmatrix} V_f - Z_1I_1 \\ -Z_1I_1 \\ V_f - Z_1I_1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Despejando se tiene

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1/Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/Z_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_f - Z_1I_1 \\ -Z_1I_1 \\ V_f - Z_1I_1 \end{bmatrix} \tag{8.30}$$

pero

$$I_a = I_0 + I_1 + I_2$$

con lo cual

$$-\frac{V_f - Z_1 I_1}{Z_0} + \frac{Z_1 I_1}{Z_1} - \frac{V_f - Z_1 I_1}{Z_2} = 0$$

Reagrupando

$$\frac{Z_1 Z_2 + Z_0 Z_2 + Z_0 Z_1}{Z_0 Z_2} I_1 = \frac{Z_0 + Z_2}{Z_0 Z_2} V_f$$

y despejando

$$I_1 = \frac{V_f (Z_0 + Z_2)}{Z_1 Z_2 + Z_0 Z_2 + Z_0 Z_1} = \frac{V_f}{Z_1 + Z_0 Z_2/(Z_0 + Z_2)} \qquad 8.31$$

Para que se puedan cumplir las condiciones de

$$V_0 = V_1 = V_2 \qquad \text{e} \qquad I_1 = \frac{V_f}{Z_1 + Z_0 Z_2/(Z_0 + Z_2)}$$

los diagramas de secuencia positiva, negativa y cero deben estar conectados en paralelo, tal como se enseña en la figura 8.7.

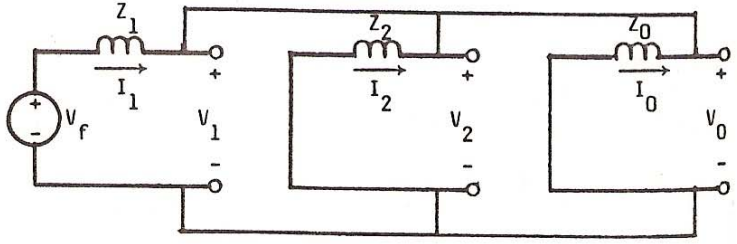
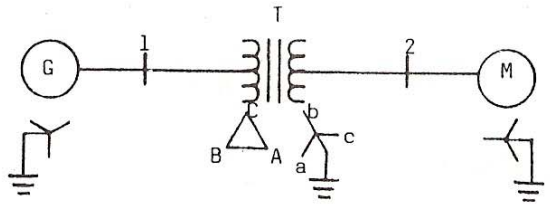


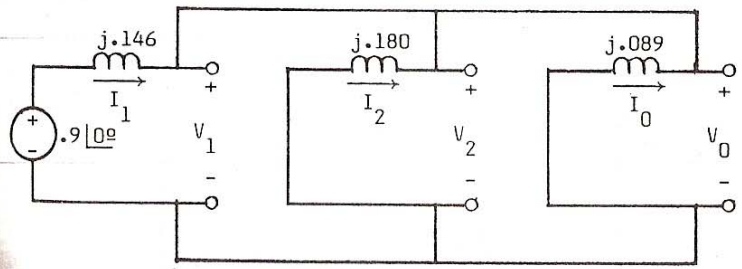
Fig. 8.7

Conociendo el voltaje de prefalla en la fase a, V_f, y las impedancias de secuencias Z_0, Z_1 y Z_2, se puede calcular la corriente de secuencia positiva en la falla, I_1. Con I_1 se calculan los voltajes de secuencia positiva en la falla, $V_0 = V_1 = V_2$, y con éstos se calculan las corrientes de secuencia cero y negativa en la falla, I_0 e I_2. Aplicando las relaciones entre las corrientes y voltajes de secuencia con las corrientes y voltajes de fase respectivamente, se calculan las corrientes y voltajes de fase en el punto de la falla. Las corrientes y voltajes de fase en cualquier parte dentro del sistema se calculan en la misma forma que en las fallas anteriores.

Resolver el Ejemplo 1 para una falla de línea a línea a tierra en los terminales del motor si el transformador tiene las conexiones y marcaje indicado en la figura siguiente.



Conectando en paralelo a los tres diagramas de secuencia se tiene



y las corrientes de secuencia y de fase en la falla son

$$I_1 = \frac{.9 + j0.0}{j.146 + j.180 \times .089/(.180 + .089)} = -j4.378$$

$$V_1 = .9 + j0.0 - j.146 \times (-j4.378) = .261$$

$$V_0 = V_2 = V_1 = .261$$

$$I_2 = -\frac{V_2}{Z_2} = -\frac{.261}{j.180} = j1.449$$

$$I_0 = -\frac{V_0}{Z_0} = -\frac{.261}{j.089} = j2.929$$

$$I_a = 2.929|\underline{90º} + 4.378|\underline{-90º} + 1.449|\underline{90º} = 0.0$$

$$I_b = 2.929|\underline{90º} + 4.378|\underline{150º} + 1.449|\underline{210º} = 6.691|\underline{138.95º}$$

$$= -5.046 + j4.394$$

$$I_c = 2.929|\underline{90º} + 4.378|\underline{30º} + 1.449|\underline{330º} = 6.691|\underline{41.049º}$$

$$= 5.046 + j4.394$$

$$I_f = I_b + I_c = j8.788 = 8.788|\underline{90º}$$

Los voltajes de fase en el punto de falla son

$$V_a = V_0 + V_1 + V_2 = .261 + .261 + .261 = .783|\underline{0º}$$

$$V_b = V_0 + a^2V_1 + aV_2 = (1 + a^2 + a)V_0 = 0.0$$

$$V_c = V_0 + aV_1 + a^2V_2 = (1 + a + a^2)V_0 = 0.0$$

$$V_{ab} = \frac{V_a - V_b}{\sqrt{3}} = \frac{.783 - 0.0}{\sqrt{3}} = .452|\underline{0º}$$

$$V_{bc} = \frac{V_b - V_c}{\sqrt{3}} = 0.0$$

$$V_{ca} = \frac{V_c - V_a}{\sqrt{3}} = \frac{0.0 - .783}{\sqrt{3}} = -.452 = .452|\underline{180º}$$

Las corrientes de secuencia y de fase en el motor son

$$I_1 = -j4.378 \times \frac{.25}{.60} = -j1.824 = 1.824|\underline{-90º}$$

$$I_2 = j1.449 \times \frac{.30}{.75} = j.580 = .580|\underline{90º}$$

$$I_0 = j2.929 \times \frac{.10}{.90} = j.325 = .325|\underline{90º}$$

$$I_a = .325|\underline{90º} + 1.824|\underline{-90º} + .580|\underline{90º} = .919|\underline{-90º}$$

$$= -j.919$$

$$I_b = .325|\underline{90º} + 1.824|\underline{150º} + .580|\underline{210º} = 2.287|\underline{155.54º}$$

$$= -2.082 + j.947$$

$$I_c = .325|\underline{90º} + 1.824|\underline{30º} + .580|\underline{330º} = 2.287|\underline{24.458º}$$

$$= 2.082 + j.947$$

Las corrientes de secuencia y de fase que salen del transformador son

$$I_1 = -j4.378 \times \frac{.35}{.60} = -j2.554 = 2.554|\underline{-90º}$$

$$I_2 = j1.449 \times \frac{.45}{.75} = j.869 = .869|\underline{90º}$$

$$I_0 = j2.929 \times \frac{.80}{.90} = j2.604 = 2.604|\underline{90º}$$

$$I_a = 2.604|\underline{90º} + 2.554|\underline{-90º} + .869|\underline{90º} = .919|\underline{90º}$$

$$= j.919$$

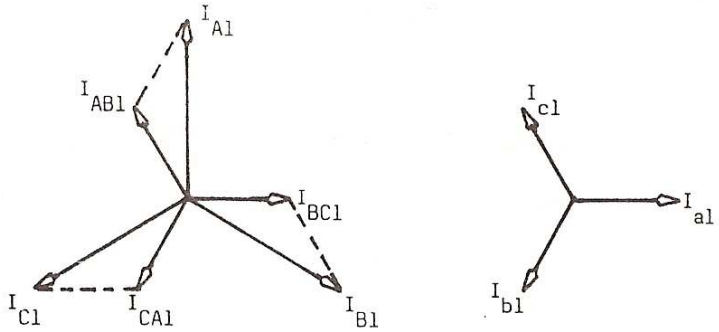
$$I_b = 2.604\angle 90º + 2.554\angle 150º + .869\angle 210º$$

$$= 4.547\angle 130.701º = -2.965 + j3.447$$

$$I_c = 2.604\angle 90º + 2.554\angle 30º + .869\angle 330º$$

$$= 4.547\angle 49.299º = 2.965 + 3.447$$

La relación entre las corrientes de secuencia que entran y salen del transformador es



$$I_{A0} = 0.0 + j0.0$$

$$I_{A1} = I_{a1}\angle 90º = 2.554\angle 0º$$

$$I_{A2} = I_{a2}\angle -90º = .869\angle 0º$$

$$I_A = 2.554\angle 0º + .869\angle 0º = 3.423\angle 0º$$

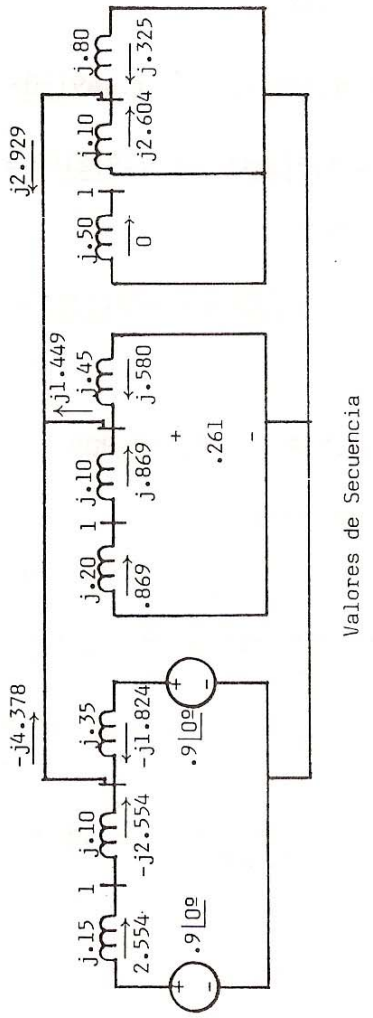
$$I_B = 2.554\angle 240º + .869\angle 120º = 2.249\angle -139.545º$$

$$= -1.712 - j1.459$$

$$I_C = 2.554\angle 120º + .869\angle 240º = 2.249\angle 139.545º$$

$$= -1.712 + j1.459$$

Las corrientes de secuencia y de fase en las diferentes partes del sistema se enseñan en las figuras siguientes



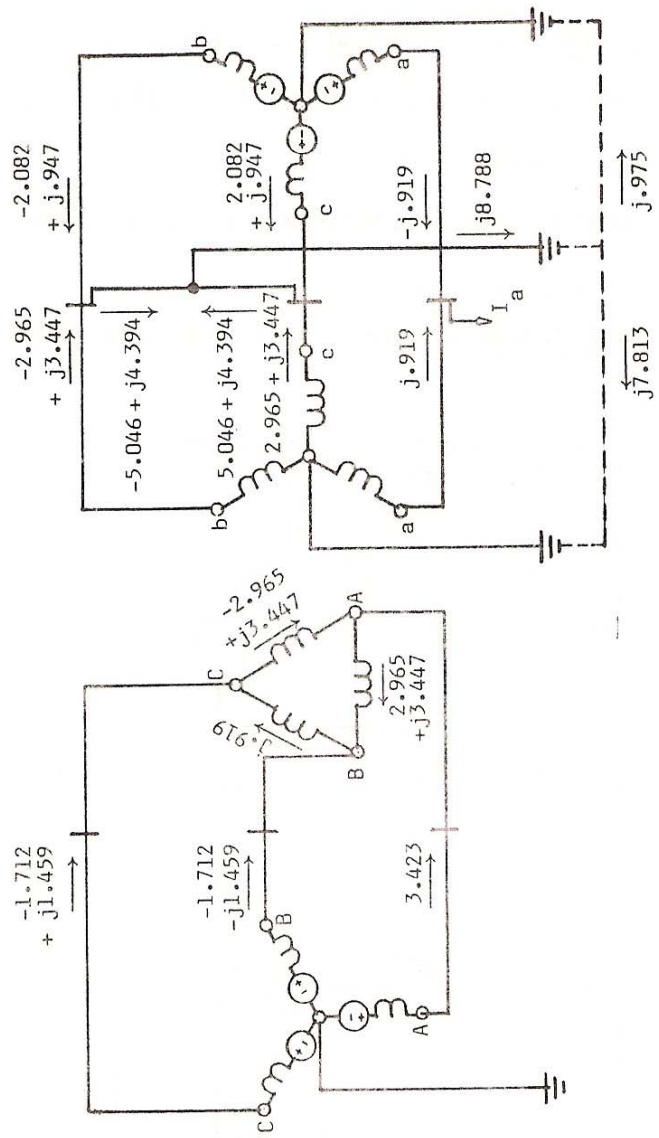


Diagrama de Fase

5. ANALISIS DE FALLAS ASIMETRICAS TOMANDO EN CUENTA LAS CORRIENTES DE PREFALLA.

En los análisis anteriores no se han tomado en cuenta las corrientes de prefalla o sea las corrientes de carga. Si estas corrientes han de tomarse en cuenta, se puede utilizar la misma metodología del Capítulo 6 para fallas simétricas, es decir, el método de superposición y el método de los voltajes detrás de las reactancias. En el método de superposición de corrientes se calculan las corrientes de secuencia en prefalla y se suman a las respectivas corrientes de secuencia de falla y con estas cantidades se calculan las corrientes de fase en las diferentes partes del sistema. En el método del voltaje detrás de las reactancias, con las corrientes de prefalla se calculan los voltajes detrás de las reactancias en los respectivos diagramas de secuencia y luego con el tipo de falla se interconectan estos diagramas y circuitalmente se calculan las corrientes de las diferentes secuencias.

Estos métodos se usarán en ejemplos posteriores y son muy sencillos de aplicar. Sinembargo, si en el sistema existen transformadores desfasados es más fácil usar el método de superposición de corrientes.

EJEMPLO 4

Resolver el Ejemplo 1 para una falla de línea a tierra si la corriente del motor antes de la falla era de $I = 1.0 \angle 36.87°$. Tomar en cuenta la corriente de prefalla.

La corriente que sale del transformador y que entra al motor antes de la falla es $I = 1.0 \angle 36.87° = .8 + j.6$.

Como las corrientes de prefalla están balanceadas se suman solamente a las corrientes de secuencia positiva de falla. Si las corrientes de carga estuvieran desbalanceadas, se calcularían sus componentes de secuencia positiva, negativa y cero y se sumarían a las componentes de secuencia positiva, negativa y cero, respectivamente, de las corrientes de falla.

Usando los resultados del Ejemplo 1, se tiene que la corriente de secuencia y de fase en el motor es

$$I_1 = -j.904 + (-.8 - j.6) = -.8 - j1.504$$

$$= 1.704 \angle -118.009°$$

$$I_2 = -j.868 = .868 \angle -90°$$

$I_0 = -j.241 = .241\angle -90º$

$I_a = .241\angle -90º + 1.704\angle -118.009º + .868\angle -90º$

$= 2.733\angle -107.023º = -.8 - j2.613$

$I_b = .241\angle -90º + 1.704\angle 121.991º + .868\angle 30º$

$= 1.645\angle 95.267º = -.151 + j1.638$

$I_c = .241\angle -90º + 1.704\angle 1.991º + .868\angle 150º$

$= .984\angle 14.841º = .951 + j.252$

Las corrientes de secuencia y de fase que salen del transformador son

$I_1 = -j1.265 + .8 + j.6 = .8 - j.665 = 1.040\angle -39.735º$

$I_2 = -j1.301 = 1.301\angle -90º$

$I_0 = -j1.928 = 1.928\angle -90º$

$I_a = 1.928\angle -90º + 1.040\angle -39.735º + 1.301\angle -90º$

$= 3.975\angle -78.390º = .8 - j3.894$

$I_b = 1.928\angle -90º + 1.040\angle 200.265º + 1.301\angle 30º$

$= 1.644\angle -84.730º = .151 - j1.637$

$I_c = 1.928\angle -90º + 1.040\angle 80.265º + 1.301\angle 150º$

$= .984\angle -165.159º = -.951 - j.252$

Las corrientes de secuencia y de fase que salen del generador y que entran al transformador son

$I_{A0} = 0.0$

$I_{A1} = I_{a1}\angle -30º = 1.040\angle -69.735º = .360 - j.976$

$I_{A2} = I_{a2}\angle 30º = 1.301\angle -60º = .651 - j1.127$

$I_A = 1.040\angle -69.735º + 1.301\angle -60º = 2.333\angle -64.332º$

$= 1.011 - j2.103$

$I_B = 1.040\angle 170.265º + 1.301\angle 60º = 1.355\angle 106.039º$

$= -.375 + j1.303$

$I_C = 1.040\angle 50.265º + 1.301\angle 180º = 1.022\angle 128.501º$

$= -.635 + j.800$

"Las corrientes de secuencia y de fase en las diferentes partes del sistema se enseñan en las figuras siguientes".

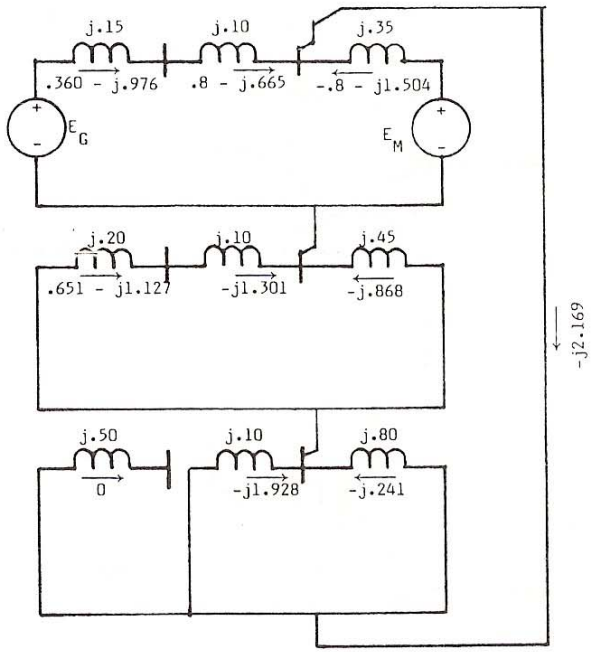


Diagrama de Secuencia

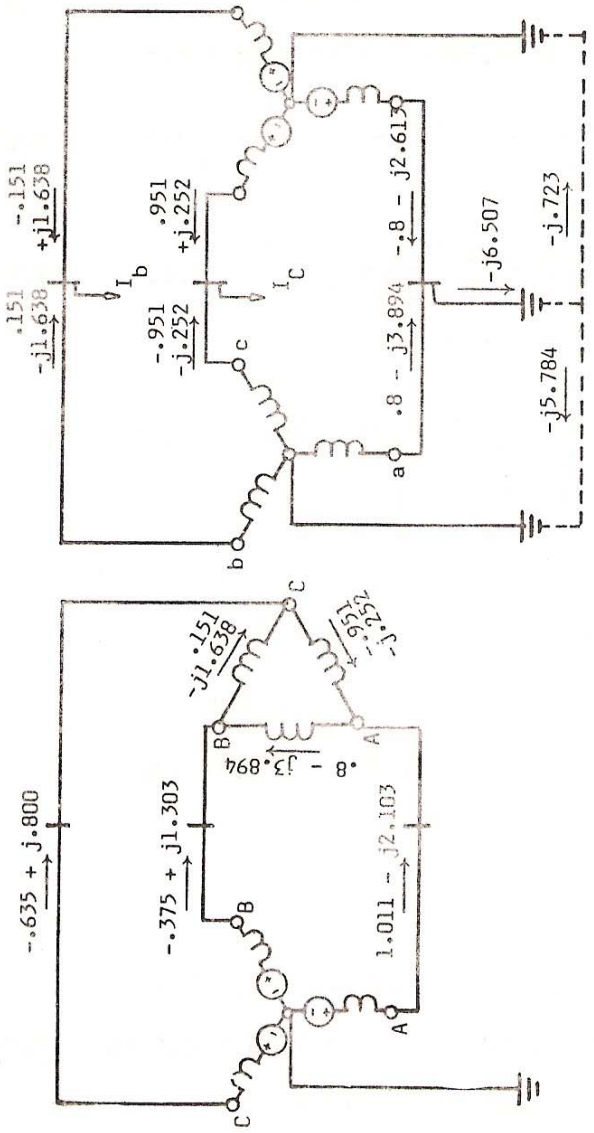


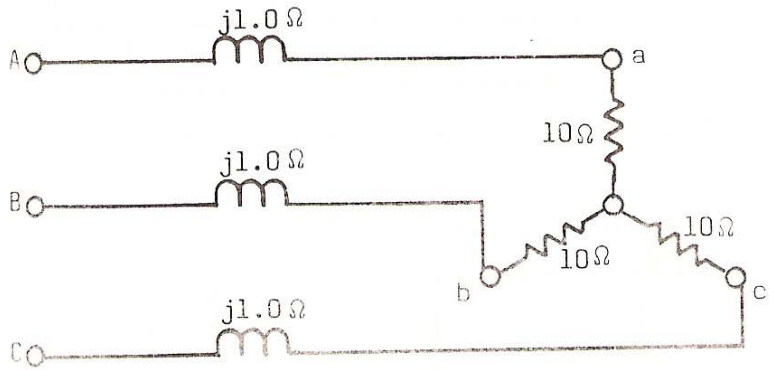
Diagrama de Fase

EJEMPLO 5

Una carga trifásica formada por tres resistencias de 10 ohmios cada una conectadas en estrella está alimentada por voltajes trifásicos balanceados de 220 voltios a través de una línea de transmisión, como lo indica la figura. Si ocurre un cortocircuito de línea a línea en los terminales de la carga, calcular

a) Las corrientes de cortocircuito.
b) Las corrientes en la línea y en la carga debido al cortocircuito.
c) Los voltajes en la carga durante el cortocircuito.

Trabaje en valores por unidad tomando valores base de 220V, 5 KVA. Tome el voltaje V_{AB} como referencia ($V_{AB} = 220\angle 0°$) y use el método del voltaje detrás de la reactancia.



Los valores base son

$V_{bLL} = 220$ V $\qquad V_{bLN} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127.017$ V

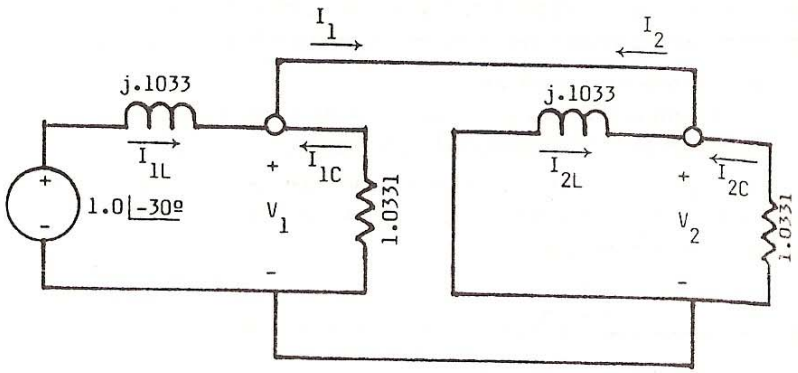
$$I_b = \frac{5000}{\sqrt{3} \times 220} = 13.122 \text{ A}$$

$$Z_b = \frac{(220)^2}{5000} = 9.680 \text{ ohmios}$$

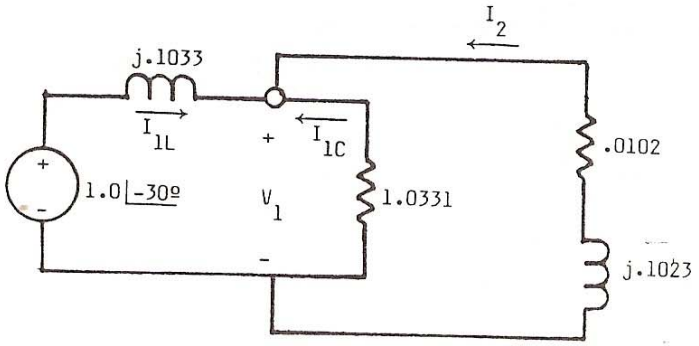
$$Z_L = \frac{j1.0}{9.68} = j.1033 \text{ pu} \qquad Z_C = \frac{10.0}{9.68} = 1.0331 \text{ pu}$$

$$V_{AB} = \frac{220}{220}\angle 0º = 1.0\angle 0º \text{ pu} \qquad V_A = V_{AB}\angle -30º = 1.0\angle -30º \text{ pu}$$

Los diagramas de secuencia positiva y negativa para el cortocircuito de línea a línea son



Resolviendo el paralelo del diagrama de secuencia negativa se tiene



Resolviendo la red por el método de las mallas

$$\begin{bmatrix} 1.0\angle -30^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0331 + j.1033 & 1.0331 \\ 1.0331 & 1.0433 + j.1023 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{1L} \\ I_2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$I_{1L} = -2.0316 - j4.4710 = 4.9109\angle -114.4363^\circ$$

$$I_2 = 2.4225 + j4.1898 = 4.8397\angle 59.9636^\circ$$

$$I_{1C} = -I_{1L} - I_2 = -.3909 + j.2812 = .4815\angle 144.2701^\circ$$

y por divisor de corrientes

$$I_{2L} = \frac{1.0331 \times (2.4225 + j4.1898)}{1.0331 + j.1033} = 2.8133 + j3.9085$$

$$= 4.8157\angle 54.2539^\circ$$

$$I_{2C} = \frac{j.1033 \times (2.4225 + j4.1898)}{1.0331 + j.1033} = -.3909 + j.2812$$

$$= .4815\angle 144.2701^\circ = I_{1C}$$

Además

$$V_1 = V_2 = -1.0331 \times (-.3909 + j.2812)$$

$$= .4038 - j.2905 = .4975\angle -35.7299^\circ$$

$$I_1 = -I_2 = -2.4225 - j4.1898 = 4.8397\angle -120.0361^\circ$$

Las corrientes de cortocircuito son

$$I_a = I_1 + I_2 = 0$$

$$I_b = a^2 I_1 + a I_2 = (a^2 - a) I_1 = \sqrt{3}\, I_1 \angle -90^\circ$$

$$= 8.3826\angle -210.0361^\circ \text{ pu} = 13.1216 \times 8.3826\angle -210.03$$

$$= 109.9938\angle -210.0361^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_c = a I_1 + a^2 I_2 = (a - a^2) I_1 = -I_b$$

$$= 8.3826\angle -30.0361^\circ \text{ pu} = 109.9938\angle -30.0361^\circ \text{ Amps.}$$

Las corrientes en la línea son

$$I_a = I_{1L} + I_{2L} = 4.9109|\underline{-114.4363º} + 4.8157|\underline{54.2539º}$$
$$= .9630|\underline{-35.7299º} \text{ pu} = 12.6361|\underline{-35.7299º} \text{ Amperios}$$

$$I_b = 4.9109|\underline{125.5637º} + 4.8157|\underline{174.2539º}$$
$$= 8.8618|\underline{149.6563º} \text{ pu} = 116.2805|\underline{149.6563º} \text{ Amps.}$$

$$I_c = 4.9109|\underline{5.5637º} + 4.8157|\underline{294.2539º}$$
$$= 7.9035|\underline{-29.6887º} \text{ pu} = 103.7060|\underline{-29.6887º} \text{ Amps.}$$

Las corrientes de la carga son

$$I_a = I_{1C} + I_{2C} = I_{1C} + I_{1C} = 2 \times .4815|\underline{144.2701º}$$
$$= .9630|\underline{144.2701º} \text{ pu} = 12.6361|\underline{144.2701º} \text{ Amperios}$$

$$I_b = a^2 I_{1C} + a I_{2C} = (a^2 + a) I_{1C} = -I_{1C}$$
$$= .4815|\underline{-35.7299º} \text{ pu} = 6.3185|\underline{-35.7299º} \text{ Amperios}$$

$$I_c = a I_{1C} + a^2 I_{2C} = (a + a^2) I_{1C} = - I_{1C} = I_b$$
$$= .4815|\underline{-35.7299º} \text{ pu} = 6.3185|\underline{-35.7299º} \text{ Amperios}$$

Los voltajes en la carga durante el cortocircuito son

$$V_a = V_1 + V_2 = 2V_1 = 2 \times .4975|\underline{-35.7299º}$$
$$= .9950|\underline{-35.7299º} \text{ pu} = 127.0171 \times .9950|\underline{-35.7299º}$$
$$= 126.3820|\underline{-35.7299º} \text{ voltios}$$

$$V_b = a^2 V_1 + a V_2 = (a^2 + a) V_1 = -V_1 = .4975|\underline{144.2701º}$$
$$= 63.1910|\underline{144.2701º} \text{ voltios}$$

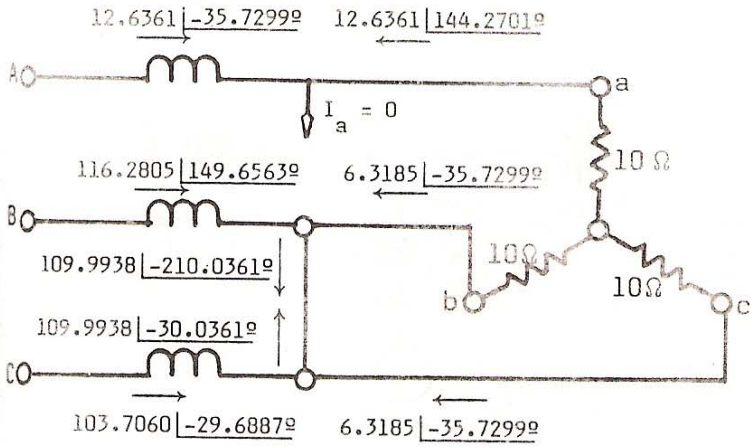
$$V_c = V_b = .4975|\underline{144.2701º} \text{ pu} = 63.1910|\underline{144.2701º} \text{ V.}$$

$$V_{ab} = \frac{V_a - V_b}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\, V_1 = .8617|\underline{-35.7299º} \text{ pu}$$
$$= 220 \times .8617|\underline{-35.7299º} = 189.5730|\underline{-35.7299º} \text{ V.}$$

$$V_{bc} = \frac{V_b - V_c}{\sqrt{3}} = \frac{V_1 - V_1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$V_{ca} = \frac{V_c - V_a}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}\, V_1 = .8617|\underline{144.2701º} \text{ pu}$$
$$= 189.5730|\underline{144.2701º} \text{ voltios}$$

La distribución de corrientes se enseña en la figura siguiente



EJEMPLO 6

En el sistema siguiente calcule en amperios las corrientes de falla y las corrientes debido a la falla en cada una de las partes del sistema, para un cortocircuito de línea a línea y tierra en la barra 3, tomando como base 30 MVA, 6.9 KV en el generador G_1 y despreciando las corrientes de prefalla. Antes de la falla el voltaje en la barra 3 es 115 KV.

Los datos del sistema son

G_1: 20 MVA, 6.9 KV, $X_1 = X_2 = j.15$ pu, $X_0 = j.05$ pu

G_2: 10 MVA, 6.9 KV, $X_1 = X_2 = j.15$ pu, $X_0 = j.05$ pu.

G_3: 30 MVA, 13.8 KV, $X_1 = X_2 = j.15$ pu, $X_0 = j.05$ pu.

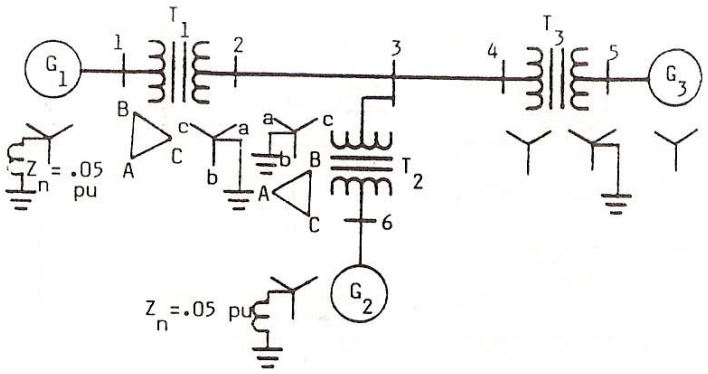
T_1: 25 MVA, 6.9 Δ - 115 Y KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu.

T_2: 12 MVA, 6.9 Δ - 115 Y KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu.

T_3: 3 transformadores monofásicos iguales con 10 MVA 7.5 - 75 KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu cada uno.

LINEA 2-3: $X_1 = X_2 = 100$ ohms, $X_0 = 250$ ohms.

LINEA 3-4: $X_1 = X_2 = 80$ ohmios, $X_0 = 210$ ohmios.



Las impedancias de secuencia y voltajes en valores por unidad en la base referida son

Generador G_1:

$$X_1 = X_2 = j.15 \times \frac{30}{20} = j.225$$

$$X_0 = j.05 \times \frac{30}{20} = j.075$$

$$3Z_n = 3 \times j.05 \times \frac{30}{20} = j.225$$

$V = 6.9$ KV $= 1.0$ pu

Generador G_2:

$$X_1 = X_2 = j.15 \times \frac{30}{10} = j.450$$

$$X_0 = Z_n = j.05 \times \frac{30}{10} = j.150 \qquad 3Z_n = j.450$$

$V = 6.9$ KV $= 1.0$ pu.

Generador G_3:

$$X_1 = X_2 = j.15 \times (13.8/11.5)^2 = j.216$$

$$X_0 = j.05 \times (13.8/11.5)^2 = j.072$$

$$V = 13.8 \text{ KV} = \frac{13.8}{11.5} = 1.2 \text{ pu}$$

Transformador T_1:

$$X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times \frac{30}{25} = j.120$$

Transformador T_2:

$$X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times \frac{30}{12} = j.250$$

Transformador T_3:

$$X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times \left[\frac{75 \times \sqrt{3}}{115}\right]^2 = j.128$$

Impedancia base en líneas:

$$Z_b = \frac{(115 \times 10^3)^2}{30 \times 10^6} = 440.833 \text{ ohmios}$$

LINEA 2-3:

$$X_1 = X_2 = \frac{j100}{440.833} = j.227$$

$$X_0 = \frac{j250}{440.833} = j.567$$

LINEA 3-4:

$$X_1 = X_2 = \frac{j80}{440.833} = j.181$$

$$X_0 = \frac{j210}{440.833} = j.476$$

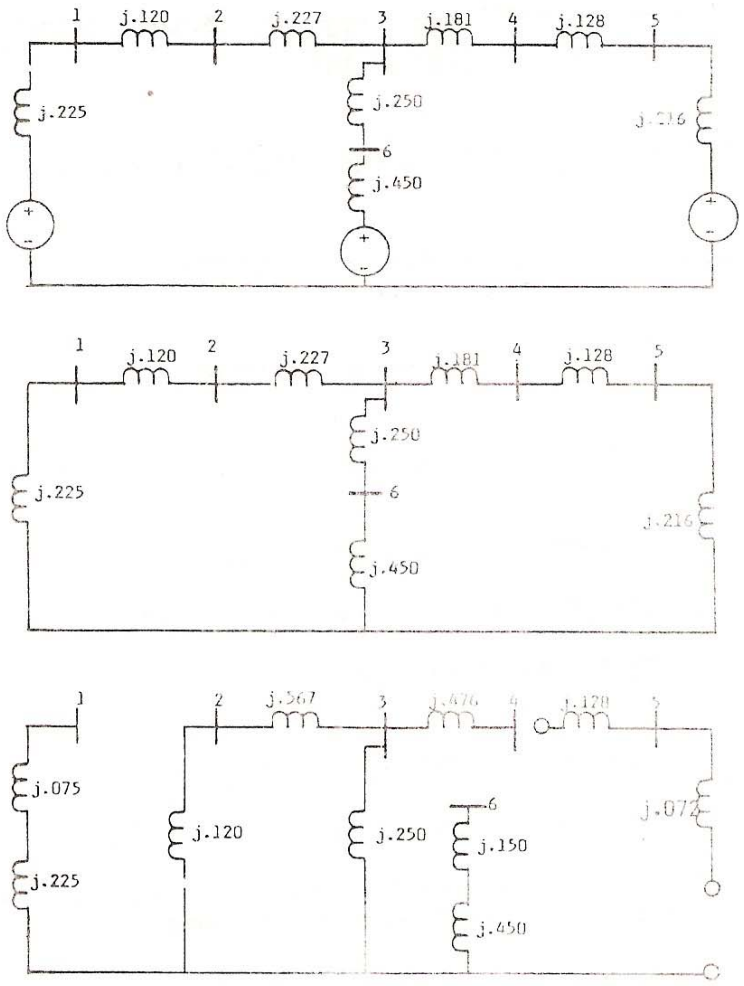
Las corrientes base son

G_1 y G_2: $I_b = \frac{30000}{\sqrt{3} \times 6.9} = 2510.219$ Amperios

G_3: $I_b = \frac{30000}{\sqrt{3} \times 11.5} = 1506.131$ Amperios

LINEAS: $I_b = \frac{30000}{\sqrt{3} \times 115} = 150.613$ Amperios

Los diagramas de secuencia se enseñan en la figura siguiente



Para una falla de línea a línea y tierra se colocan en paralelo los diagramas de secuencia positiva, negativa y cero, los que en forma simplificada se enseñan en la figura siguiente. El equivalente Thevenin se enseña también en la misma figura, de donde se calculan las corrientes y voltajes de secuencia de la falla.

$$I_1 = \frac{1.0}{j\left[.197 + \frac{.197 \times .183}{.197 + .183}\right]} = -j3.426 = 3.426\angle -90^\circ$$

$$V_0 = V_1 = V_2 = 1.0 - j.197 \times (-j3.426) = .325$$

$$I_2 = -\frac{.325}{j.197} = j1.650 = 1.650\angle 90^\circ$$

$$I_0 = -\frac{.325}{j.183} = j1.776 = 1.776\angle 90^\circ$$

$$I_a = 1.776\angle 90^\circ + 3.426\angle -90^\circ + 1.650\angle 90^\circ = 0.0$$

$$I_b = 1.776\angle 90^\circ + 3.426\angle 150^\circ + 1.650\angle 210^\circ$$

$$= 5.140\angle 148.784^\circ \text{ pu} = 150.613 \times 5.140\angle 148.784^\circ$$

$$= 774.151\angle 148.784^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_c = 1.776\angle 90^\circ + 3.426\angle 30^\circ + 1.650\angle 330^\circ$$

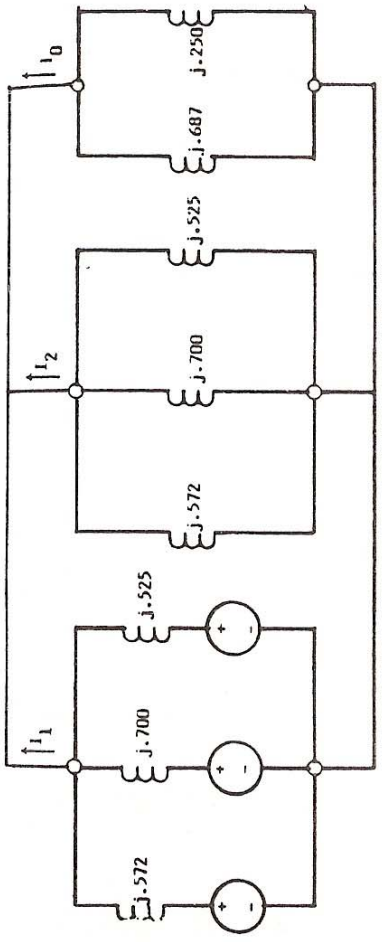
$$= 5.140\angle 31.216^\circ \text{ pu} = 774.151\angle 31.216^\circ \text{ Amperios}$$

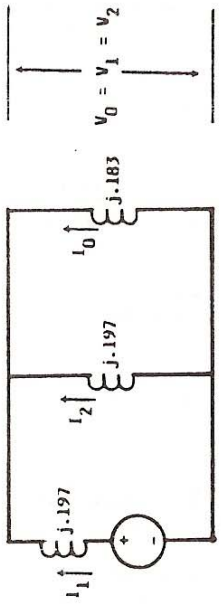
Con las corrientes de secuencia en la falla y usando divisor de corrientes se calculan las corrientes de secuencia y de fase en cada ramal.

En el Ramal 1:

$$I_1 = -j3.426 \times \frac{.700 \times .525/(.700 + .525)}{.572 + \frac{.700 \times .525}{.700 + .525}}$$

$$= -j3.426 \times \frac{.300}{.872} = -j1.179 = 1.179\angle -90^\circ$$





$$I_2 = j1.650 \times \frac{.300}{.872} = j.568 = .568\angle 90º$$

$$I_0 = j1.776 \times \frac{.250}{.687 + .250} = j.473 = .473\angle 90º$$

En el Ramal 2:

$$I_1 = -j3.426 \times \frac{.572 \times .525/(.572 + .525)}{.700 + \frac{.572 \times .525}{.572 + .525}}$$

$$= -j3.426 \times \frac{.274}{.974} = -j.963 = .963\angle -90º$$

$$I_2 = j1.650 \times \frac{.274}{.974} = j.464 = .464\angle 90º$$

$$I_0 = j1.776 \times \frac{.687}{.687 + .250} = j1.303 = 1.303\angle 90º$$

En el Ramal 3:

$$I_1 = -j3.426 \times \frac{.572 \times .700/(.572 + .700)}{.525 + \frac{.572 \times .700}{.572 + .700}}$$

$$= -j3.426 \times \frac{.315}{.840} = -j1.284 = 1.284\angle -90º$$

$$I_2 = j1.650 \times \frac{.315}{.840} = j.619 = .619\angle 90º$$

$$I_0 = 0.0$$

Las corrientes de fase que salen del transformador T_1 son

$$I_a = .473\angle 90º + 1.179\angle -90º + .568\angle 90º = .138\angle -90º \text{ pu}$$

$$= 150.613 \times .138\angle -90º = 20.785\angle -90º \text{ Amperios}$$

$$I_b = .473\angle 90º + 1.179\angle 150º + .568\angle 210º$$

$$= 1.701\angle 152.787º \text{ pu} = 256.239\angle 152.787º \text{ Amperios}$$

$$I_c = .473\angle 90º + 1.179\angle 30º + .568\angle 330º$$

$$= 1.701\angle 27.213º \text{ pu} = 256.239\angle 27.213º \text{ Amperios}$$

Las corrientes de fase que salen del transformador T_2 son

$$I_a = 1.303\angle 90º + .963\angle -90º + .464\angle 90º = .804\angle 90º \text{ pu}$$

$$= 121.093\angle 90º \text{ Amperios}$$

$$I_b = 1.309\angle 90º + .963\angle 150º + .464\angle 210º$$

$$= 1.984\angle 128.534º \text{ pu} = 298.822\angle 128.534º \text{ Amperios}$$

$$I_c = 1.309\angle 90º + .963\angle 30º + .464\angle 330º$$

$$= 1.984\angle 51.466º \text{ pu} = 298.822\angle 51.466º \text{ Amperios}$$

Las corrientes de fase que salen del transformador T_3 son

$$I_a = 1.284\angle -90º + .619\angle 90º = .665\angle -90º \text{ pu}$$

$$= 100.158\angle -90º \text{ Amperios}$$

$$I_b = 1.284\angle 150º + .619\angle 210º = 1.681\angle 168.576º \text{ pu}$$

$$= 253.227\angle 168.576º \text{ Amperios}$$

$$I_c = 1.284\angle 30º + .619\angle 330º = 1.681\angle 11.424º \text{ pu}$$

$$= 253.227\angle 11.424º \text{ Amperios}$$

Las corrientes del generador G_3 son

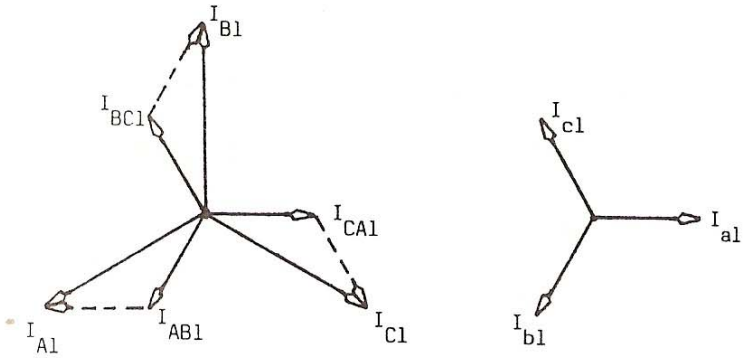
$I_a = .665|\underline{-90º}$ pu $= 1506.131 \times .665|\underline{-90º}$

$= 1001.577|\underline{-90º}$ Amperios

$I_b = 1.681|\underline{168.576º}$ pu $= 2532.268|\underline{168.576º}$ Amperios

$I_c = 1.681|\underline{11.424º}$ pu $= 2532.268|\underline{11.424º}$ Amperios

Las corrientes del generador G_1 son



$I_{A0} = 0.0$

$I_{A1} = I_{a1}|\underline{-150º} = 1.179|\underline{-240º}$

$I_{A2} = I_{a2}|\underline{150º} = .568|\underline{240º}$

$I_A = 1.179|\underline{-240º} + .568|\underline{240º} = 1.022|\underline{148.810}$ pu

$= 2510.219 \times 1.022|\underline{148.810º} = 2564.629|\underline{148.810º}$ A

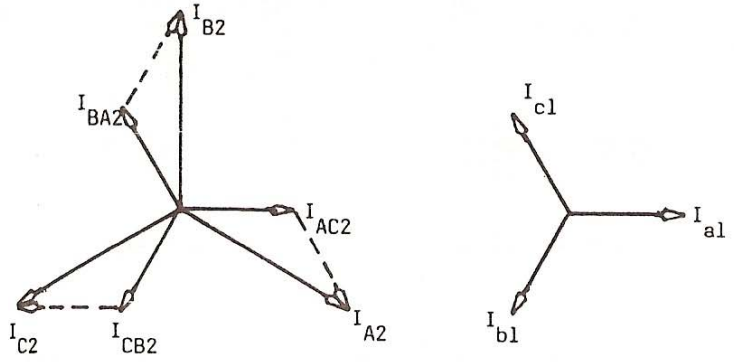
$I_B = 1.179|\underline{0º} + .568|\underline{0º} = 1.747|\underline{0º}$ pu

$= 4385.353|\underline{0º}$ Amperios

$I_C = 1.179|\underline{-120º} + .568|\underline{120º} = 1.022|\underline{-148.810º}$ pu

$= 2564.629|\underline{-148.810º}$ Amperios

Las corrientes del generador G_2 son



$I_{A0} = 0.0$

$I_{A2} = I_{a1}|\underline{-30º} = .963|\underline{-120º}$

$I_{A1} = I_{a2}|\underline{30º} = .464|\underline{120º}$

$I_A = .464|\underline{120º} + .963|\underline{-120º} = .834|\underline{-148.810º}$ pu

$= 2510.219 \times .834|\underline{-148.810º} = 2093.726|\underline{-148.810º}$ A

$I_B = .464|\underline{0º} + .963|\underline{0º} = 1.427|\underline{0º}$ pu

$= 3582.083|\underline{0º}$ Amperios

$I_C = .464|\underline{240º} + .963|\underline{120º} = .834|\underline{148.810º}$ pu

$= 2093.726|\underline{148.810º}$ Amperios

EJEMPLO 7

Una carga trifásica balanceada conectada en estrella con impedancias por fase de $Z = 10\angle 0^\circ\ \Omega$ es alimentada a través de un transformador Y – Δ de 20 KVA, 2400/440 V, $Z_1 = Z_2 = Z_0 = j.20$ pu, al cual se le aplican los voltajes $|V_{AB}| = 2400$ V, $|V_{BC}| = 2200$ V $|V_{CA}| = 2000$ V.

Seleccione como base a 20 KVA, 2400 V, trabaje en valores por unidad y dé resultados en cantidades eléctricas reales.

a) Dibuje los diagramas de impedancias de secuencia en valores por unidad.

b) Calcule las corrientes en el primario del transformador.

c) Calcule las potencias de entrada al transformador.

d) Calcule la corriente y el voltaje en los terminales de la carga.

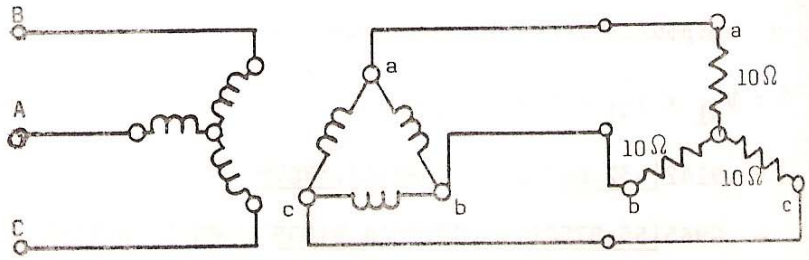
Si ocurre un cortocircuito de línea a línea entre las fases b y c en los terminales de la carga:

e) Calcule las corrientes de cortocircuito en cada fase.

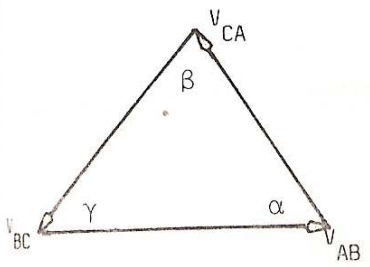
f) Calcule la corriente en cada fase de la carga y de la salida del transformador.

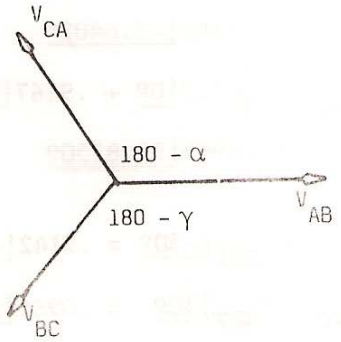
g) Calcule la corriente en cada fase del primario del transformador.

El diagrama del sistema se enseña en la figura siguiente:



Se buscan los ángulos de los voltajes





$$(2000)^2 = (2400)^2 + (2200)^2 - 2 \times 2400 \times 2200 \cos \gamma$$

de donde

$$\gamma = 51.3178^\circ$$

$$\frac{2000}{\text{seno } \gamma} = \frac{2200}{\text{seno } \alpha}$$

de donde

$$\alpha = 59.1695^\circ$$

por lo que

$$V_{AB} = 2400\angle 0^\circ \text{ Voltios} = 1.0\angle 0^\circ \text{ pu.}$$

$$V_{BC} = 2200\angle -128.6822^\circ \text{ Voltios} = .9167\angle -128.6822^\circ \text{ pu.}$$

$$V_{CA} = 2000\angle 120.8305^\circ \text{ Voltios} = .8333\angle 120.8305^\circ \text{ pu.}$$

Los valores de secuencia son

$$V_{ABO} = \frac{1}{3}(1.0\angle 0^\circ + .9167\angle -128.6822^\circ + .8333\angle 120.8305)$$

$$= 0.0 + j0.0$$

$$V_{AB1} = \frac{1}{3}(1.0\angle 0^\circ + .9167\angle -8.6822^\circ + .833\angle .8305^\circ)$$

$= .9142|\underline{-2.6402º}$

$V_{AB2} = \frac{1}{3}(1.0|\underline{0º} + .9167|\underline{111.3178º} + .8333|\underline{240.8305º})$

$= .0965|\underline{25.8750º}$

y

$V_{A1} = V_{AB1}|\underline{-30º} = .9142|\underline{-32.6402º}$

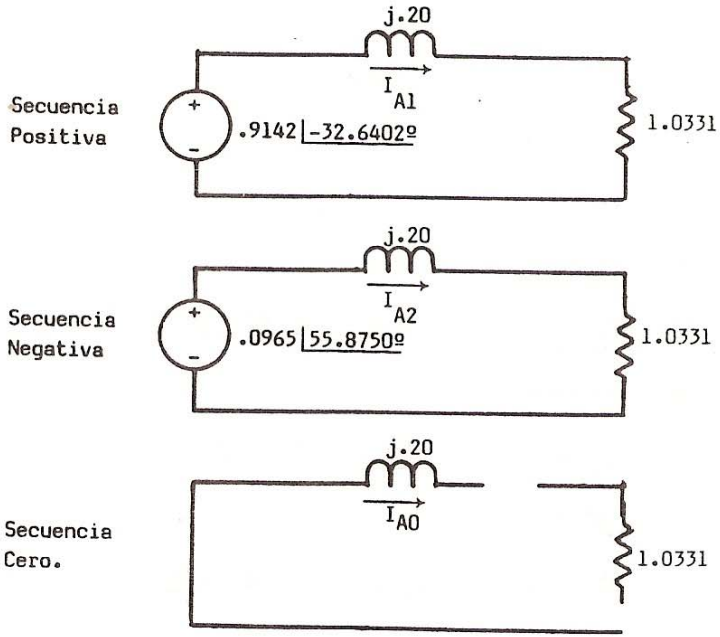
$V_{A2} = V_{AB2}|\underline{30º} = .0965|\underline{55.8750º}$

La impedancia de la carga es

$$Z_b = \frac{(440)^2}{20000} = 9.68 \text{ ohmios}$$

$$Z = 10|\underline{0º} \text{ Ohmios} = \frac{10|\underline{0º}}{9.68} = 1.0331 \text{ pu.}$$

a) Los diagramas de impedancias de secuencia en valores por unidad son



La corriente base y de secuencia en el primario del transformador son

$$I_{b1} = \frac{20000}{\sqrt{3} \times 2400} = 4.8113 \text{ Amperios}$$

$I_{A0} = 0.0$

$$I_{A1} = \frac{.9142|\underline{-32.6402º}}{1.0331 + j.20} = .8688|\underline{-43.5967º} \text{ pu}$$

$$I_{A2} = \frac{.0965|\underline{55.8750º}}{1.0331 + j.20} = .0917|\underline{44.9185º}$$

b) Las corrientes en el primario del transformador son

$I_A = .8688|\underline{-43.5967º} + .0917|\underline{44.9185º}$

$= .8760|\underline{-37.5894º}$ pu $= 4.8113 \times .8760|\underline{-37.5894º}$

$= 4.2146|\underline{-37.5894º}$ Amperios

$I_B = .8688|\underline{196.4033º} + .0917|\underline{164.9185º}$

$= .9482|\underline{-166.4936º}$ pu $= 4.5621|\underline{-166.4936º}$ Amperios

$I_C = .8688|\underline{76.4033º} + .0917|\underline{284.9185º}$

$= .7894|\underline{73.2252º}$ pu $= 3.7980|\underline{73.2252º}$ Amperios

c) Las potencias de entrada al transformador son

$S = V_{A1} \times I_{A1}^* + V_{A2} \times I_{A2}^*$

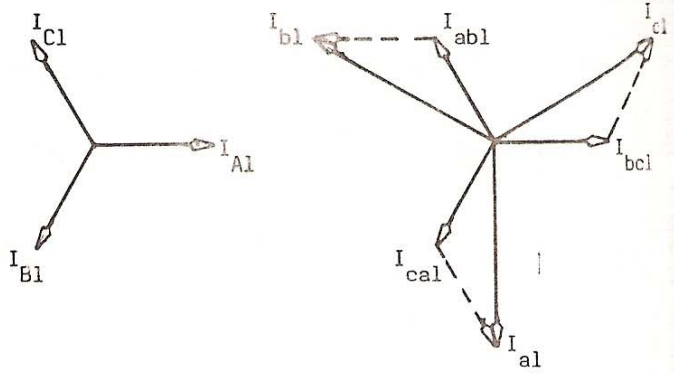
$= .9142|\underline{-32.6402º} \times .8688|\underline{43.5967º}$

$+ .0965|\underline{55.8750º} \times .0917|\underline{44.9185º} = .8031|\underline{10.9565}$ pu

$= 20000 \times .8031\angle 10.9565^\circ = 16.0620\angle 10.9565^\circ$ KVA

$= 15769.2$ vatios $+$ 3052.8 vars

La relación entre las corrientes de secuencia del primario y del secundario es



$$I_{a1} = I_{A1}\angle -90^\circ = .8688\angle -133.5967^\circ$$

$$I_{a2} = I_{A2}\angle 90^\circ = .0917\angle 134.9185^\circ$$

d) Las corrientes en los terminales de la carga son

$$I_{base2} = \frac{20000}{\sqrt{3} \times 440} = 26.2432 \text{ Amperios}$$

$$I_a = .8688\angle -133.5967^\circ + .0917\angle 134.9185^\circ$$

$$= .8713\angle -139.6358^\circ \text{ pu} = 26.2432 \times .8713\angle -139.6358^\circ$$

$$= 22.8646\angle -139.6358^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_b = .8688\angle 106.4033^\circ + .0917\angle 254.9185^\circ$$

$$= .7920\angle 109.8677^\circ \text{ pu} = 20.7846\angle 109.8677^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_c = .8688\angle -13.5967^\circ + .0917\angle 14.9185^\circ$$

$$= .9504\angle -10.9535^\circ \text{ pu} = 24.9420\angle -10.9535^\circ \text{ Amperios}$$

Los voltajes de secuencia inducidos en el primario del transformador son

$$V'_{A1} = V_{A1} - jX_{T1} \times I_{A1}$$

$$= .9142\angle -32.6402^\circ - .20\angle 90^\circ \times .8688\angle -43.5967^\circ$$

$$= .8975\angle -43.5987^\circ$$

$$V'_{A2} = V_{A2} - jX_{T2} \times I_{A2}$$

$$= .0965\angle 55.8750^\circ - .20\angle 90^\circ \times .0917\angle 44.9185^\circ$$

$$= .0947\angle 44.9416^\circ$$

La relación entre los voltajes de secuencia inducidos en el primario y en el secundario es

$$V_{a1} = V'_{A1}\angle -90^\circ = .8975\angle -133.5987^\circ$$

$$V_{a2} = V'_{A2}\angle 90^\circ = .0947\angle 134.9416^\circ$$

d) Los voltajes en los terminales de la carga son

$$V_a = .8975\angle -133.5987^\circ + .0947\angle 134.9415^\circ$$

$$= .9001\angle -139.6334^\circ \text{ pu} = \frac{440}{\sqrt{3}} \times .9001\angle -139.6334^\circ$$

$$= 228.6543\angle -139.6334^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_b = .8975\angle 106.4013^\circ + .0947\angle 254.9416^\circ$$

$$= .8182\angle 109.8624^\circ \text{ pu} = 207.8577\angle 109.8624^\circ \text{ Voltios}$$

$V_c = .8975|\underline{-13.5987º} + .0947|\underline{14.9416º}$

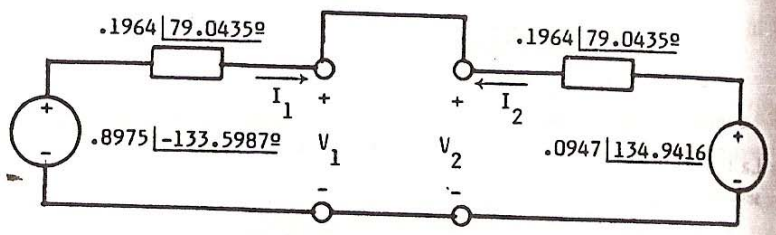
$= .9817|\underline{-10.9564º}$ pu $= 249.3834|\underline{-10.9564º}$ Voltios

Para un cortocircuito en los terminales de la carga se conectan en paralelo el equivalente Thevenin de los diagramas de secuencia positiva y negativa vistos desde dicho terminal. Los voltajes e impedancias de los equivalentes Thevenin son

$V_{th1} = V_{a1} = .8975|\underline{-133.5987º}$

$V_{th2} = V_{a2} = .0947|\underline{134.9416º}$

$$Z_{th1} = Z_{th2} = \frac{j.20 \times 1.0331}{1.0331 + j.20} = .1964|\underline{79.0435º}$$



e) Las corrientes de secuencia y de fase en el cortocircuito son

$$I_1 = -I_2 = \frac{.8975|\underline{-133.5987º} - .0947|\underline{134.9416º}}{.3928|\underline{79.0435º}}$$

$= 2.3037|\underline{-206.6353º}$

$I_a = I_1 + I_2 = I_1 - I_1 = 0.0$

$I_b = a^2 I_1 - aI_1 = (a^2 - a)I_1 = -j\sqrt{3}\ I_1$

$= 3.9902|\underline{-296.6353º}$ pu $= 104.7144|\underline{-296.6353º}$ A.

$I_c = aI_1 - a^2 I_1 = j\sqrt{3}\ I_1 = 3.9902|\underline{-116.6353º}$ pu

$= 104.7144|\underline{-116.6353º}$ Amperios

Los voltajes de secuencia en la falla son

$V_1 = V_2 = .8975|\underline{-133.5987º} - .1964|\underline{79.0435} \times 2.3037|\underline{-206.6353º}$

$= .4500|\underline{-139.6323º}$

Las corrientes de secuencia en la carga y a la salida del transformador son

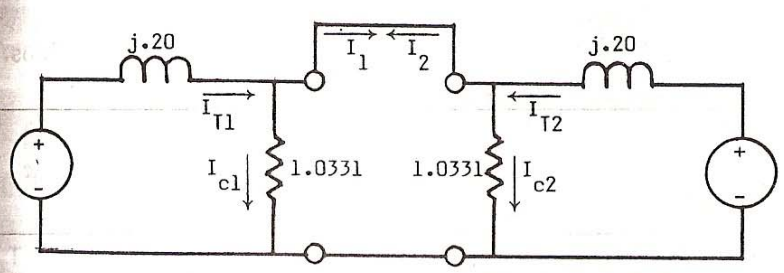
$$I_{c1} = I_{c2} = \frac{V_1}{R} = \frac{.4500|\underline{-139.6323º}}{1.0331} = .4356|\underline{-139.6323º}$$

$I_{T1} = I_1 + I_{c1} = 2.3037|\underline{-206.6353º} + .4356|\underline{-139.6323º}$

$= 2.5061|\underline{162.5722º}$

$I_{T2} = I_2 + I_{c2} = 2.3037|\underline{-26.6353º} + .4356|\underline{-139.6323º}$

$= 2.170º|\underline{-37.2822º}$



f) Las corrientes en cada fase de la carga y la salida del transformador son

Carga:

$I_a = I_{c1} + I_{c2} = 2 \times .4356|\underline{-139.6323º}$

$= .8712|\underline{-139.6323º}$ pu $= 26.2432 \times .8712|\underline{-139.6323}$

$= 22.8631|\underline{-139.6323º}$ Amperios

$I_b = a^2 I_{c1} + a I_{c2} = (a^2 + a) I_{c1} = -I_{c1}$

$= .4356|\underline{40.3677º}$ pu $= 11.4315|\underline{40.3677º}$ Amperios

$I_c = a I_{c1} + a^2 I_{c2} = (a + a^2) I_{c1} = -I_{c1} = I_b$

$= .4356|\underline{40.3677º}$ pu $= 11.4315|\underline{40.3677º}$ Amperios

Transformador:

$I_a = 2.5061|\underline{162.5722º} + 2.1709|\underline{-37.2822º}$

$= .8713|\underline{-139.6263º}$ pu $= 22.8659|\underline{-139.6269º}$ Amps.

$I_b = 2.5061|\underline{42.5722º} + 2.1709|\underline{82.7178º}$

$= 4.3944|\underline{61.1442º}$ pu $= 115.3235|\underline{61.1442º}$ Amperios

$I_c = 2.5061|\underline{282.5722º} + 2.1709|\underline{202.7178º}$

$= 3.5930|\underline{-113.9224º}$ pu $= 94.2930|\underline{-113.9224º}$ Amps.

Las corrientes de secuencia en el primario del transformador son

$I_{A1} = I_{a1}|\underline{90º} = 2.5061|\underline{252.5722º}$

$I_{A2} = I_{a2}|\underline{-90º} = 2.1709|\underline{-127.2822º}$

g) La corriente en cada fase del primario del transformador es

$I_A = 2.5061|\underline{252.5722º} + 2.1709|\underline{-127.2822º}$

$= 4.6073|\underline{-116.6363º}$ pu $= 4.8113 \times 4.6073|\underline{-116.6363}$

$= 22.1673|\underline{-116.6363º}$ Amperios

$I_B = 2.5061|\underline{132.5722º} + 2.1709|\underline{-7.2822º}$

$= 1.6358|\underline{73.7415º}$ pu $= 7.8705|\underline{73.7415º}$ Amperios

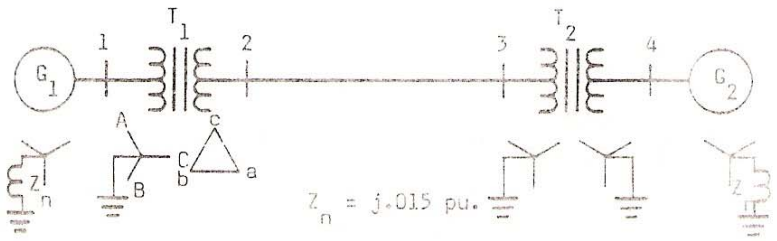
$I_C = 2.5061|\underline{12.5722º} + 2.1709|\underline{112.7178º}$

$= 3.0127|\underline{57.7506º}$ pu $= 14.4952|\underline{57.7506º}$ Amperios

EJEMPLOS 8

Los datos del sistema de potencia que se indican son los siguientes:

G_1: 25 MVA, 6.6 KV, $X_1 = X_2 = j.12$ pu, $X_0 = j.05$ pu
G_2: 25 MVA, 6.6 KV, $X_1 = X_2 = j.12$ pu, $X_0 = j.05$ pu
T_1: 30 MVA, 7.2 Y - 2.5 Δ KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu
T_2: 25 MVA, 7.5 Y - 2.6 Y KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu
LINEA 2-3: $X_1 = X_2 = j.06$ ohmios, $X_0 = j.10$ ohmios



Tomando como base los valores del generador 1 en la barra 1:

a) Calcular en amperios la corriente de cortocircuito para un cortocircuito de línea a tierra en la barra 2, si antes del cortocircuito el voltaje en esa barra es 2.5 KV.

b) Calcular en amperios la corriente de cada fase de cada generador debido al cortocircuito anterior.

c) Calcular en ohmios las impedancias de tierra $Z_a = V_a/I_a$, $Z_b = V_b/I_b$, $Z_c = V_c/I_c$ y las impedancias de fase $Z_{ab} = V_{ab}/I_{ab}$, $Z_{bc} = V_{bc}/I_{bc}$, $Z_{ca} = V_{ca}/I_{ca}$ vistas desde la barra 3 hacia el cortocircuito.

Se consiguen los diagramas de secuencia calculando las impedancias en valores por unidad en cada una de las partes del sistema.

Generador G_1:

$S_b = 25$ MVA, $V_b = 6.6$ KV, $X_1 = X_2 = j.12$ pu

$X_0 = j.05$ pu, $Z_n = j.015$ pu.

$$I_b = \frac{25000}{\sqrt{3} \times 6.6} = 2186.9328 \text{ Amperios}$$

Transformador T_1:

$$X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times \left[\frac{7.2}{6.6}\right]^2 \times \frac{25}{30} = j.0992 \text{ pu}$$

Línea:

Voltaje base en la barra 2:

$$V_{b2} = \frac{2.5}{7.2} \times 6.6 = 2.2917 \text{ KV}$$

$$I_b = \frac{25000}{\sqrt{3} \times 2.2917} = 6298.2750 \text{ Amperios}$$

$$Z_b = \frac{(2.2917)^2}{25} = .2101 \text{ ohmios}$$

$$X_1 = X_2 = \frac{j.06}{.2101} = j.2856 \text{ pu} \qquad X_0 = \frac{j.10}{.2101} = j.4760 \text{ pu}$$

Transformador T_2:

$$X_1 = X_2 = X_0 = j.10 \times \left[\frac{2.6}{2.2917}\right]^2 \times \frac{25}{25} = j.1287 \text{ pu}$$

Generador G_2:

$$V_b = \frac{7.5}{2.6} \times 2.2917 = 6.6107 \text{ KV}$$

$$I_b = \frac{25000}{\sqrt{3} \times 6.6107} = 2183.3931 \text{ Amperios}$$

$$X_1 = X_2 = j.12 \times \left[\frac{6.6}{6.6107}\right]^2 \times \frac{25}{25} = j.1196 \text{ pu}$$

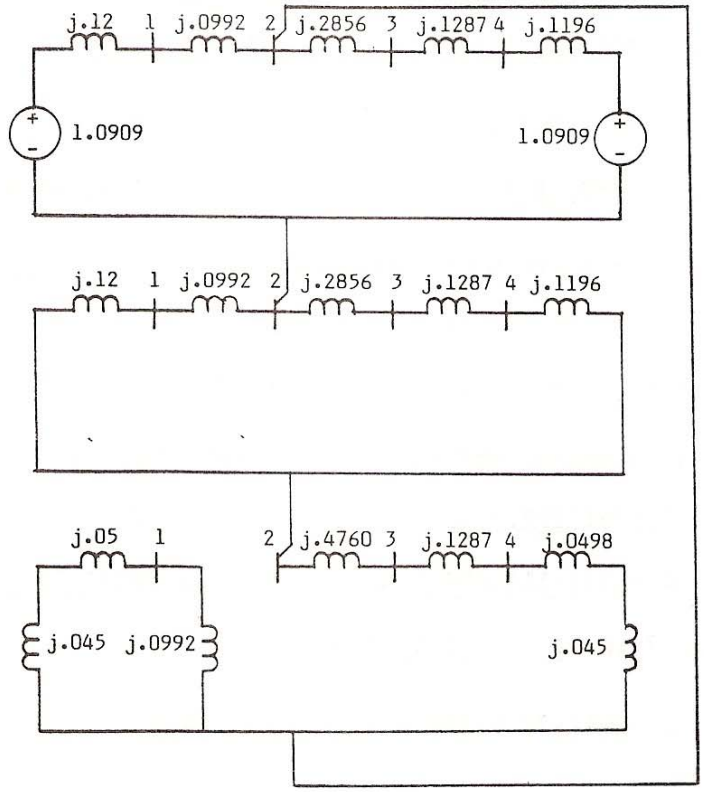
$$X_0 = j.05 \times \left[\frac{6.6}{6.6107}\right]^2 \times \frac{25}{25} = j.0498 \text{ pu}$$

$$Z_n = j.015 \times \left[\frac{6.6}{6.6107}\right]^2 \times \frac{25}{25} = j.0150 \text{ pu}$$

El voltaje por unidad en la barra 2 es

$$V_f = \frac{7.2}{6.6} = 1.0909 \text{ pu}$$

El diagrama de impedancias para el cortocircuito de línea a tierra en la barra 2 se enseña en la figura siguiente.



El diagrama de secuencias simplificado se enseña en la figura siguiente.

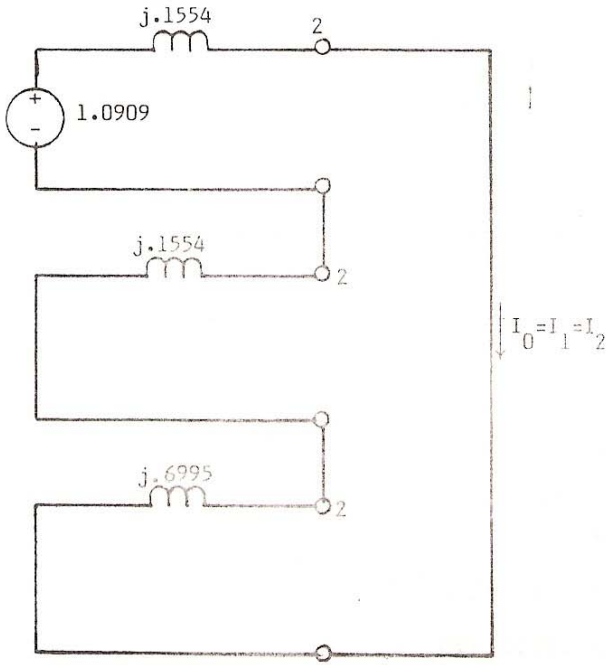
Las corrientes de secuencia y de fase en el cortocircuito son

$$I_0 = I_1 = I_2 = \frac{1.0909}{j1.0103} = 1.0798\angle -90^\circ \text{ pu}$$

$$I_A = 3I_0 = 3.2393\angle -90^\circ \text{ pu} = 3.2393\angle -90^\circ \times 6298.2750$$

$$= 20402.0022\angle -90^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_B = I_C = (a^2 + a + 1)I_0 = 0.0$$



Las corrientes de secuencia que salen del transformador T_2 (y del generador G_2) son

$$I_1 = I_2 = -j1.0798 \times \frac{.2192}{.7531} = .3143\angle -90^\circ \text{ pu}$$

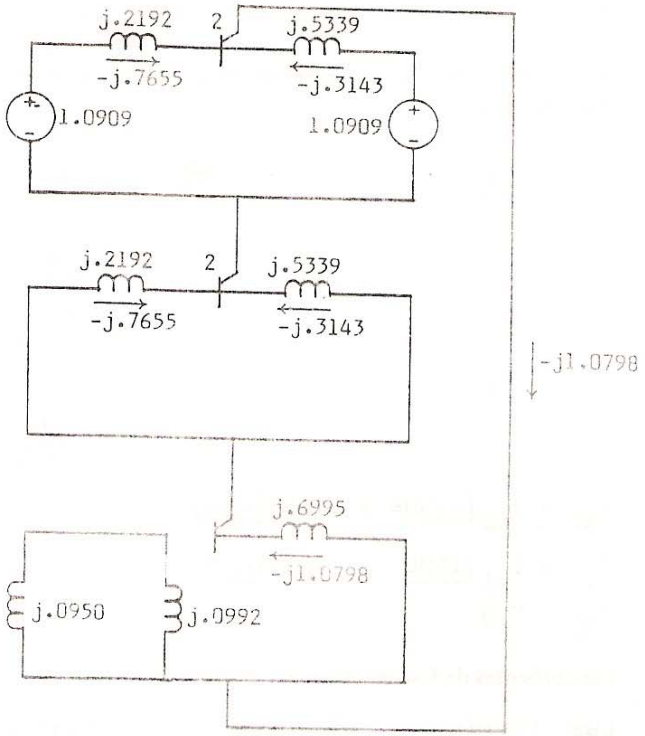
$$I_0 = 1.0798\angle -90^\circ \text{ pu}$$

Las corrientes de secuencia que salen del transformador T_1 son

$$I_1 = I_2 = -j1.0798 \times \frac{.5339}{.7531} = .7655\angle -90^\circ \text{ pu}$$

$$I_0 = 0.0$$

Esta distribución de corrientes se enseña en la figura siguiente.



Las corrientes de fase del generador G_2 son

$$I_A = 1.0798\angle -90^\circ + .3143\angle -90^\circ + .3143\angle -90^\circ$$

$$= 1.7084\angle -90^\circ \text{ pu} = 2183.3931 \times 1.7084\angle -90^\circ$$

$$= 3730.1088\angle -90^\circ \text{ Amperios}$$

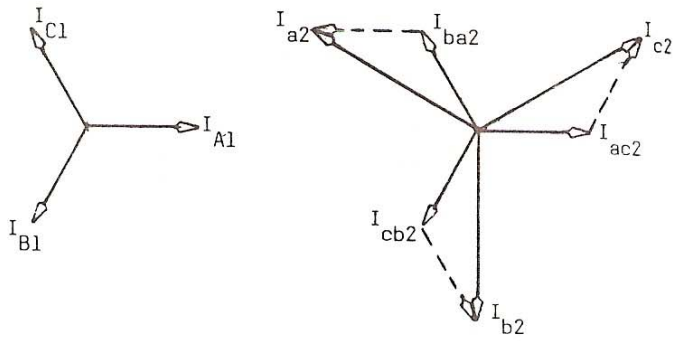
$$I_B = I_0 + (a^2 + a)I_1 = I_0 - I_1$$

$$= 1.0798\angle -90^\circ - .3143\angle -90^\circ = .7655\angle -90^\circ \text{ pu}$$

$$= 1671.3874\angle -90^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_C = I_B = .7655\angle -90^\circ \text{ pu} = 1671.3874\angle -90^\circ \text{ Amperios}$$

La relación entre las corrientes de secuencia del primario y secundario del transformador T_1 es



$$I_{A1} = I_{a2}\angle -150^\circ = .7655\angle -240^\circ$$

$$I_{A2} = I_{a1}\angle 150^\circ = .7655\angle 60^\circ$$

$$I_{A0} = 0.0$$

Las corrientes de fase en el generador G_1 son

Las corrientes de fase en el generador G_1 son

$$I_A = .7655\angle -240^\circ + .7655\angle 60^\circ = 1.3259\angle 90^\circ \text{ pu}$$

$$= 2186.9328 \times 1.3259\angle 90^\circ = 2899.6542\angle 90^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_B = .7655\angle 0^\circ + .7655\angle 180^\circ = 0.0$$

$$I_C = .7655\angle -120^\circ + .7655\angle 300^\circ = 1.3259\angle -90^\circ \text{ pu}$$

$$= 2899.6542\angle -90^\circ \text{ Amperios}$$

Los voltajes de secuencia y de fase en la barra 3 son

$$V_1 = 1.0909 - j.2483 \times (-j.3143) = 1.0129\angle 0^\circ \text{ pu}$$

$$V_2 = -j.2483 \times (-j.3143) = .0780\angle 180^\circ \text{ pu}$$

$$V_0 = -j.2235 \times (-j1.0798) = .2413\angle 180^\circ \text{ pu}$$

$$V_a = .2413\angle 180^\circ + 1.0129\angle 0^\circ + .0780\angle 180^\circ = .6936\angle 0^\circ \text{ pu}$$

$$V_b = .2413\angle 180^\circ + 1.0129\angle 240^\circ + .0780\angle -60^\circ$$

$$= 1.1810\angle -126.8806^\circ \text{ pu}$$

$$V_c = .2413\angle 180^\circ + 1.0129\angle 120^\circ + .0780\angle 60^\circ$$

$$= 1.1810\angle 126.8806^\circ \text{ pu}$$

$$V_{ab} = \frac{V_a - V_b}{\sqrt{3}} = .9762\angle 33.9654^\circ \text{ pu}$$

$$V_{bc} = \frac{V_b - V_c}{\sqrt{3}} = 1.0908\angle -90^\circ \text{ pu}$$

$$V_{ca} = \frac{V_c - V_a}{\sqrt{3}} = .9762\angle 146.0346^\circ \text{ pu}$$

Las corrientes en la barra 3 son las mismas del generador G_2 en valores por unidad.

$$I_a = 1.7084\angle -90^\circ \text{ pu}$$

$$I_b = .7655\angle -90^\circ \text{ pu}$$

$$I_c = .7655\angle -90^\circ \text{ pu}$$

$$I_{ab} = \frac{I_a - I_b}{\sqrt{3}} = .5444\angle -90^\circ$$

$$I_{bc} = \frac{I_b - I_c}{\sqrt{3}} = 0.0$$

$$I_{ca} = \frac{I_c - I_a}{\sqrt{3}} = .5444\angle 90º$$

Las impedancias vistas desde la barra 3 hacia el cortocircuito son

$$Z_a = \frac{V_a}{I_a} = \frac{.6936\angle 0º}{1.7084\angle -90º} = .4060\angle 90º \text{ pu}$$

$$= .2101 \times .4060\angle 90º = .0853\angle 90º \text{ ohmios}$$

$$Z_b = \frac{V_b}{I_b} = \frac{1.1810\angle -126.8806º}{.7655\angle -90º} = 1.5428\angle -36.8806º \text{pu}$$

$$= .3241\angle -36.8806º \text{ ohmios}$$

$$Z_c = \frac{V_c}{I_c} = \frac{1.1810\angle 126.8806º}{.7655\angle -90º} = 1.5428\angle 216.8806º \text{ pu}$$

$$= .3241\angle 216.0006º \text{ ohmios}$$

$$Z_{ab} = \frac{V_{ab}}{I_{ab}} = \frac{.9762\angle 33.9654º}{.5444\angle -90º} = 1.7933\angle 123.9654º \text{ pu}$$

$$= .3768\angle 123.9654º \text{ ohmios}$$

$$Z_{bc} = \frac{V_{bc}}{I_{bc}} = \infty$$

$$Z_{ca} = \frac{V_{ca}}{I_{ca}} = \frac{.9762\angle 146.0346º}{.5444\angle 90º} = 1.7933\angle 56.0346º \text{ pu}$$

$$= .3768\angle 56.0346º \text{ ohmios}$$

6. FALLAS ASIMETRICAS A TRAVES DE IMPEDANCIAS

Hasta ahora se han considerado las fallas como cortocircuitos directos entre las líneas o entre las líneas y tierra. Sin embargo en la práctica estas fallas a menudo ocurren a través de impedancias. La forma de determinar las relaciones de los voltajes y corrientes de secuencia en estos casos es similar a la usada en casos anteriores. Se comienza con las condiciones de fase de la falla y mediante las relaciones entre los valores de fase y los valores de secuencia se consiguen las relaciones entre los voltajes y corrientes de secuencia. Esto permite definir la forma de conexión de los diagramas de secuencia y de la impedancia a través de la cual se efectúa el cortocircuito. De aquí en adelante todo se convierte en resolver un problema circuital y en relacionar valores de secuencia con valores de fase, tal como se ha hecho en el pasado.

6.1. FALLA DE LINEA A TIERRA

Este tipo de falla se enseña en la figura 8.8.

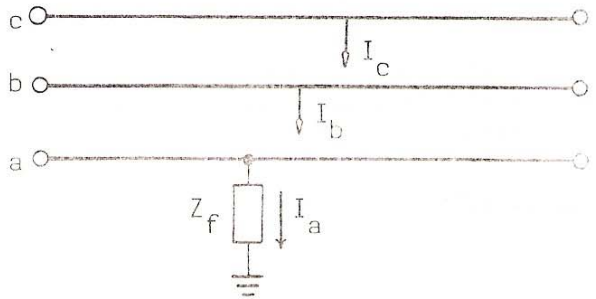


Fig. 8.8

Las condiciones de falla son

$$I_b = I_c = 0 \qquad V_a = Z_f I_a \qquad 8.32$$

Se tiene entonces que

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$I_0 = I_1 = I_2 = \frac{1}{3} I_a$$

Además

$$V_f = Z_f I_a = V_0 + V_1 + V_2 = Z_f(I_0 + I_1 + I_2) = 3Z_f I_0$$
$$= 3Z_f I_1 = 3Z_f I_2$$

pero

$$V_0 + V_1 + V_2 = -Z_0 I_0 + V_f - Z_1 I_1 - Z_2 I_2$$
$$= -(Z_0 + Z_1 + Z_2) I_0 + V_f = 3Z_f I_0$$

por lo que

$$I_0 = I_1 = I_2 = \frac{V_f}{Z_0 + Z_1 + Z_2 + 3Z_f} \qquad 8.33$$

Estas relaciones nos sugieren que los diagramas de secuencia positiva, negativa y cero y la impedancia $3Z_f$ deben quedar conectados en serie y en circuito cerrado, tal como se indica en la figura 8.9.

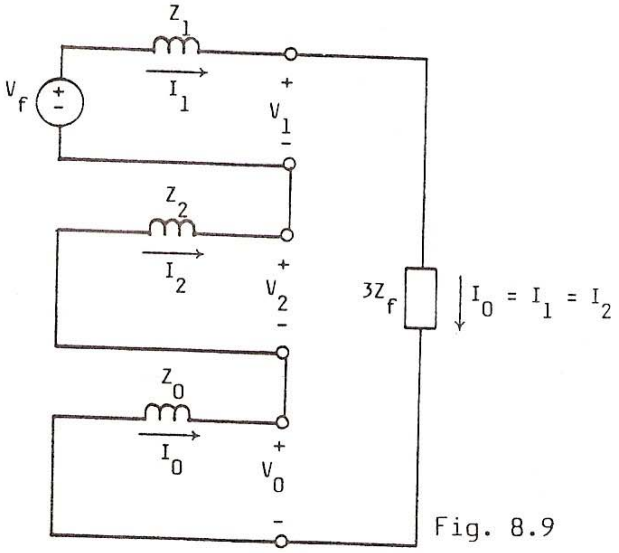


Fig. 8.9

6.2 FALLA DE LINEA A LINEA

Este tipo de falla se enseña en la figura 8.10

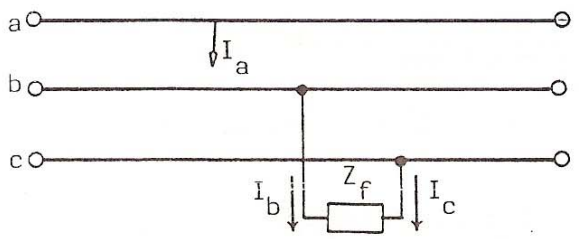


Fig. 8.10

Las condiciones de esta falla son

$$I_a = 0 \qquad I_b = -I_c \qquad V_b - V_c = Z_f I_b \qquad 8.34$$

Si $I_a = 0$, $\quad I_0 + I_1 + I_2 = 0$

Además

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_b \\ -I_b \end{bmatrix}$$

de donde $I_o = 0$, con lo que $V_o = 0$

$$I_1 = -I_2$$

Si $V_b - V_c = Z_f I_b$

$$a^2 V_1 + aV_2 - aV_1 - a^2 V_2 = Z_f(a^2 I_1 + aI_2)$$

agrupando y simplificando

$$(a^2 - a)V_1 - (a^2 - a)V_2 = Z_f(a^2 - a)I_1$$

$$V_1 - V_2 = Z_f I_1$$

también

$$V_f - Z_1 I_1 - Z_2 I_1 = Z_f I_1$$

de donde

$$I_1 = \frac{V_f}{Z_1 + Z_2 + Z_f} \qquad 8.35$$

Estas relaciones nos sugieren que los diagramas de impedancias de secuencia positiva y negativa y la impedancia Z_f deben quedar conectados como se indica en la figura 8.11.

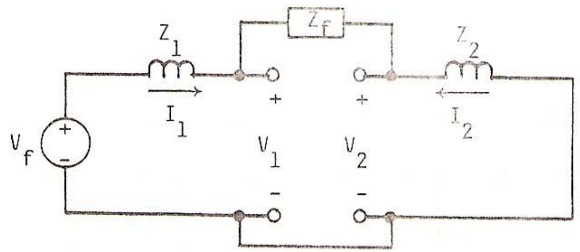


Fig. 8.11

6.3. FALLA DE LINEA A LINEA Y TIERRA

Este tipo de falla se enseña en la figura 8.12

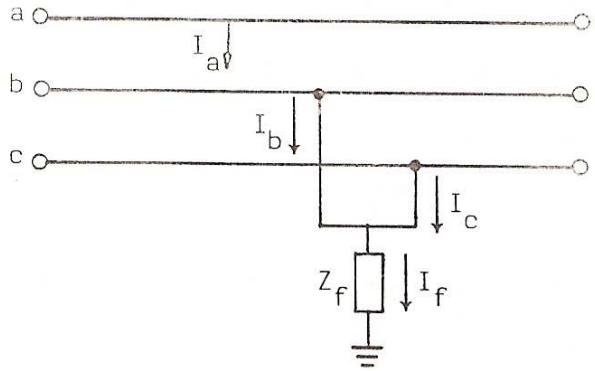


Fig. 8.12

Las condiciones de esta falla son

$$I_a = 0, \qquad V_b = V_c = Z_f(I_b + I_c) \qquad 8.36$$

Si $I_a = 0$, $\quad I_0 + I_1 + I_2 = 0$

Si $V_b = V_c$, $\quad V_0 + a^2V_1 + aV_2 = V_0 + aV_1 + a^2V_2$

Agrupando y simplificando

$$(a^2 - a)V_1 = (a^2 - a)V_2 \qquad \text{ó} \qquad V_1 = V_2$$

Si $V_b = Z_f(I_b + I_c)$

$$V_0 + a^2V_1 + aV_2 = Z_f(I_0 + a^2I_1 + aI_2 + I_0 + aI_1 + a^2I_2)$$

Agrupando y simplificando

$$V_0 + (a^2 + a)V_1 = Z_f[2I_0 + (a^2 + a)I_1 + (a^2 + a)I_2]$$

$$V_0 - V_1 = Z_f(2I_0 - I_1 - I_2)$$

y finalmente

$$V_0 - V_1 = 3Z_fI_0 \qquad 8.36$$

Estas relaciones sugieren que los diagramas de secuencia positiva, negativa y cero y la impedancia Z_f deben quedar conectados en la forma como se indica en la figura 8.13.

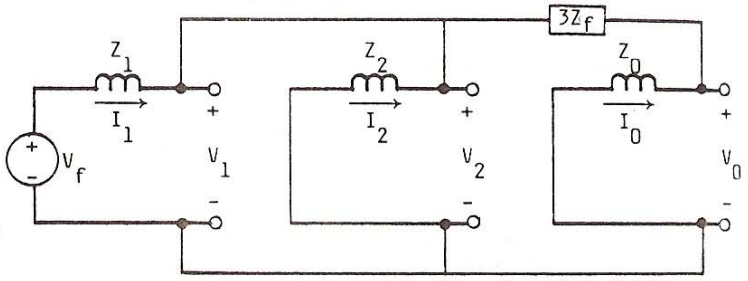


Fig. 8.13

La falla ocurre ahora de línea a línea a tierra a través de la impedancia Z_f en ambas líneas, tal como se enseña en la figura 8.14.

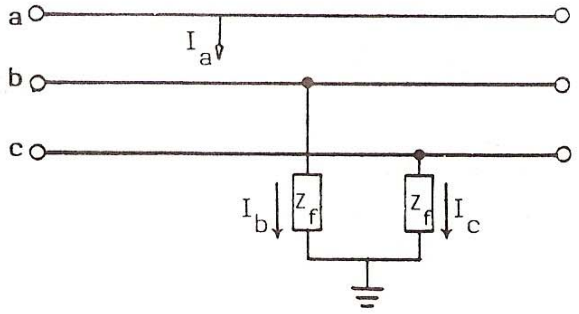


Fig. 8.14

Las condiciones de fallas son las siguientes

$$I_a = 0, \qquad V_b = Z_fI_b, \qquad V_c = Z_fI_c \qquad 8.37$$

$$I_a = I_0 + I_1 + I_2 = 0$$

$$V_b - V_c = Z_f(I_b - I_c)$$

descomponiendo en sus componentes simétricas se tiene

$$a^2V_1 + aV_2 + V_0 - aV_1 - a^2V_2 - V_0$$

$$= Z_f(a^2I_1 + aI_2 + I_0 - aI_1 - a^2I_2 - I_0)$$

Simplificando

$$(a^2 - a)V_1 - (a^2 - a)V_2 = Z_f[(a^2 - a)I_1 - (a^2 - a)I_2]$$

$$V_1 - V_2 = Z_f(I_1 - I_2)$$

y

$$V_1 = V_2 + Z_fI_1 - Z_fI_2 \qquad 8.38$$

De $V_b = Z_fI_b$ se tiene

$$a^2V_1 + aV_2 + V_0 = Z_f(a^2I_1 + aI_2 + I_0)$$

Substituyendo a V_1 por el resultado de la ecuación 8.38 se tiene

$$a^2V_2 + Z_fa^2I_1 - Z_fa^2I_2 + aV_2 + V_0 = Z_f(a^2I_1 + aI_2 + I_0)$$

Simplificando

$$(a^2 + a)V_2 + V_0 = (a^2 + a)Z_fI_2 + Z_fI_0$$

de donde

$$V_0 - V_2 = Z_f I_0 - Z_f I_2$$

y finalmente

$$V_0 = V_2 + Z_f I_0 - Z_f I_2 \qquad 8.39$$

por lo que el modelo se enseña en la figura 8.15.

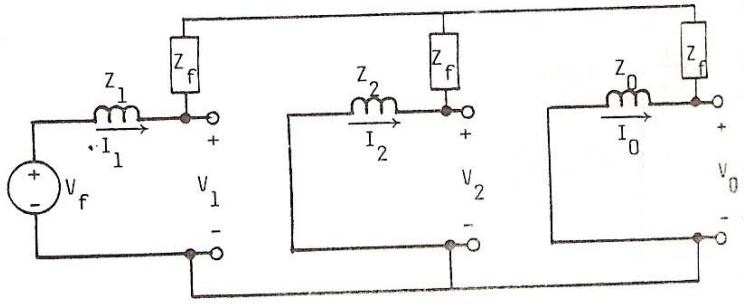


Fig. 8.15

7. ANALISIS DE REDES ELECTRICAS TRIFASICAS CON CARGAS DESBALANCEADAS.

A continuación se presenta, por medio de varios ejemplos, una proposición de análisis de redes eléctricas con cargas desbalanceadas monofásicas de una línea a neutro, monofásica de dos líneas a neutro y monofásica de línea a línea, usando las técnicas de las componentes simétricas y aprovechando la teoría de las fallas a través de impedancias. En el análisis resalta la importancia de las conexiones de los transformadores para las cargas mencionadas.

EJEMPLO 9

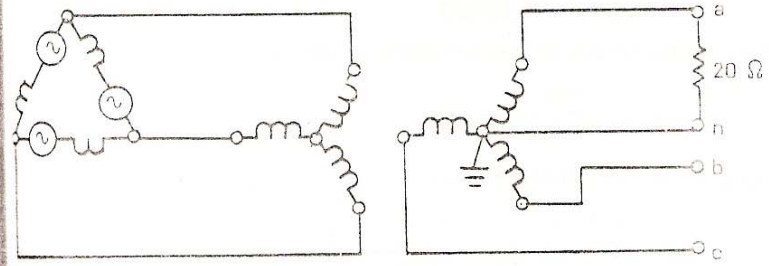
Un generador trifásico conectado en triángulo con voltajes generados balanceados de línea a línea de 500 voltios, alimenta a una carga a través de un transformador Y – Y, tal como se indica en la figura siguiente. A la salida del transformador se coloca una carga monofásica, modelada por una resistencia de 20 ohmios, en la fase a, usando valores por unidad, calcule:

a) La corriente en amperios en la carga y los voltajes de fase en voltios a la salida del transformador.
b) Las corrientes en amperios y voltajes en voltios en los terminales del generador.
c) La potencia activa y reactiva en los terminales del generador.

Los datos de las máquinas son

Generador: 10 KVA, 480 V, X_1 = j.50 pu, X_2 = j.65 pu
X_0 = j.40 pu.

Transformador: 10 KVA, 480 Y - 240 Y V,
$X_1 = X_2 = X_0$ = j.45 pu.



Esto parece un cortocircuito de línea a tierra a través de una resistencia de 20 ohmios y por lo tanto será tratado como tal.

Se selecciona como valores base 10 KVA, 480 voltios en el generador. En estos problemas el subíndice en voltajes y corrientes indica el número de la barra y el superíndice indica la secuencia.

Voltaje generado por unidad

$$E_{g1} = \frac{500}{480} = 1.0417 \text{ pu.}$$

Voltaje base por fase en el generador:

$$V_{base} = \frac{480}{\sqrt{3}} = 277.1281 \text{ voltios}$$

Corriente base en el generador:

$$I_{base1} = \frac{10000}{\sqrt{3} \times 480} = 12.0281 \text{ Amperios}$$

Corriente base en la carga

$$I_{base2} = \frac{10000}{\sqrt{3} \times 240} = 24.0563 \text{ Amperios}$$

Voltaje base por fase en la carga:

$$V_{base2} = \frac{240}{\sqrt{3}} = 138.5641 \text{ voltios}$$

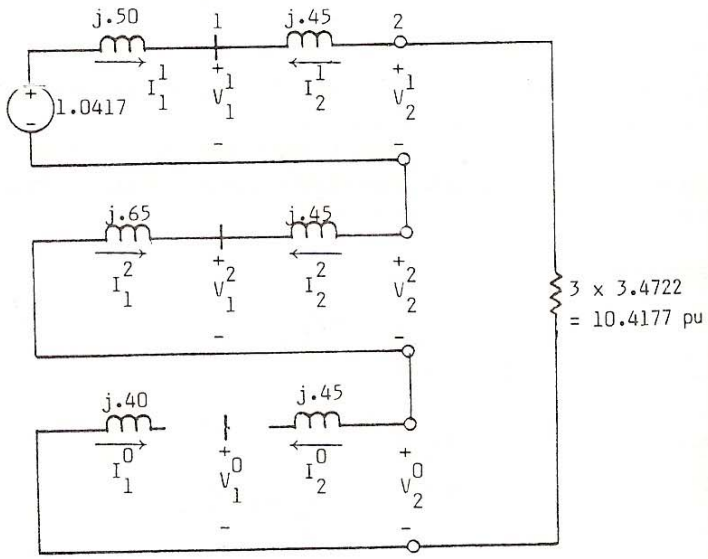
Impedancia base en la carga:

$$Z_{base2} = \frac{(240)^2}{10000} = 5.76 \text{ ohmios}$$

Impedancia por unidad de la resistencia de 20 ohmios

$$R = \frac{20}{5.76} = 3.4722 \text{ pu}$$

El diagrama de secuencia es entonces



a)

$$I_2^1 = I_2^2 = I_2^0 = I_1^1 = I_1^2 = I_1^0 = 0.0$$

$$V_2^1 = 1.0417 - (j.45 + j.50)I_1^1 = 1.0417$$

$$V_2^2 = -(j.65 + j.45)I_1^2 = 0.0$$

$$V_2^0 = -V_2^1 = -1.0417$$

$$I_{a2} = I_2^1 + I_2^2 + I_2^0 = 0.0$$

$$V_{a2} = V_2^1 + V_2^2 + V_2^0 = 1.0417 + 0.0 - 1.0417 = 0.0$$

$$V_{b2} = V_2^0 + a^2V_2^1 + aV_2^2 = (a^2 - 1)1.0417$$

$$= 1.0417 \times \sqrt{3} \,\underline{|210^\circ} = 1.8043\underline{|210^\circ} \text{ pu}$$

$$= 138.5641 \times 1.8043\underline{|210^\circ} = 250.0112\underline{|210^\circ} \text{ Voltios}$$

$$V_{c2} = V_2^0 + aV_2^1 + a^2V_2^2 = (a - 1)1.0417$$

$$= 1.0417 \times \sqrt{3} \,\underline{|150^\circ} = 1.8043\underline{|150^\circ} \text{ pu}$$

$$= 250.0112\underline{|150} \text{ voltios}$$

$$V_{ab2} = \frac{V_{a2} - V_{b2}}{\sqrt{3}} = 1.0417\underline{|30^\circ} \text{ pu} = 240 \times 1.0417\underline{|30^\circ}$$

$$= 250.0112\underline{|30^\circ} \text{ Voltios}$$

$$V_{bc2} = \frac{V_{b2} - V_{c2}}{\sqrt{3}} = 1.0417\underline{|-90^\circ} \text{ pu} = 250.0112\underline{|-90^\circ} \text{ V}$$

$$V_{ca2} = \frac{V_{c2} - V_{a2}}{\sqrt{3}} = 1.0417\angle 150^\circ \text{ pu} = 250.0112\angle 150^\circ \text{ V}$$

b)

$$I_{a1} = I_{b1} = I_{c1} = 0.0$$

$$V_1^1 = 1.0417 \text{ pu} \qquad V_1^2 = 0.0 \qquad V_1^0 = 0.0$$

$$V_A = 1.0417 \text{ pu} = 277.1281 \times 1.0417\angle 0^\circ = 288.6844\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$V_B = 1.0417\angle 240^\circ \text{ pu} = 288.6844\angle 240^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_C = 1.0417\angle 120^\circ \text{ pu} = 288.6844\angle 120^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_{AB} = \frac{V_A - V_B}{\sqrt{3}} = 1.0417\angle 30^\circ \text{ pu} = 480 \times 1.0417\angle 30^\circ$$

$$= 500\angle 30^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_{BC} = \frac{V_B - V_C}{\sqrt{3}} = 1.0417\angle -90^\circ \text{ pu} = 500\angle -90^\circ \text{ Voltios}$$

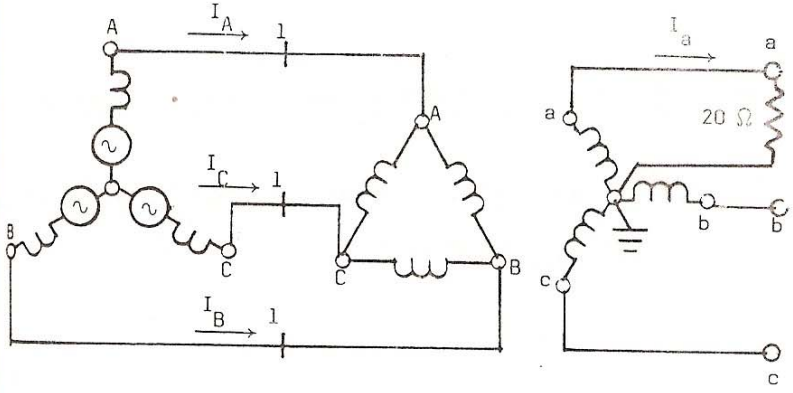
$$V_{CA} = \frac{V_C - V_A}{\sqrt{3}} = 1.0417\angle 150^\circ \text{ pu} = 500\angle 150^\circ \text{ Voltios}$$

c)

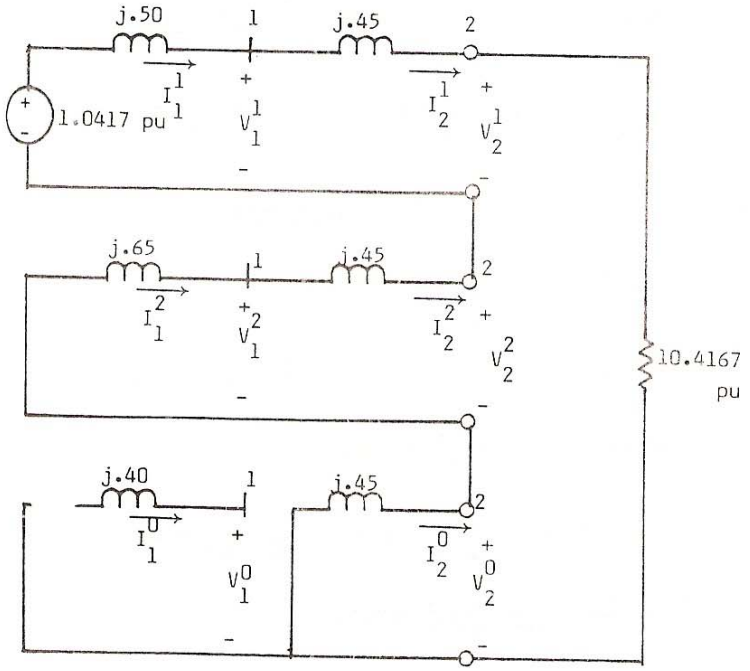
$$S = V_1^1 \times I_1^{*1} + V_1^2 \times I_1^{*2} + V_1^0 \times I_1^{*0} = 0.0$$

EJEMPLO 10

Repetir el Ejemplo 9 si el generador está conectado en estrella y el transformador está conectado en Δ-Y, tal como se indica en la figura siguiente. Se supone que las condiciones de voltajes son las mismas con un generador y transformador diferentes a los anteriores. Los valores de impedancias son los mismos.



El diagrama de secuencia es



a)

$$I_2^1 = I_2^2 = I_2^0 = \frac{1.0417}{10.4167 + j2.50} = .0972\angle -13.4957^\circ$$

$$I_a = 3I_2^0 = .2917\angle -13.4957^\circ \text{ pu} = 24.0563 \times .2917\angle -13.49^\circ$$

$$= 7.0172\angle -13.4957^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_b = I_c = (a^2 + a + 1)I_2^0 = 0.0$$

$$V_2^1 = 1.0417 - j.95 \times .0972\angle -13.4957^\circ = 1.0241\angle -5.0345^\circ$$

$$V_2^2 = -j1.1 \times .0972\angle -13.4957^\circ = .1069\angle -103.4957^\circ$$

$$V_2^0 = -j.45 \times .0972\angle -13.4957^\circ = .0437\angle -103.4957^\circ$$

$$V_a = V_2^0 + V_2^1 + V_2^2 = 1.0129\angle -13.4802^\circ \text{ pu}$$

$$= 140.3581\angle -13.4902^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_b = V_2^0 + a^2V_2^1 + aV_2^2 = .9845\angle -120.2185^\circ \text{ pu}$$

$$= 136.4142\angle -120.2185^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_c = V_2^0 + aV_2^1 + a^2V_2^2 = 1.0914\angle 118.4582^\circ \text{ pu}$$

$$= 151.2222\angle 118.4582^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_{ab} = \frac{V_a - V_b}{\sqrt{3}} = .9254\angle 22.5382^\circ \text{ pu}$$

$$= 240 \times .9254\angle 22.5382^\circ = 222.1087\angle 22.5382^\circ \text{ Volts}$$

$$V_{bc} = \frac{V_b - V_c}{\sqrt{3}} = 1.0452\angle -89.2246^\circ \text{ pu}$$

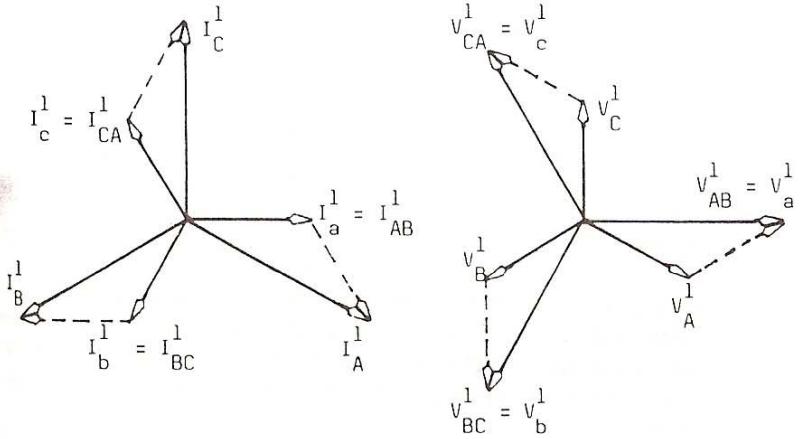
$$= 250.8516\angle -89.2246^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_{ca} = \frac{V_c - V_a}{\sqrt{3}} = 1.1098\angle 141.5310^\circ \text{ pu}$$

$$= 266.3518\angle 141.5310^\circ \text{ Voltios}$$

b)

Como el transformador tiene la conexión triángulo-estrella se busca la relación entre los valores del primario y el secundario.



De la gráfica anterior se obtienen las siguientes relaciones en valores por unidad.

$$I_1^1 = I_A^1 = I_a^1|\underline{-30^\circ} = I_2^1|\underline{-30^\circ} = .0972|\underline{-43.4957^\circ}$$

$$I_1^2 = I_A^2 = I_a^2|\underline{30^\circ} = I_2^2|\underline{30^\circ} = .0972|\underline{16.5043^\circ}$$

$$V_A^1 = V_a^1|\underline{-30^\circ} = V_2^1|\underline{-30^\circ} = 1.0241|\underline{-35.0345^\circ}$$

$$V_A^2 = V_a^2|\underline{30^\circ} = V_2^2|\underline{30^\circ} = .1069|\underline{-73.4957^\circ}$$

por lo que

$$I_A = I_1^1 + I_1^2 = .1684|\underline{-13.4997^\circ} \text{ pu}$$

$$= 12.0281 \times .1684|\underline{-13.4997} = 2.0255|\underline{-13.4997^\circ} \text{ A.}$$

$$I_B = a^2 I_1^1 + a I_1^2 = .1684|\underline{166.5003^\circ} \text{ pu.}$$

$$= 2.0255|\underline{166.5003^\circ} \text{ Amperios}$$

$$I_C = a I_1^1 + a^2 I_1^2 = 0.0 + j0.0$$

$$V_1^1 = V_A^1 + jX_1 I_1^1 = 1.0241|\underline{-35.0345^\circ} + j.45 \times .0972|\underline{-43.4967}$$

$$= 1.0314|\underline{-32.6238^\circ}$$

$$V_1^2 = V_A^2 + jX_2 I_1^2 = .1069|\underline{-73.4957^\circ} + j.45 \times .0972|\underline{16.5043^\circ}$$

$$= .0632|\underline{-73.4698^\circ}$$

$$V_A = V_1^1 + V_1^2 = 1.0801|\underline{-34.8186^\circ} \text{ pu.}$$

$$= 299.3184|\underline{-34.8186^\circ} \text{ Voltios}$$

$$V_B = a^2 V_1^1 + a V_1^2 = .9721|\underline{-153.8386^\circ} \text{ pu}$$

$$= 269.3963|\underline{-153.8386^\circ} \text{ Voltios}$$

$$V_C = a V_1^1 + a^2 V_1^2 = 1.0453|\underline{90.7784^\circ} \text{ pu}$$

$$= 289.6820|\underline{90.7784^\circ} \text{ Voltios}$$

$$V_{AB} = \frac{V_A - V_B}{\sqrt{3}} = 1.0214|\underline{-6.1031^\circ} \text{ pu}$$

$$= 480 \times 1.0214|\underline{-6.1031^\circ} = 490.2951|\underline{-6.1031^\circ} \text{ Volts}$$

$$V_{BC} = \frac{V_B - V_C}{\sqrt{3}} = .9847|\underline{-120.2153^\circ} \text{ pu}$$

$$= 472.6420|\underline{-120.2153^\circ} \text{ Voltios}$$

$$V_{CA} = \frac{V_C - V_A}{\sqrt{3}} = 1.0914|\underline{118.4617^\circ} \text{ pu}$$

$$= 523.8772|\underline{118.4617^\circ} \text{ Voltios}$$

c) Potencias

$$S = V_1^1 I_1^{*1} + V_1^2 I_1^{*2} = 1.0314|\underline{-32.6238^\circ} \times .0972|\underline{43.4957^\circ}$$

$$+ .0632|\underline{-73.4698^\circ} \times .0972|\underline{-16.5043^\circ}$$

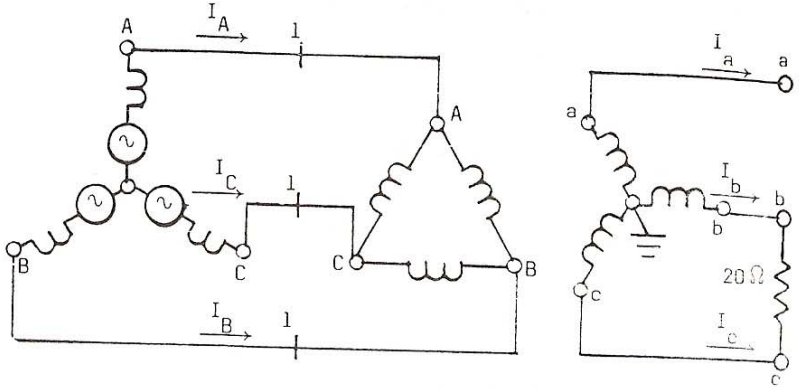
$$= .0985 + j.0128 \text{ pu}$$

por lo que

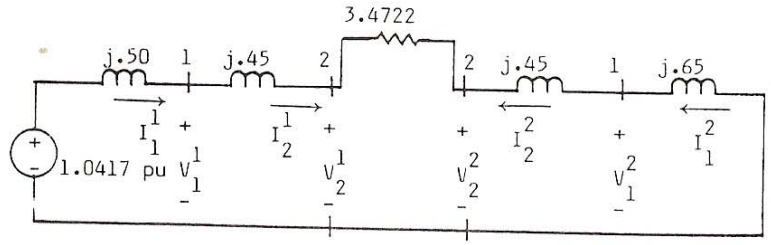
P = 985 vatios Q = 128 vars

EJEMPLO 11

Repetir el Ejemplo 10 si la resistencia de 20 ohmios se coloca entre las fases b y c, tal como lo indica la figura siguiente



Esta situación es similar a un cortocircuito entre fases a través de una resistencia y por lo tanto será tratada como tal. El diagrama de secuencias es el siguiente.



a) Corriente y voltajes en la carga.

$$I_2^1 = -I_2^2 = \frac{1.0417}{3.4722 + j2.05} = .2583\angle -30.5578^\circ$$

$$I_2^0 = 0.0 + j0.0$$

$$I_a = I_2^1 + I_2^2 = 0.0 + j0.0$$

$$I_b = a^2 I_2^1 + a I_2^2 = (a^2 - a) I_2^1 = .4474\angle -120.5578^\circ \text{ pu}$$

$$= 24.0563 \times .4474\angle -120.5578^\circ = 10.7628\angle -120.5578^\circ \text{ A}$$

$$I_c = a I_2^1 + a^2 I_2^2 = (a - a^2) I_2^1 = .4474\angle 59.4422^\circ \text{ pu}$$

$$= 10.7628\angle 59.4422^\circ \text{ Amperios}$$

$$V_2^0 = 0.0 + j0.0$$

$$V_2^1 = 1.0417 - j.95 \times .2583\angle -30.5578^\circ = .9410\angle -12.9869^\circ$$

$$V_2^2 = j1.1 \times .2583\angle -30.5578^\circ = .2841\angle 59.4422^\circ$$

$$V_a = V_2^1 + V_2^2 = 1.0619\angle 1.7955^\circ \text{ pu} = 147.1412\angle 1.7955^\circ \text{ V}$$

$$V_b = a^2 V_2^1 + a V_2^2 = 1.1519\angle -143.4766^\circ \text{ pu} = 160.0277\angle -143.4766^\circ \text{ V}$$

$$V_c = a V_2^1 + a^2 V_2^2 = .6644\angle 101.7561^\circ \text{ pu} = 92.3391\angle 101.7561^\circ \text{ V}$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = 293.1911\angle 19.9142^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = 215.6831\angle -120.5954^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_{ca} = V_c - V_a = 186.7547\angle 152.6527^\circ \text{ Voltios}$$

b) Corrientes y voltajes en el generador.

$$I_1^1 = I_2^1\angle -30^\circ = .2583\angle -60.5578^\circ$$

$$I_1^2 = I_2^2\angle 30^\circ = .2583\angle 179.4422^\circ$$

$$I_A = I_1^1 + I_1^2 = .2582\angle -120.5560^\circ \text{ pu}$$

$$= 3.1062\angle -120.5560^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_B = a^2 I_1^1 + a I_1^2 = .2582\angle -120.5560^\circ \text{ pu}$$

$$= 3.1062\angle -120.5560^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_C = a I_1^1 + a^2 I_1^2 = .5166\angle 59.4422^\circ \text{ pu}$$

$$= 6.2137\angle 59.4422^\circ \text{ Amperios}$$

$$V_A^1 = V_2^1\angle -30^\circ = .9410\angle -42.9869^\circ$$

$$V_A^2 = V_2^2\angle 30^\circ = .2841\angle 89.4422^\circ$$

$$V_1^1 = V_A^1 + jX_1 I_1^1 = .9410\angle -42.9869^\circ + j.45 \times .2583\angle -60.5578^\circ$$

$$= .9825\angle -36.4282^\circ$$

$$V_1^2 = V_A^2 + jX_2 I_1^2 = .2841\angle 89.4422^\circ + j.45 \times .2583\angle 179.4422^\circ$$

$$= .1679\angle 89.4441^\circ$$

$$V_A = V_1^1 + V_1^2 = .8945\angle -27.6798^\circ \text{ pu}$$

$$= 247.8911\angle -27.6798^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_B = a^2 V_1^1 + a V_1^2 = 1.1496\angle -155.5721^\circ \text{ pu}$$

$$= 318.5865\angle -155.5721^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_C = a V_1^1 + a^2 V_1^2 = .9266\angle 74.0533^\circ \text{ pu}$$

$$= 256.7869\angle 74.0533^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = 509.8595\angle 1.8657^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_{BC} = V_B - V_C = 522.9010\angle -133.6020^\circ \text{ Voltios}$$

$$V_{CA} = V_C - V_A = 391.5079\angle 112.3650^\circ \text{ Voltios}$$

c) Potencias

$$S = V_1^1 I_1^{*1} + V_1^2 I_1^{*2} = .9825\angle -36.4282^\circ \times .2583\angle 60.5578^\circ$$

$$+ .1679\angle 89.4441^\circ \times .2583\angle -179.4422^\circ = .2316 + j.0604$$

por lo que

$$P = 2316.25 \text{ vatios} \qquad Q = 603.5395 \text{ vars}$$

o también

$$P = R \times |I_b|^2 = 20 \times (10.7628)^2 = 2316.75 \text{ vatios}$$

Y de otra forma

$$S = V_A I_A^* + V_B I_B^* + V_C I_C^*$$

$$= 247.8911\angle -27.6798^\circ \times 3.1062\angle 120.5560^\circ$$

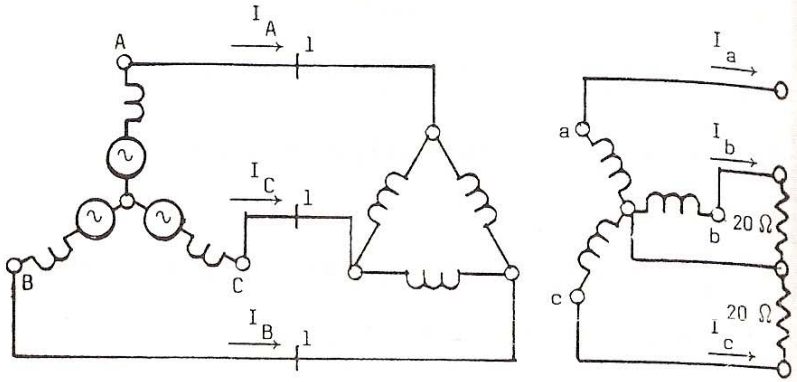
$$+ 318.5865\angle -155.5721^\circ \times 3.1062\angle 120.5560^\circ$$

$$+ 256.7869\angle 74.0533^\circ \times 6.2137\angle -59.4422^\circ$$

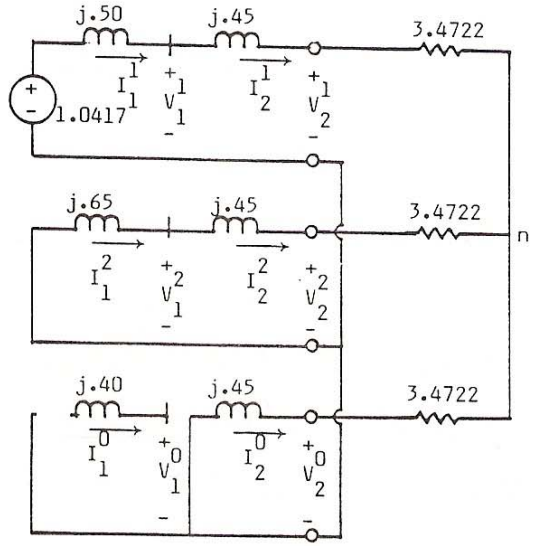
$$= 2315.9942 \text{ vatios} + 603.7640 \text{ vars}$$

EJEMPLO 12

Repetir los Ejemplos anteriores si se coloca una resistencia de 20 ohmios de la fase b a neutro y una resistencia de 20 ohmios de la fase c a neutro, tal como lo indica la figura siguiente.



Estos parecen cortocircuitos de línea a línea y tierra a través de resistencias y se analizarán como tal. El diagrama de secuencias es el siguiente.



$$I_2^1 = \frac{1.0417}{3.4722 + j.95 + \dfrac{(3.4722 + j1.1)(3.4722 + j.45)}{6.9444 + j1.55}}$$

$$= .1932\angle -14.3312^\circ$$

$$V_2^1 = 1.0417 - j.95 \times .1932\angle -14.3312^\circ = 1.0120\angle -10.1228^\circ$$

$$V_{2n}^1 = V_{2n}^2 = V_{2n}^0$$

$$= 1.0120\angle -10.1228^\circ - 3.4722 \times .1932\angle -14.3312^\circ$$

$$= .3465\angle -1.9599^\circ$$

$$I_2^2 = -\frac{.3465\angle -1.9599^\circ}{3.4722 + j1.100} = .0951\angle 160.4618^\circ$$

$$I_2^0 = -\frac{.3465\angle -1.9599^\circ}{3.4722 + j.450} = .0990\angle 170.6557^\circ$$

$$V_2^2 = .3465\angle -1.9599^\circ + 3.4722 \times .0951\angle 160.4618^\circ$$

$$= .1046\angle 70.3889^\circ$$

$$V_2^0 = .3465\angle -1.9599^\circ + 3.4722 \times .0990\angle 170.6557^\circ$$

$$= .0445\angle 80.7985^\circ$$

$$I_a = I_2^0 + I_2^1 + I_2^2 = 0.0 + j0.0$$

$$I_b = .0990\angle 170.6557^\circ + .1932\angle 225.6688^\circ + .0951\angle 280.4618^\circ$$

$$= .3048\angle -134.9751^\circ \text{ pu} = 7.3323\angle -134.9751^\circ \text{ Amperios}$$

$$I_c = .0990\angle 170.6557^\circ + .1932\angle 105.6688^\circ + .0951\angle 40.4618^\circ$$

$$= .2750\angle 106.3799^\circ \text{ pu} = 6.6149\angle 106.3799^\circ \text{ Amperios}$$

$$V_a = .0445\angle 80.7985^\circ + 1.0120\angle -10.1228^\circ + .1046\angle 70.3889^\circ$$

$= 1.0391|\underline{-1.9578º}$ pu $= 143.9828|\underline{-1.9578º}$ Voltios

$V_b = .0445|\underline{80.7985º} + 1.0120|\underline{229.8772º} + .1046|\underline{190.3889º}$

$= 1.0584|\underline{-134.9703º}$ pu $= 146.6507|\underline{-134.9703º}$ V.

$V_c = .0445|\underline{80.7985º} + 1.0120|\underline{109.8782º} + .1046|\underline{310.3889º}$

$= .9547|\underline{106.3798º}$ pu $= 132.2839|\underline{106.3798º}$ Voltios

$I_1^1 = I_2^1|\underline{-30º} = .1932|\underline{-44.3312º}$

$I_1^2 = I_2^2|\underline{30º} = .0951|\underline{190.4618º}$

$I_1^0 = 0.0 + j0.0$

$I_A = .1932|\underline{-44.3312º} + .0951|\underline{190.4618º}$

$= .1587|\underline{-73.6446º}$ pu $= 1.9093|\underline{-73.6446º}$ Amperios

$I_B = .1932|\underline{195.6688º} + .0951|\underline{310.4618º}$

$= .1769|\underline{-134.9406º}$ pu $= 2.1169|\underline{-134.9406º}$ Amperios

$I_C = .1932|\underline{75.6688º} + .0951|\underline{70.4618º}$

$= .2880|\underline{73.9513º}$ pu $= 3.4642|\underline{73.9513º}$ Amperios

$V_A^1 = V_2^1|\underline{-30º} = 1.0120|\underline{-40.1228º}$

$V_A^2 = V_2^2|\underline{30º} = .1046|\underline{100.3889º}$

$V_1 = V_A^1 + jX_1 I_1^1 = 1.0120|\underline{-40.1228º} + j.45\ .1932|\underline{-44.3312º}$

$= 1.0221|\underline{-35.2594º}$

$V_1^2 = V_A^2 + jX_2 I_1^2 = .1046|\underline{100.3889º} + j.45 \times .0951|\underline{190.4618º}$

$= .0618|\underline{100.3703º}$

$V_A = 1.0221|\underline{-35.2594º} + .0618|\underline{100.3703º}$

$= .9789|\underline{-32.7257º}$ pu $= 271.2750|\underline{-32.7257º}$ Voltios

$V_B = 1.0221|\underline{204.7406º} + .0618|\underline{220.3703º}$

$= 1.0818|\underline{-154.3759º}$ pu $= 299.7904|\underline{-154.3759º}$ Volts

$V_C = 1.0221|\underline{84.7406º} + .0618|\underline{340.3703º}$

$= 1.0085|\underline{81.3371º}$ pu $= 279.4962|\underline{81.3371º}$ Voltios

$V_{AB} = V_A - V_B = 498.8127|\underline{-1.9536º}$ Voltios

$V_{BC} = V_B - V_C = 512.2470|\underline{-127.5801º}$ Voltios

$V_{CA} = V_C - V_A = 462.1000|\underline{113.7513º}$ Voltios

$S = V_1^1 I_1^{*1} + V_1^2 I_1^{*2} + V_1^0 I_1^{*0}$

$= 1.0221|\underline{-35.2594º} \times .1932|\underline{44.1312º}$

$+ .0618|\underline{100.3703º} \times .0951|\underline{-190.4618º}$

$= .1950 + j.0252$

por lo que

$P = 1950$ vatios $\qquad Q = 252$ vars

o también

$P = R|I_b|^2 + R|I_c|^2 = 20[(7.3323)^2 + (6.6149)^2]$

$= 1950.3905$ vatios

8. ANALISIS DE FALLAS ASIMETRICAS USANDO EL METODO DE LAS MATRICES DE IMPEDANCIA DE SECUENCIA DE LAS BARRAS.

Se pueden hacer los cálculos de fallas asimétricas de manera rápida y sencilla si se poseen las matrices de impedancias de secuencia de las barras. El método consiste en representar a las matrices de impedancias de barras por el equivalente de rastrillo y luego conectar estas matrices de secuencia a través de los puntos de falla de acuerdo al tipo de falla, es decir, en serie los equivalentes de rastrillo de las matrices de impedancia de las tres secuencias para una falla de línea a tierra; en paralelo los equivalentes de rastrillo de las matrices de impedancia de secuencias positiva y negativa para una falla de línea a línea; y en paralelo los equivalentes de rastrillo de las matrices de impedancias de las tres secuencias para una falla de línea a línea y tierra. Esto permite calcular las corrientes de secuencia en el punto de falla, con lo que se calcula el voltaje de cada secuencia en cada barra. Con estos voltajes de secuencia y con las impedancias de secuencia entre las diferentes barras, se calculan las corrientes de secuencia entre barras. Finalmente, usando la transformación que relaciona a las corrientes y voltajes de secuencia con las corrientes y voltajes de fase, respectivamente, se calculan las corrientes y voltajes de fase. A continuación se ilustra este procedimiento para cada tipo de falla.

8.1 FALLA DE LINEA A TIERRA

Sea un sistema de 4 barras en donde ocurre una falla de línea a tierra en la fase a de la barra 1. Se conectan los 3 diagramas de secuencia como lo indica la figura 8.16.

$Z^1_{11}, Z^1_{22}, Z^1_{33}$ y Z^1_{44} son los valores de la diagonal principal de la matriz impedancia de barra de secuencia positiva. Igualmente, $Z^2_{11}, Z^2_{22}, Z^2_{33}, Z^2_{44}$ y $Z^0_{11}, Z^0_{22}, Z^0_{33}, Z^0_{44}$ son los valores de la diagonal principal de las matrices impedancias de barra de secuencia negativa y cero, respectivamente. No aparecen los valores de las matrices fuera de la diagonal para no complicar el dibujo, pero habrá que tomarlas en cuenta en cada uno de los cálculos.

De la figura 8.16 se obtiene

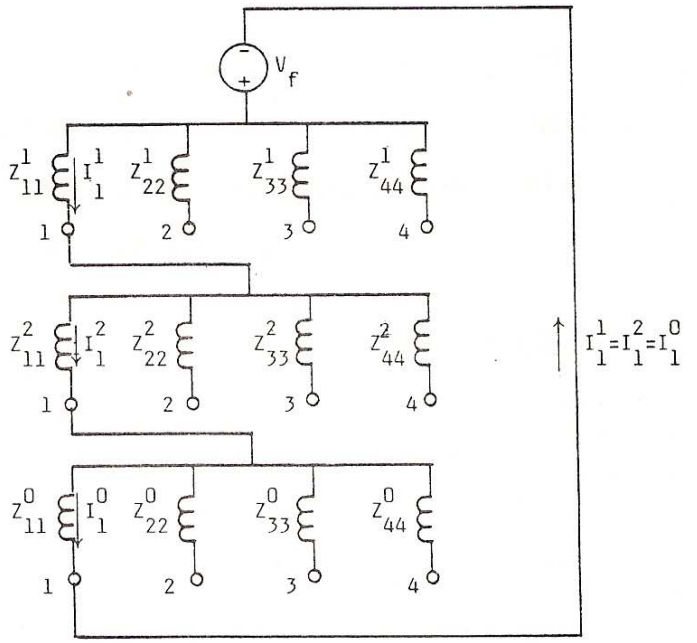


Fig. 8.16

$$I^0_1 = I^1_1 = I^2_1 = \frac{V_f}{Z^0_{11} + Z^1_{11} + Z^2_{11}}$$

$$V^1_1 = V_f - Z^1_{11} I^1_1 \qquad V^2_1 = - Z^2_{11} I^2_1 \qquad V^0_1 = - Z^0_{11} I^0_1$$

$$V^1_2 = V_f - Z^1_{12} I^1_1 \qquad V^2_2 = - Z^2_{12} I^2_1 \qquad V^0_2 = - Z^0_{12} I^0_1$$

Las corrientes de secuencia entre las barras 1 y 2 son

$$I^1_{12} = \frac{V^1_1 - V^1_2}{Z^1_{12}} \qquad I^2_{12} = \frac{V^2_1 - V^2_2}{Z^2_{12}} \qquad I^0_{12} = \frac{V^0_1 - V^0_2}{Z^0_{12}}$$

Las corrientes de fase en la falla son

$$I_a = I_1^0 + I_1^1 + I_1^2 = \frac{3V_f}{Z_{11}^0 + Z_{11}^1 + Z_{11}^2}$$

$$I_b = I_1^0 + a^2 I_1^1 + a I_1^2 = 0.0$$

$$I_c = I_1^0 + a I_1^1 + a^2 I_1^2 = 0.0$$

Generalizando, para una falla de línea a tierra en la fase a de cualquier barra k, las corrientes de secuencia en la falla son

$$I_k^0 = I_k^1 = I_k^2 = \frac{V_f}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.40$$

Los voltajes de secuencia en la barra de falla son

$$V_k^1 = V_f - Z_{kk}^1 I_k^1 = V_f - \frac{V_f Z_{kk}^1}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2}$$

$$= \frac{(Z_{kk}^0 + Z_{kk}^2)V_f}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.41$$

$$V_k^2 = -Z_{kk}^2 I_k^2 = -\frac{Z_{kk}^2 V_f}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.42$$

$$V_k^0 = -Z_{kk}^0 I_k^0 = -\frac{Z_{kk}^0 V_f}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.43$$

Los voltajes de secuencia en cualquier barra n debido a la falla en la barra k son

$$V_n^1 = V_f - Z_{kn}^1 I_k^1 = V_f\left(1 - \frac{Z_{kn}^1}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2}\right)$$

$$= \frac{(Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2 - Z_{kn}^1)V_f}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.44$$

$$V_n^2 = -Z_{kn}^2 I_k^2 = -\frac{Z_{kn}^2 V_f}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.45$$

$$V_n^0 = -Z_{kn}^0 I_k^0 = -\frac{Z_{kn}^0 V_f}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.46$$

Las corrientes de secuencia entre las barras k y n son

$$I_{kn}^0 = \frac{V_k^0 - V_n^0}{Z_{kn}^0} \qquad I_{kn}^1 = \frac{V_k^1 - V_n^1}{Z_{kn}^1} \qquad I_{kn}^2 = \frac{V_k^2 - V_n^2}{Z_{kn}^2} \qquad 8.47$$

Las corrientes y voltajes de fase en la barra fallada son

$$I_{ka} = I_k^0 + I_k^1 + I_k^2 = \frac{3V_f}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.48$$

$$I_{kb} = I_k^0 + a^2 I_k^1 + a I_k^2 = (1 + a + a^2) I_k^0 = 0 \qquad 8.49$$

$$I_{kc} = I_k^0 + aI_k^1 + a^2 I_k^2 = (1 + a + a^2)I_k^0 = 0 \qquad 8.50$$

$$V_{ka} = V_k^0 + V_k^1 + V_k^2 = \frac{(Z_{kk}^0 + Z_{kk}^2 - Z_{kk}^2 - Z_{kk}^0)V_f}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} = 0 \qquad 8.51$$

$$V_{kb} = V_k^0 + a^2 V_k^1 + aV_k^2 \qquad 8.52$$

$$V_{kc} = V_k^0 + aV_k^1 + a^2 V_k^2 \qquad 8.53$$

Los voltajes de fase en cualquier barra n debido a una falla en la barra k son

$$V_{na} = V_n^0 + V_n^1 + V_n^2$$

$$= \frac{(Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2 - Z_{kn}^0 - Z_{kn}^1 - Z_{kn}^2)V_f}{Z_{kk}^0 + Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.54$$

$$V_{nb} = V_n^0 + a^2 V_n^1 + aV_n^2 \qquad 8.55$$

$$V_{nc} = V_n^0 + aV_n^1 + a^2 V_n^2 \qquad 8.56$$

8.2 FALLA DE LINEA A LINEA

En el sistema anterior ocurre ahora un cortocircuito entre las fases b y c de la barra 1. Se conectan los diagramas de secuencia positiva y negativa en paralelo como se enseña en la figura 8.17.

De esta figura se obtiene

$$I_1^1 = -I_1^2 = \frac{V_f}{Z_{11}^1 + Z_{11}^2}$$

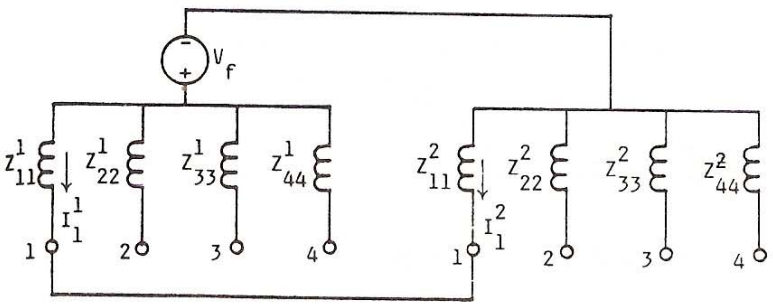


Fig. 8.17

$$V_1^1 = V_f - Z_{11}^1 I_1^1 = V_f - \frac{Z_{11}^1 V_f}{Z_{11}^1 + Z_{11}^2} = \frac{Z_{11}^2 V_f}{Z_{11}^1 + Z_{11}^2}$$

$$V_1^2 = -Z_{11}^2 I_1^2 = Z_{11}^2 I_1^1 = \frac{Z_{11}^2 V_f}{Z_{11}^1 + Z_{11}^2} = V_1^1$$

$$V_2^1 = V_f - Z_{12}^1 I_1^1 = V_f - \frac{Z_{12}^1 V_f}{Z_{11}^1 + Z_{11}^2}$$

$$= \frac{(Z_{11}^1 + Z_{11}^2 - Z_{12}^1)V_f}{Z_{11}^1 + Z_{11}^2}$$

$$V_2^2 = -Z_{12}^2 I_1^2 = Z_{12}^2 I_1^1 = \frac{Z_{12}^2 V_f}{Z_{11}^1 + Z_{11}^2}$$

$$V_{1a} = V_1^1 + V_1^2 = \frac{2Z_{11}^2 V_f}{Z_{11}^1 + Z_{11}^2}$$

$$V_{1b} = a^2V_1^1 + aV_1^2 \qquad V_{1c} = aV_1^1 + a^2V_1^2$$

$$V_{2a} = V_2^1 + V_2^2 = \frac{(Z_{11}^1 + Z_{11}^2 - Z_{12}^1 + Z_{12}^2)V_f}{Z_{11}^1 + Z_{11}^2}$$

$$V_{2b} = a^2V_2^1 + aV_2^2 \qquad V_{2c} = aV_2^1 + a^2V_2^2$$

Generalizando

$$I_k^1 = -I_k^2 = \frac{V_f}{Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.57$$

$$V_k^1 = V_k^2 = \frac{Z_{kk}^2 V_f}{Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.58$$

$$V_n^1 = \frac{(Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2 - Z_{kn}^1)V_f}{Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.59$$

$$V_n^2 = \frac{Z_{kn}^2 V_f}{Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.60$$

$$I_{ka} = I_k^1 + I_k^2 = 0 \qquad 8.61$$

$$I_{kb} = a^2I_k^1 + aI_k^2 = (a^2 - 1)I_k^1 = -j\sqrt{3}\, I_k^1 \qquad 8.62$$

$$I_{kc} = aI_k^1 + a^2I_k^2 = (a - a^2)I_k^1 = j\sqrt{3}\, I_k^1 = -I_{kb} \qquad 8.63$$

$$V_{ka} = V_k^1 + V_k^2 = 2V_k^1 = \frac{2Z_{kk}^2 V_f}{Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.64$$

$$V_{kb} = a^2V_k^1 + aV_k^2 = (a^2 + a)V_k^1 = -V_k^1 = -V_k^2 \qquad 8.65$$

$$V_{kc} = aV_k^1 + a^2V_k^2 = (a^2 + a)V_k^1 = -V_k^1 = -V_k^2 = V_{kb} \qquad 8.66$$

$$V_{na} = V_n^1 + V_n^2 = \frac{(Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2 - Z_{kn}^1 + Z_{kn}^2)V_f}{Z_{kk}^1 + Z_{kk}^2} \qquad 8.67$$

$$V_{nb} = a^2V_n^1 + aV_n^2 \qquad 8.68$$

$$V_{nc} = aV_n^1 + a^2V_n^2 \qquad 8.69$$

$$I_{kn}^m = \frac{V_k^m - V_n^m}{Z_{kn}^m} \qquad m = 0, 1, 2 \qquad 8.70$$

8.3 FALLA DE LINEA A LINEA Y TIERRA

En el sistema anterior ocurre ahora un cortocircuito entre las fases b, c y tierra de la barra 1. Se conectan los diagramas de secuencia positiva, negativa y cero en paralelo, como se indica en la figura 8.18.

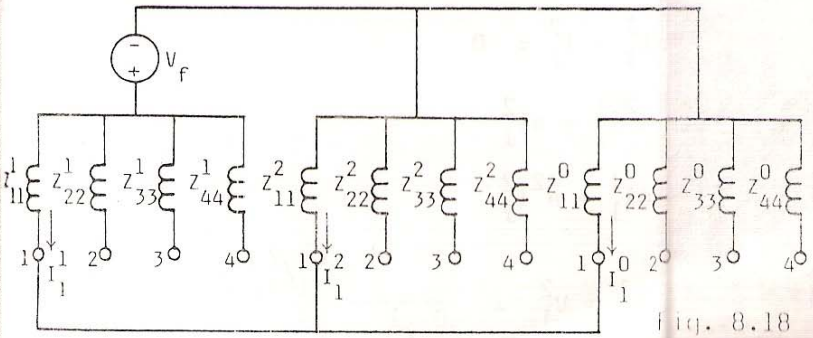


Fig. 8.18

De la figura 8.18 se obtiene

$$I_1^0 + I_1^1 + I_1^2 = 0$$

$$I_1^1 = \frac{V_f}{Z_{11}^1 + Z_{11}^2 Z_{11}^0/(Z_{11}^2 + Z_{11}^0)} = \frac{(Z_{11}^0 + Z_{11}^2)V_f}{Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0}$$

$$V_1^1 = V_f - Z_{11}^1 I_1^1 = V_f - \frac{Z_{11}^1 (Z_{11}^0 + Z_{11}^2)V_f}{Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0}$$

$$= \frac{Z_{11}^0 Z_{11}^2 V_f}{Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0}$$

$$V_1^0 = V_1^1 = V_1^2$$

$$I_1^2 = -\frac{V_1^2}{Z_{11}^2} = -\frac{Z_{11}^0 V_f}{Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0}$$

$$I_1^0 = -\frac{V_1^0}{Z_{11}^0} = -\frac{Z_{11}^2 V_f}{Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0}$$

$$I_{1a} = I_1^0 + I_1^1 + I_1^2 = 0$$

$$I_{1b} = I_1^0 + a^2 I_1^1 + a I_1^2$$

$$I_{1c} = I_1^0 + a I_1^1 + a^2 I_1^2$$

$$V_{1a} = V_1^0 + V_1^1 + V_1^2 = \frac{3Z_{11}^0 Z_{11}^2 V_f}{Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0}$$

$$V_{1b} = V_1^0 + a^2 V_1^1 + a V_1^2 = (a^2 + a + 1)V_1^0 = 0$$

$$V_{1c} = V_1^0 + a V_1^1 + a^2 V_1^2 = (a^2 + a + 1)V_1^0 = 0$$

$$V_2^1 = V_f - Z_{12}^1 I_1^1 = V_f - \frac{Z_{12}^1 (Z_{11}^0 + Z_{11}^2)V_f}{Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0}$$

$$= \frac{(Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0 - Z_{12}^1 Z_{11}^0 - Z_{12}^1 Z_{11}^2)V_f}{Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0}$$

$$V_2^2 = -Z_{12}^2 I_1^2 = \frac{Z_{12}^2 Z_{11}^0 V_f}{Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0}$$

$$V_2^0 = -Z_{12}^0 I_1^0 = \frac{Z_{12}^0 Z_{11}^2 V_f}{Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0}$$

$$V_{2a} = V_2^0 + V_2^1 + V_2^2$$

$$= \frac{(Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0 - Z_{12}^1 Z_{11}^0 - Z_{12}^1 Z_{11}^2 + Z_{12}^2 Z_{11}^0 + Z_{12}^0 Z_{11}^2)V_f}{Z_{11}^0 Z_{11}^1 + Z_{11}^1 Z_{11}^2 + Z_{11}^2 Z_{11}^0}$$

$$V_{2b} = V_2^0 + a^2 V_2^1 + a V_2^2$$

$$V_{2c} = V_2^0 + aV_2^1 + a^2V_2^2$$

$$I_{12}^0 = \frac{V_1^0 - V_2^0}{z_{12}^0} \qquad I_{12}^1 = \frac{V_1^1 - V_2^1}{z_{12}^1} \qquad I_{12}^2 = \frac{V_1^2 - V_2^2}{z_{12}^2}$$

Generalizando

$$I_k^0 + I_k^1 + I_k^2 = 0 \tag{8.71}$$

$$I_k^1 = \frac{(Z_{kk}^0 + Z_{kk}^2)V_f}{Z_{kk}^0 Z_{kk}^1 + Z_{kk}^1 Z_{kk}^2 + Z_{kk}^2 Z_{kk}^0} \tag{8.72}$$

$$I_k^2 = -\frac{Z_{kk}^0 V_f}{Z_{kk}^0 Z_{kk}^1 + Z_{kk}^1 Z_{kk}^2 + Z_{kk}^2 Z_{kk}^0} \tag{8.73}$$

$$I_k^0 = -\frac{Z_{kk}^2 V_f}{Z_{kk}^0 Z_{kk}^1 + Z_{kk}^1 Z_{kk}^2 + Z_{kk}^2 Z_{kk}^0} \tag{8.74}$$

$$V_k^0 = V_k^1 = V_k^2 = \frac{Z_{kk}^0 Z_{kk}^2 V_f}{Z_{kk}^0 Z_{kk}^1 + Z_{kk}^1 Z_{kk}^2 + Z_{kk}^2 Z_{kk}^0} \tag{8.75}$$

$$V_n^1 = \frac{(Z_{kk}^0 Z_{kk}^1 + Z_{kk}^1 Z_{kk}^2 + Z_{kk}^2 Z_{kk}^0 - Z_{kn}^1 Z_{kk}^0 - Z_{kn}^1 Z_{kk}^2)V_f}{Z_{kk}^0 Z_{kk}^1 + Z_{kk}^1 Z_{kk}^2 + Z_{kk}^2 Z_{kk}^0} \tag{8.76}$$

$$V_n^2 = \frac{Z_{kn}^2 Z_{kk}^0 V_f}{Z_{kk}^0 Z_{kk}^1 + Z_{kk}^1 Z_{kk}^2 + Z_{kk}^2 Z_{kk}^0} \tag{8.77}$$

$$V_n^0 = \frac{Z_{kn}^0 Z_{kk}^2 V_f}{Z_{kk}^0 Z_{kk}^1 + Z_{kk}^1 Z_{kk}^2 + Z_{kk}^2 Z_{kk}^0} \tag{8.78}$$

EJEMPLO 13

Resolver el Ejemplo 6 usando el método de matrices de impedancias de secuencia de las barras.

Las matrices de impedancia de barras para las diferentes secuencias en el Ejemplo 6 con la ayuda del Ejemplo 1 del Capítulo 3 son

$$Z^1 = Z^2 = j\begin{bmatrix} .1670 & .1359 & .0774 & .0508 & .0318 & .0498 \\ .1359 & .2085 & .1187 & .0778 & .0488 & .0763 \\ .0774 & .1187 & .1968 & .1290 & .0809 & .1265 \\ .0508 & .0778 & .1290 & .2030 & .1276 & .0829 \\ .0318 & .0488 & .0809 & .1276 & .1605 & .0520 \\ .0498 & .0763 & .1265 & .0829 & .0520 & .2420 \end{bmatrix}$$

$$Z^0 = j\begin{bmatrix} .3000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .1046 & .0320 & .0320 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .0320 & .1833 & .1833 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .0320 & .1833 & .6593 & .0000 & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & \infty & .0000 \\ .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .0000 & .6000 \end{bmatrix}$$

De las ecuaciones 8.72, 8.73 y 8.74 se tiene

$$I_3^1 = \frac{(.1833 + .1968) \times 1.0}{j(.1833 \times .1968 + .1968 \times .1968 + .1968 \times .1833)}$$

$$= \frac{.3801}{j.1109} = 3.4281\angle -90^\circ$$

$$I_3^2 = -\frac{.1833}{j.1109} = 1.6532\angle 90^\circ$$

$$I_3^0 = -\frac{.1968}{j.1109} = 1.7749\angle 90^\circ$$

De la ecuación 8.75

$$V_3^0 = V_3^1 = V_3^2 = \frac{.1833 \times .1968}{.1109} = .3253\angle 0^\circ$$

De la ecuación 8.76, 8.77 y 8.78

$$V_2^1 = \frac{.1109 - .1187 \times .1833 - .1187 \times .1968}{.1109} = .5931\angle 0^\circ$$

$$V_2^2 = \frac{.1187 \times .1833}{.1109} = .1962\angle 0^\circ$$

$$V_2^0 = \frac{.0320 \times .1968}{.1109} = .0568\angle 0^\circ$$

$$V_4^1 = \frac{.1109 - .1290 \times .1833 - .1290 \times .1968}{.1109} = .5578\angle 0^\circ$$

$$V_4^2 = \frac{.1290 \times .1833}{.1109} = .2133\angle 0^\circ$$

$$V_4^0 = \frac{.1833 \times .1968}{.1109} = .3253\angle 0^\circ$$

$$V_5^1 = \frac{.1109 - .0809 \times .1833 - .0809 \times .1968}{.1109} = .7227\angle 0^\circ$$

$$V_5^2 = \frac{.0809 \times .1833}{.1109} = .1337\angle 0^\circ$$

$$V_5^0 = \frac{.0000 \times .1968}{.1109} = .0000$$

Los voltajes en las barras 1 y 6 por estar detrás de transformadores estrella-triángulo, se pueden calcular en la misma forma en el secundario de los transformadores y luego se les da la respectiva rotación para encontrar los voltajes en el primario.

$$V_1^1 = \frac{.1109 - .0774 \times .1833 - .0774 \times .1968}{.1109} = .7347\angle 0^\circ$$

$$V_1^2 = \frac{.0774 \times .1833}{.1109} = .1280\angle 0^\circ$$

$$V_1^0 = \frac{.0000 \times .1968}{.1109} = .0000$$

$$V_6^1 = \frac{.1109 - .1265 \times .1833 - .1265 \times .1968}{.1109} = .5663\angle 0^\circ$$

$$V_6^2 = \frac{.1265 \times .1833}{.1109} = .2091\angle 0^\circ$$

$$V_2^0 = \frac{.0000 \times .1968}{.1109} = .0000$$

Estos voltajes en el primario de los respectivos transformadores son

$$V^1_{A1} = V^1_1 \angle -150º = .7347 \angle -150º$$

$$V^2_{A1} = V^2_1 \angle 150º = .1280 \angle 150º$$

$$V^0_{A1} = .0000$$

$$V^1_{A6} = V^2_6 \angle 30º = .2091 \angle 30º$$

$$V^2_{A6} = V^1_6 \angle -30º = .5663 \angle -30º$$

$$V^0_{A6} = .0000$$

Las corrientes de secuencia son

$$I^1_{23} = \frac{.5921 - .3253}{j.227} = 1.1753 \angle -90º$$

$$I^2_{23} = \frac{.1962 - .3253}{j.227} = .5687 \angle 90º$$

$$I^0_{23} = \frac{.0568 - .3253}{j.567} = .4735 \angle 90º$$

$$I^1_{43} = \frac{.5578 - .3253}{j.181} = 1.2845 \angle -90º$$

$$I^2_{43} = \frac{.2133 - .3253}{j.181} = .6188 \angle 90º$$

$$I^0_{43} = \frac{.3253 - .3253}{j.476} = .0000$$

$$I^1_{54} = \frac{.7227 - .5578}{j.128} = 1.2883 \angle -90º$$

$$I^2_{54} = \frac{.1337 - .2133}{j.128} = .6219 \angle 90º$$

$$I^0_{54} = \frac{.0000 - .3253}{\infty} = .0000$$

Las corrientes en el primario de los transformadores se pueden calcular primero en el secundario y luego se les da la correspondiente rotación.

$$I^1_{12} = \frac{.7347 - .5921}{j.120} = 1.1875 \angle -90º$$

$$I^2_{12} = \frac{.1280 - .1962}{j.120} = .5683 \angle 90º$$

$$I^0_{12} = \frac{.0000 - .0568}{\infty} = .0000$$

$$I^1_{63} = \frac{.5663 - .3253}{j.250} = .9640 \angle -90º$$

$$I^2_{63} = \frac{.2091 - .3253}{j.250} = .4640 \angle 90º$$

$$I^0_{63} = \frac{.0000 - .3253}{\infty} = .0000$$

Y en el primario

$$I^1_{A1} = I^1_{12} \angle -150º = 1.1875 \angle -240º$$

$$I^2_{A1} = I^2_{12} \angle 150º = .5683 \angle 240º$$

$$I^0_{A1} = .0000$$

$$I^1_{A6} = I^2_{63}\angle 30^\circ = .4640\angle 120^\circ$$

$$I^2_{A6} = I^1_{63}\angle -30^\circ = .9640\angle -120^\circ$$

$$I^0_{A6} = .0000$$

Los valores de fase se calculan en la forma acostumbrada. Comparando estos resultados con los obtenidos por el método circuital se observa que existe entre algunos de ellos cierta diferencia. Pensamos que esto se debe a los pocos números decimales con que se trabajó la matriz impedancia de barra. Por esta razón se recomienda ser más precisos en el tratamiento de dichas matrices.

PROBLEMAS:

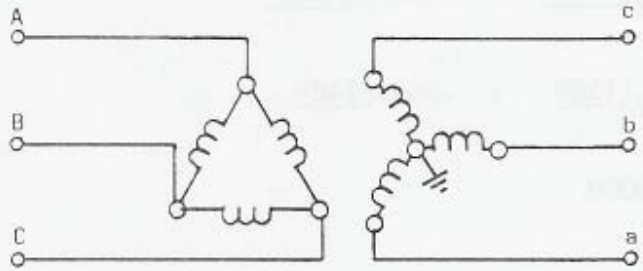
1. Al transformador de la figura siguiente se le aplican los voltajes $V_{AB} = 2200\angle 0^\circ$ V, $V_{BC} = 2200\angle -120^\circ$ $V_{CA} = 2200\angle -240^\circ$ V. Si ocurre un cortocircuito de línea a tierra en la fase a del secundario del transformador, calcular en amperios y en KVA.

a) La corriente de cortocircuito en cada fase del secundario del transformador.
b) La corriente de cada fase y en cada línea del primario del transformador.
c) La potencia de cortocircuito en el primario del transformador.

Trabajar con componentes simétricas y en valores por unidad, seleccionando una base adecuada.

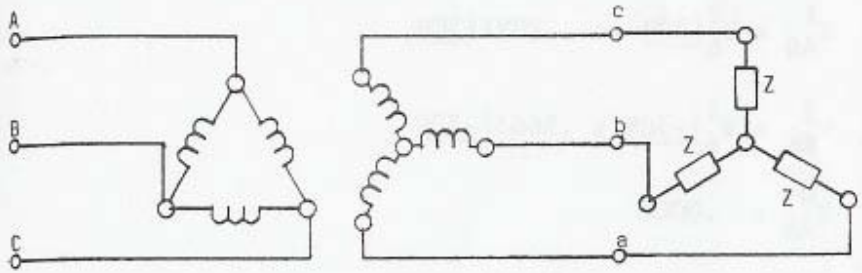
Los datos del transformador son:

20 KVA, 2400/240 V, $X_1 = X_2 = X_0 = j.25$ pu.



2. Al transformador del problema anterior se le coloca en el secundario una carga trifásica balanceada conectada en estrella con valores de $Z = 20\angle 30^\circ$ ohmios por fase. Para una falla de línea a tierra en la carga, tomando en cuenta la corriente de prefalla calcular en amperios:

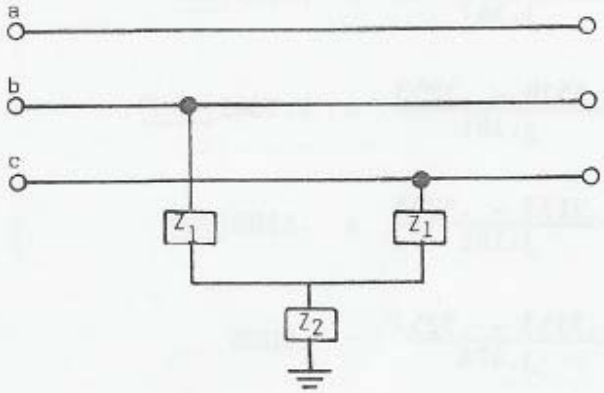
a) La corriente de cortocircuito en cada fase del secundario.
b) La corriente en cada fase de la carga.
c) La corriente en cada fase y en cada línea del primario del transformador.



3. Resolver el problema N° 2 para una falla de línea a línea y tierra en los terminales de la carga.

4. Resolver el problema N° 2 si al transformador se le aplican los voltajes $V_{AB} = 2000\angle 0^\circ$ V $V_{BC} = 2100\angle -100^\circ$ V.

5. En una línea trifásica ocurre un cortocircuito de línea a línea y tierra a través de impedancias, tal como se indica en la figura siguiente. Deducir las interconexiones de los diferentes diagramas de secuencia conjuntamente con las diferentes impedancias.



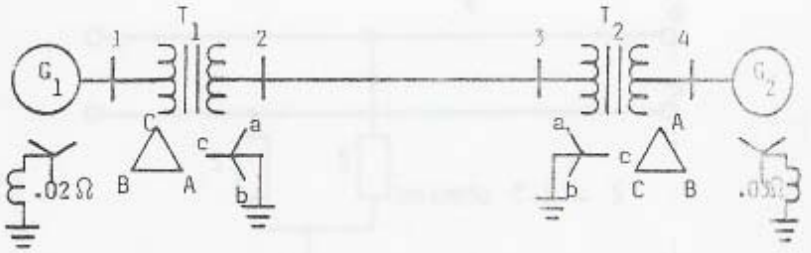
6. En el sistema siguiente:

G_1: 1200 KVA, 600 V, $X_1 = X_2$ = j.12 pu, X_0 = j.04 pu
G_2: 1000 KVA, 600 V, $X_1 = X_2$ = j.10 pu, X_0 = j.05 pu
T_1: 1500 KVA, 650 Δ - 4160 Y V, $X_1 = X_2 = X_0$ = j.05 pu
T_2: 1200 KVA, 600 Δ - 4500 Y V, $X_1 = X_2 = X_0$ = j.06 pu
LINEA 2-3: $X_1 = X_2$ = 2 ohmios, X_0 = 5 ohmios.

Para un cortocircuito de línea a tierra en la barra 3, tomando como base 1000 KVA, 600 V en el generador G_2 y despreciando las corrientes de prefalla calcular en amperios:

a) Las corrientes del cortocircuito.
b) Las corrientes en la línea.
c) Las corrientes en cada generador.

Antes del cortocircuito $V_{ab} = 4200 \angle 0°$ en la barra 3.



7. Resolver el problema N° 6 para una falla de línea a línea en la barra 2.

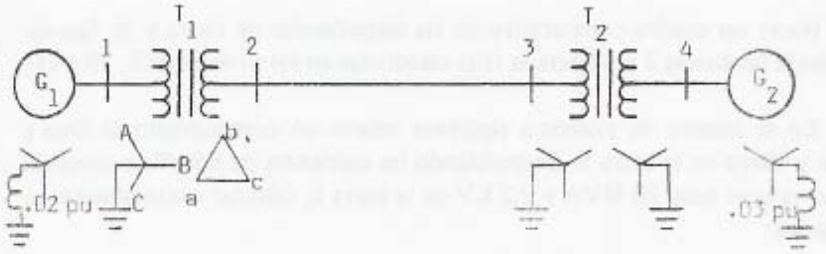
8. En el siguiente sistema ocurre un cortocircuito de doble línea a tierra en la barra 2. Despreciando las corrientes de prefalla:

a) Calcular en amperios las corrientes del cortocircuito.
b) Calcular en amperios las corrientes de cada generador debido al cortocircuito.
c) Calcular en ohmios las impedancias de tierra y de fase vistas desde la barra 3 hacia el cortocircuito.

Seleccionar los valores del generador G_1 como valores base. Los datos del sistema son:

G_1: 25 MVA, 7.2 KV, $X_1 = X_2$ = j.12 pu, X_0 = j.06 pu.
G_2: 30 MVA, 7.8 KV, $X_1 = X_2$ = j.10 pu. X_0 = j.04 pu.
T_1: 30 MVA, 7.5 Y - 2.5Δ KV, $X_1 = X_2 = X_0$ = j.08 pu.
T_2: 20 MVA, 6.9 Y - 2.4 Y KV, $X_1 = X_2 = X_0$ = j.10 pu.
LINEA 2-3: $X_1 = X_2$ = .07 ohmios, X_0 = ,12 ohmios.

Antes del cortocircuito $V_{ab} = 2.5 \angle 0°$ KV en la barra 2.

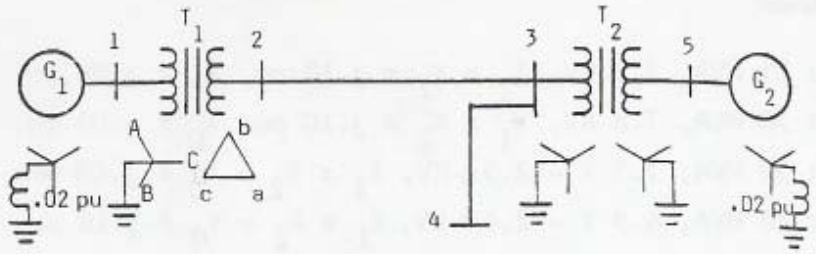


9. Los datos del sistema de potencia que se indican son los siguientes:

G_1: 20 MVA, 6.6 KV, $X_1 = X_2$ = j.12 pu, X_0 = j.05 pu.
G_2: 20 MVA, 6.6 KV, $X_1 = X_2$ = j.12 pu, X_0 = j.05 pu.
T_1: 30 MVA, 7.5 Y - 2.2Δ KV, $X_1 = X_2 = X_0$ = j.10 pu.
T_2: 30 MVA, 7.2 Y - 2.6Y KV, $X_1 = X_2 = X_0$ = j.10 pu.
LINEA 2-3: $X_1 = X_2$ = j.06 ohmios, X_0 = j.10 ohmios.
LINEA 3-4: $X_1 = X_2$ = j.04 ohmios, X_0 = j.07 ohmios.

a) Tomando como base a 25 MVA, 2.4 KV en la barra 4, calcular circuitalmente en amperios la corriente de los generadores para un cortocircuito de línea a tierra en la barra 4, si $V_{ab} = 2.5 \angle 0°$ en esa barra antes del cortocircuito.

c) Calcular en ohmios las impedancias de tierra y de fase vistas desde la barra 3 y desde la barra 2 hacia la falla.



10. Repetir el problema 9 para una falla de línea a línea en la barra 4.

11. Repetir el problema 9 para una falla de línea a tierra en la barra 4.

12. Hacer un cuadro comparativo de las impedancias de tierra y de fase vistas desde las barras 2 y 3 hacia la falla calculadas en los problemas 9, 10 y 11.

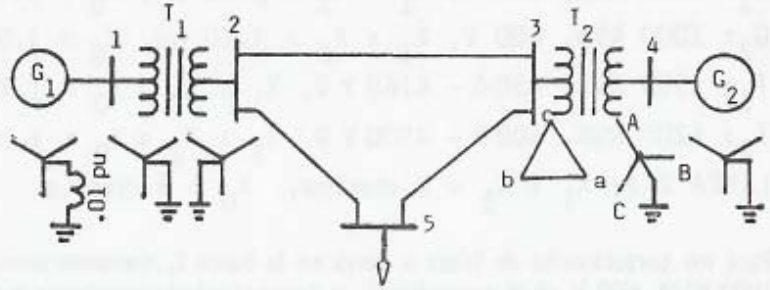
13. En el sistema de potencia siguiente ocurre un cortocircuito de línea a línea y tierra en la barra 5. Despreciando las corrientes de prefalla y tomando como valores base 20 MVA y 2.2 KV en la barra 5, calcular circuitalmente en amperios:

a) Las corrientes de las tres fases en el cortocircuito.
b) Las corrientes de las tres fases en cada generador.
c) La corriente en cada neutro.
d) Calcular las impedancias de tierra y de fase vistas desde cada extremo de cada línea hacia el cortocircuito.

Los datos del sistema son:

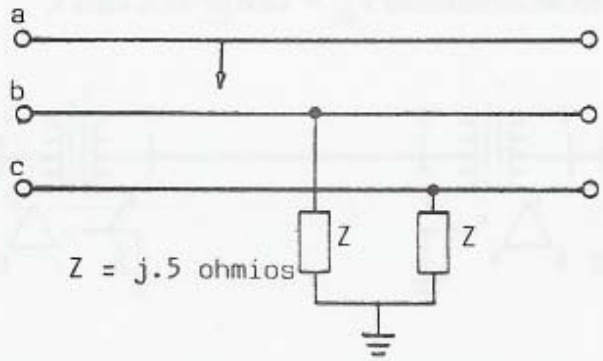
G_1: 20 MVA, 7.5 KV, $X_1 = X_2$ = j.12 pu, X_0 = j.04 pu
G_2: 25 MVA, 7.2 KV, $X_1 = X_2$ = j.15 pu, X_0 = j.05 pu
T_1: 30 MVA, 7.4 Y - 2.5 Y KV, $X_1 = X_2 = X_0$ = j.10 pu
T_2: 15 MVA, 6.9 Y - 2.4 Δ KV, $X_1 = X_2 = X_0$ = j.10 pu
LINEA 2-3: $X_1 = X_2$ = j.07 ohmios, X_0 = j.12 ohmios
LINEA 2-5: $X_1 = X_2$ = j.05 ohmios, X_0 = j.10 ohmios
LINEA 3-5: $X_1 = X_2$ = j.06 ohmios, X_0 = j.10 ohmios

Antes del cortocircuito $V_a = 1.45\angle 0°$ KV en la barra 5.



14. Repetir el problema 6 si el cortocircuito de línea a tierra ocurre a través de una impedancia de j.5 ohmios.

15. Repetir el problema 7 si la falla de línea a línea ocurre en la barra 2 a través de impedancias como se indica en la figura.



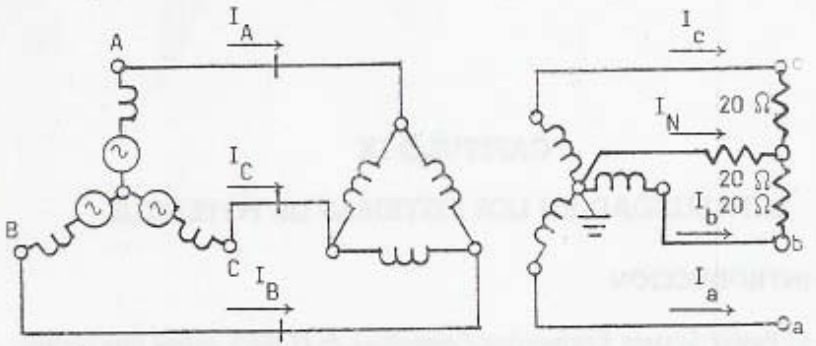
16. Un generador trifásico conectado en estrella con voltajes generados balanceados de línea a línea de 480 voltios alimenta a una carga a través de un transformador Δ – Y, tal como se indica en la figura. Por medio de las componentes simétricas y de los valores por unidad calcular:

a) La corriente en amperios y los voltajes de línea a línea en los terminales de la carga.
b) La corriente en amperios y los voltajes de línea a línea en los terminales del generador.
c) La potencia aparente en los terminales del generador.

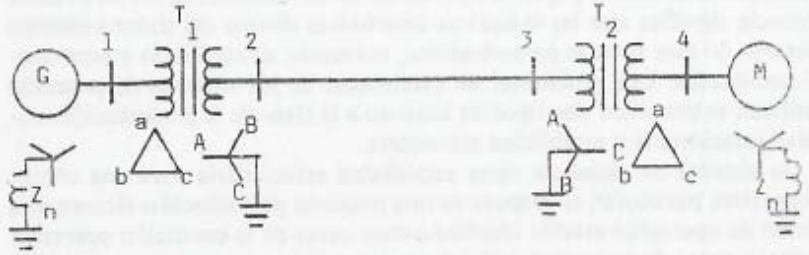
Los datos del sistema son:

G: 15 KVA, 500 V, $X_1 = X_2 = j.50$ pu, $X_0 = j.40$ pu.

T: 15 KVA, 500 Δ - 250 Y V, $X_1 = X_2 = X_0 = j.35$ pu.



17. Un generador alimenta a un motor sincrónico a través de transformadores y línea de transmisión, tal como lo indica la figura.



Los datos del sistema son

G: 20 MVA, 6.6 KV, $X_1 = X_2 = j.12$ pu, $X_0 = j.05$ pu.
$Z_n = j.01$ pu.

M: 15 MVA, 6.6 KV, $X_1 = X_2 = j.10$ pu, $X_0 = j.04$ pu.
$Z_n = j.01$ pu.

T_1: 20 MVA, 7.5 Δ - 13.8 Y KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu.

T_2: 30 MVA, 6.9 Δ - 13.8 Y KV, $X_1 = X_2 = X_0 = j.10$ pu.

LINEA 2-3: $X_1 = X_2 = j1.0$ ohmios, $X_0 = j1.6$ ohmios.

El motor toma de la línea 9.8 MW con factor de potencia de .82 en atraso a voltajes balanceados entre líneas de 6.1 KV ($V_{ab} = 6.1 \angle 0°$ KV).

Si ocurre un cortocircuito de línea a línea a tierra en la barra 2, tomando en cuenta las corrientes de prefalla, calcular en cada fase:

a) Las corrientes de cortocircuito.

b) Las corrientes de la línea, del motor y del generador durante el cortocircuito.

c) Los voltajes de línea en los terminales del generador durante el cortocircuito.

d) Las impedancias de fase Z_{ab}, Z_{bc} y Z_{ca} en ohmios vistas desde los terminales del generador hacia la carga durante el cortocircuito.

Tomar como base los valores del generador y hacer todos los cálculos en voltios, amperios y ohmios. Usar las componentes simétricas y trabajar en valores por unidad.

18. Resolver el problema 6 usando las matrices impedancias de barra.

19. Resolver el problema 9 para una falla de línea a línea en la barra 4, usando las matrices impedancia de barra.

20. Resolver el problema 13 usando las matrices impedancia de barra.

CAPITULO IX

ESTABILIDAD EN LOS SISTEMAS DE POTENCIA

1. INTRODUCCION

El Power System Engineering Committee de la IEEE define una perturbación en un sistema de potencia como "un cambio repentino o una secuencia de cambios en uno o más de los parámetros del sistema, o en una o más de las cantidades operativas"[1]. Asimismo divide las perturbaciones en dos tipos: pequeñas perturbaciones y grandes perturbaciones. Estabilidad en un sistema de potencia significa que las máquinas sincrónicas dentro del sistema pueden recuperarse de esas fuerzas perturbadoras, mantener su equilibrio y permanecer sincronizadas. Los problemas de estabilidad de los sistemas de potencia se clasifican entonces en dos tipos de acuerdo a la clase de la perturbación: estabilidad estacionaria y estabilidad transitoria.

Un sistema de potencia tiene estabilidad estacionaria para una condición operativa particular, si después de una pequeña perturbación alcanza una condición de operación estable idéntica o muy cerca de la condición operativa que existía antes de la perturbación. Esto es también conocido como estabilidad de pequeñas perturbaciones en un sistema de potencia. Las perturbaciones en este caso suelen ser conexión o desconexión de cargas pequeñas.

Un sistema de potencia tiene estabilidad transitoria para una condición operativa particular y para una perturbación particular si después de la perturbación alcanza una aceptable condición de operación estable. Las perturbaciones en este caso suelen ser cortocircuitos, conexión o desconexión de líneas y la aplicación o remoción de grandes cargas.

En este Capítulo se tratará exclusivamente el análisis de estabilidad transitoria cuando ocurren cortocircuitos trifásicos o cuando ocurren conexiones o desconexiones de líneas.

[1] IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. Julio 1982. Páginas 1894 - 1898.

2. MAQUINAS SINCRONICAS

En el estudio de estabilidad es necesario conocer el modelo de la máquina sincrónica. Estas máquinas se dividen básicamente en dos tipos, de acuerdo a la forma de construcción del rotor: máquina sincrónica de rotor cilíndrico y máquina sincrónica de rotor con polos salientes.

2.1 MAQUINAS SINCRONICAS DE ROTOR CILINDRICO

En este tipo de máquina el rotor tiene una reluctancia uniforme, por lo que la reactancia X del bobinado de la armadura también es uniforme. Si el voltaje en los terminales es V y la corriente de la armadura es I, el voltaje E generado internamente en la máquina actuando como generador es

$$E = V + RI + jXI \qquad 9.1.$$

siendo R la resistencia óhmica del bobinado.

El diagrama vectorial de voltajes y corrientes simplificado se muestra en la figura 9.1 y el circuito equivalente del generador con rotor cilíndrico, enseñando una sola fase, se muestra en la figura 9.2.

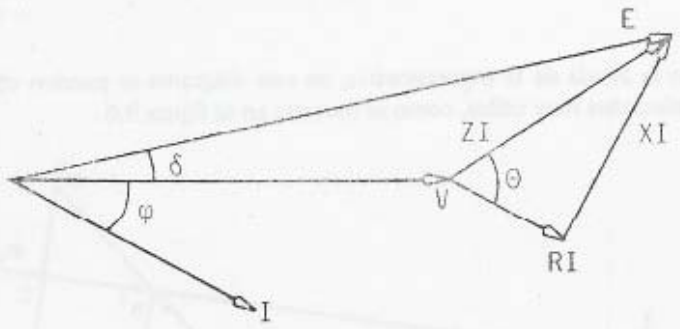


Fig. 9.1

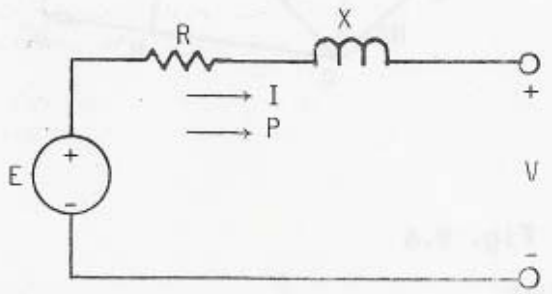


Fig. 9.2

El ángulo δ es el ángulo entre el voltaje generado E y el voltaje en terminales V y es llamado ángulo de potencia. La potencia transferida por el generador hacia los terminales es

$$P = |V| \times |I| \times \text{coseno}\,\varphi = \text{Re}\, VI^* = \text{Re}\left[\frac{V(E - V)^*}{Z^*}\right]$$

$$P = \text{Re}\left[\frac{|V||E|}{|Z|}\lfloor\Theta - \delta - \frac{|V|^2}{|Z|}\lfloor\Theta\right]$$

$$= \frac{|V||E|}{|Z|}\,\text{coseno}(\Theta - \delta) - \frac{|V|^2}{|Z|}\,\text{coseno}\,\Theta$$

$$= \frac{|V||E|}{|Z|}\,\text{coseno}(\Theta - \delta) - \frac{|V|^2 R}{|Z|^2} \qquad 9.2$$

Si se desprecia la resistencia del bobinado

$$R = 0, \qquad \Theta = 90^\circ \qquad Z = X \qquad y$$

$$P = \frac{|V||E|}{X}\,\text{coseno}(90^\circ - \delta) = \frac{|V||E|}{X}\,\text{seno}\,\delta$$

$$= P_{max}\,\text{seno}\,\delta \qquad 9.3$$

La gráfica de potencia transferida P vs. ángulo de potencia δ cuando se desprecia la resistencia R se muestra en la figura 9.3

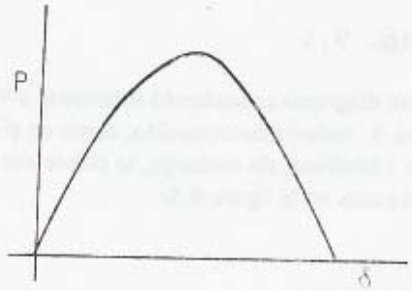


Fig. 9.3

2.2 MAQUINA SINCRONICA CON ROTOR DE POLOS SALIENTES

En este tipo de máquina la situación es mucho más compleja, ya que los ejes directo y en cuadratura del rotor presentan reluctancias diferentes a la fuerza magnetomotriz de la reacción de la armadura. Por esta razón no es posible representar en un solo gráfico al modelo eléctrico de esta máquina, la cual tiene una reactancia X_d para el eje directo de diferente magnitud a la reactancia X_q para el eje en cuadratura, siendo X_d mayor que X_q, con sus respectivas caídas de tensión $X_d I_d$ y $X_q I_q$; en donde I_d es la componente de la corriente de armadura en el eje directo e I_q la componente de la corriente de armadura en el eje en cuadratura. El voltaje generado internamente en la máquina actuando como generador es entonces

$$E = V + RI + jX_d I_d + jX_q I_q \qquad 9.4$$

y el diagrama fasorial se enseña en la figura 9.4.

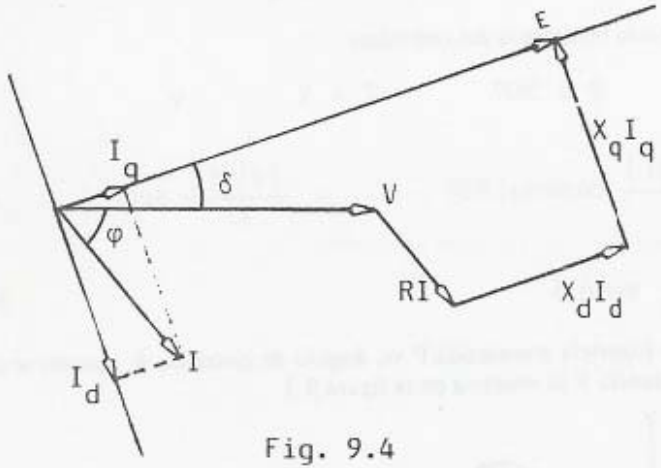


Fig. 9.4

No es posible construir este diagrama conociendo solamente a V, I, R y X_d, siendo el ángulo de potencia δ todavía desconocido, como en el caso de la máquina sincrónica con rotor cilíndrico; sin embargo, se puede construir el diagrama siguiendo los siguientes pasos en la figura 9.5:

1.- Dibuje a V e I $\angle\varphi$.
2.- Dibuje a RI en fase con I a partir de V.
3.- Dibuje a $jX_q I$ y ubique el punto A.

4.- Dibuje el eje q, el cual pasa por el origen y por el punto A.
5.- Dibuje al eje d perpendicular al eje q.
6.- Proyecte a I sobre q y sobre d y consiga las componentes I_q e I_d.
7.- Dibuje a $X_d I_d$ y $X_q I_q$ y consiga al vector E.

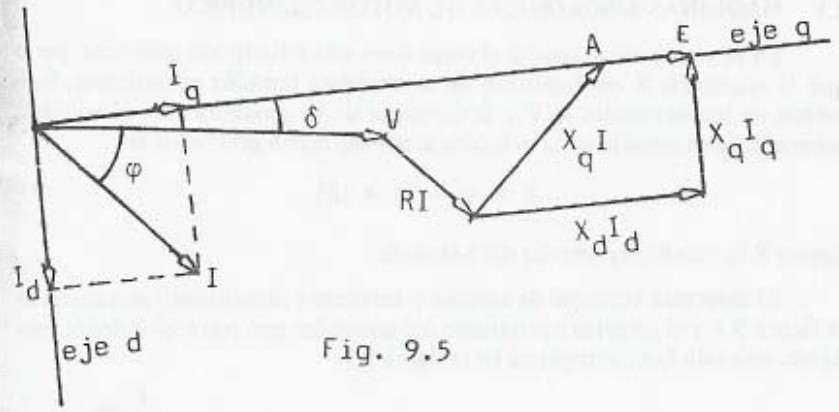


Fig. 9.5

Con la ayuda de la trigonometría, en este diagrama se pueden obtener algunas relaciones muy útiles, como se muestra en la figura 9.6.

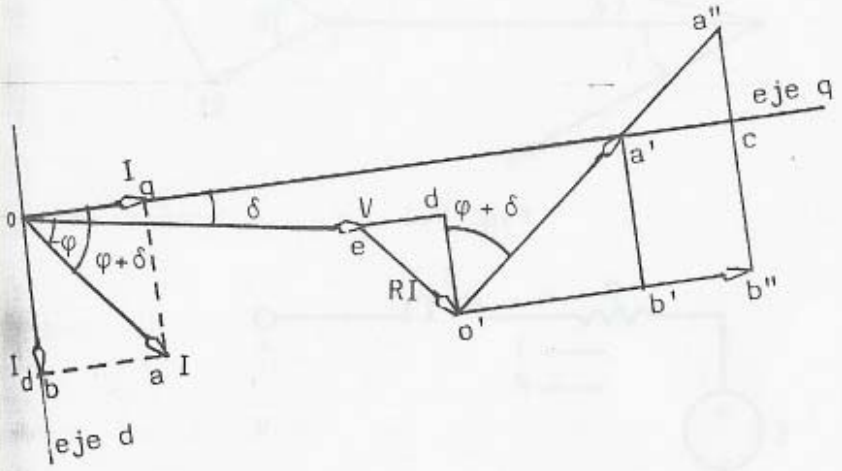


Fig. 9.6

De la figura 9.6 se tiene que

$o''b'' = jX_d I_d$ y $b''c = b'a' = jX_q I_q$

Los triángulos o'a'b' y oab son semejantes porque o'b' es perpendicular Por esta razón

$$\frac{o'a'}{oa} = \frac{b'a'}{ba} \qquad y \qquad \frac{o'b'}{ob} = \frac{b'a'}{ba}$$

por lo que

$$o'a' = \frac{b'a'}{ba}\, oa = \frac{jX_q I_q}{I_q} I = jX_q I \qquad 9.5$$

$$o'b' = \frac{b'a'}{ba}\, ob = \frac{jX_q I_q}{I_q} I_d = jX_q I_d \qquad 9.6$$

entonces

$$a'c = o'b'' - o'b' = jX_d I_d - jX_q I_d = j(X_d - X_q) I_d \qquad 9.7$$

por otra parte

$$\frac{o'a''}{oa} = \frac{o'b''}{Ob}$$

por lo que

$$o'a'' = \frac{o'b''}{ob}\, oa = \frac{jX_d I_d}{I_d} I = jX_d I \qquad 9.8$$

Además

$$oc = E \qquad ed = RI_q \qquad do' = RI_d \qquad 9.9$$

Estas relaciones, entre otras cosas, nos permiten conocer varias posibilidades de conseguir el vector E a partir del vector RI.

Consideremos ahora a la máquina sincrónica con rotor de polos salientes actuando como generador y despreciando a la resistencia óhmica del estator. El diagrama fasorial se enseña en la figura 9.7.

La potencia total transferida por el generador es igual a la potencia en el eje d más la potencia en el eje q.

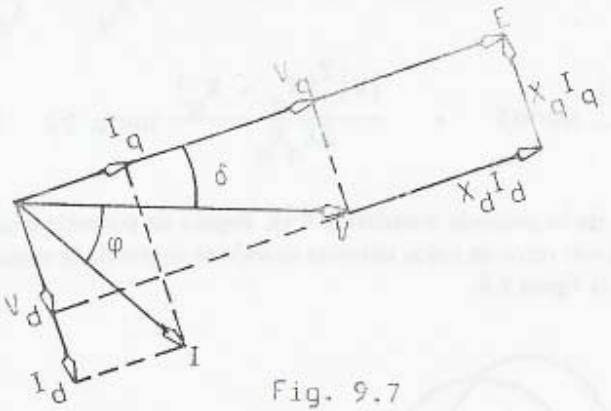


Fig. 9.7

$$P = |V_d||I_d| + |V_q||I_q| \qquad 9.10$$

pero

$$|V_d| = |V| \text{ seno } \delta$$

$$|V_q| = |V| \text{coseno } \delta$$

$$|I_d| = \frac{|E| - |V_q|}{X_d} = \frac{|E| - |V| \text{coseno } \delta}{X_d}$$

$$|I_q| = \frac{|V_d|}{X_q} = \frac{|V| \text{seno } \delta}{X_q}$$

por lo que

$$P = (|V| \text{ seno } \delta)\left(\frac{|E| - |V| \cos \delta}{X_d}\right) + |V| \cos \delta \times \frac{|V| \text{seno } \delta}{X_q}$$

$$P = \frac{|E||V|}{X_d} \text{ seno } \delta + |V|^2 \text{coseno}\,\delta \text{ seno}\,\delta\left[\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right]$$

$$= \frac{|E||V|}{X_d} \text{ seno}\,\delta + \frac{|V|^2(X_d - X_q)}{2X_dX_q} \text{ seno } 2\delta \qquad 9.11$$

La gráfica de la potencia transferida P vs. ángulo de potencia δ en máquina sincrónica con rotor de polos salientes cuando se desprecia la resistencia R se muestra en la figura 9.8.

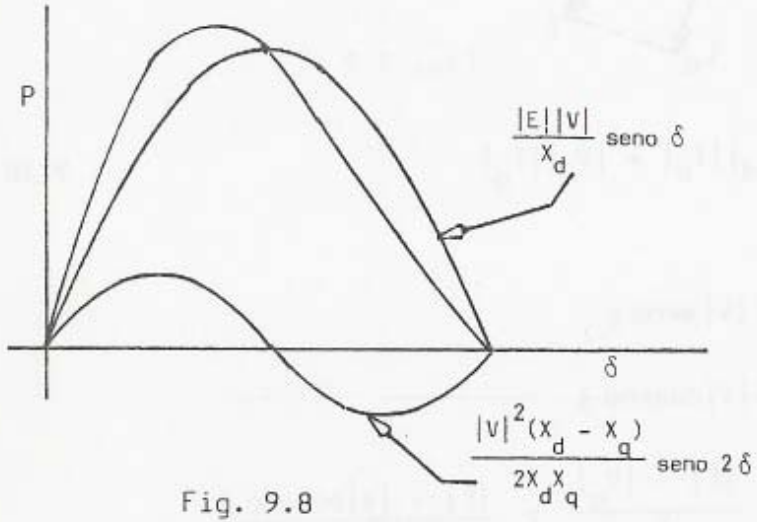


Fig. 9.8

EJEMPLO 1

Las reactancias de un alternador con rotor de polos salientes son $X_d = 1.0$ pu, $X_q = .6$ pu y suministra potencia nominal a voltaje nominal y factor de potencia de .8 en atraso. Calcular:

a) Las corrientes del eje directo y en cuadratura.
b) El voltaje generado E.
c) La expresión de potencia en función del ángulo de potencia.

a)

$V = 1.0\underline{|0º}$ pu $\qquad I = 1.0\underline{|-36.87º} = .8 - j.6$ pu

$$V_{oA} = V + jX_qI = 1.0\underline{|0º} + j.6(.8 - j.6) = 1.36 + j.48$$
$$= 1.442\underline{|19.44º} \text{ pu}$$

$$|I_q| = |I|\text{coseno}(\varphi + \delta) = 1.0 \text{ coseno}(36.87º + 19.44º)$$
$$= .555$$

$$|I_d| = |I| \text{ seno}(\varphi + \delta) = 1.0 \text{ seno}(36.87º + 19.44º)$$
$$= .832$$

b)

$$E = V_{oA} + I_d(X_d - X_q) = 1.36 + j.48 + .832(1.0 - .6)$$
$$= 1.775\underline{|19.44º}$$

o también

$$E = V + jX_dI_d + jX_qI_q = 1.0\underline{|0º} + 1.0 \times .832\underline{|19.44º}$$
$$+ .6 \times .555|109.44º = 1.775\underline{|19.44º} = 1.674 + j.591$$

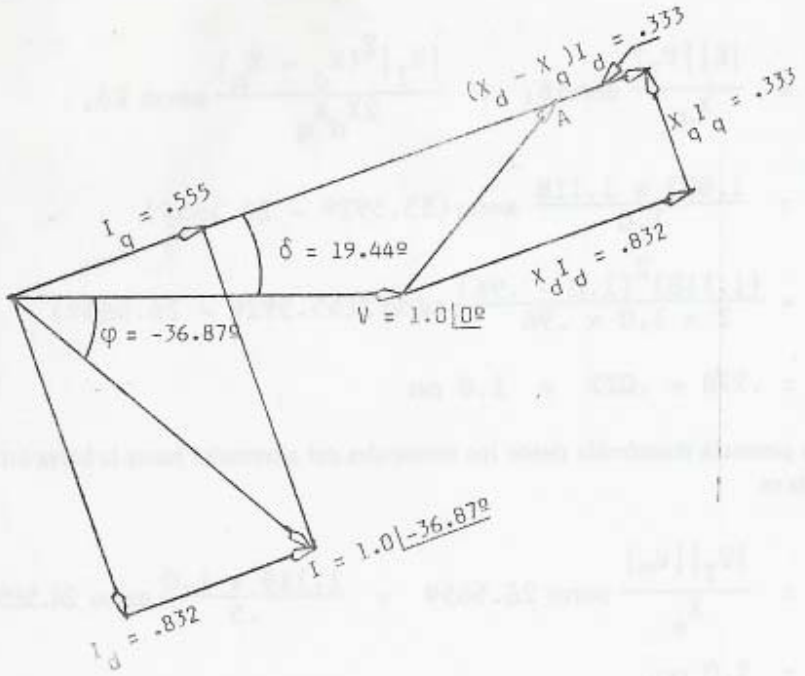
c)

$$P = \frac{|E||V|}{X_d} \text{ seno}\,\delta + \frac{|V|^2(X_d - X_q)}{2X_dX_q} \text{ seno } 2\delta$$

$$= \frac{1.775 \times 1.0}{1.0} \text{ seno}\,\delta + \frac{(1.0)^2(1.0 - .6)}{2 \times 1.0 \times .6} \text{ seno } 2\delta$$

$$= 1.775 \text{ seno}\,\delta + .333 \text{ seno } 2\delta$$

Los detalles gráficos de la solución se muestran en la figura siguiente.



EJEMPLO 2

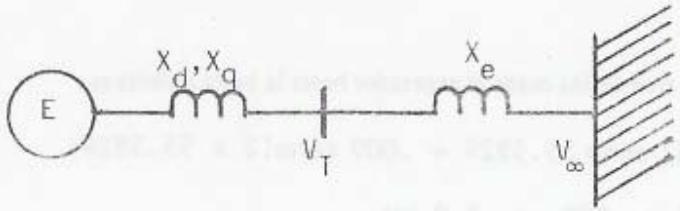
Un generador con rotor de polos salientes está conectado a un gran sistema por medio de una línea de transmisión con reactancia de X_e = j.5 pu. Las características del alternador son:

100 MVA, 2 polos, 60 Hz, 85 % F.P. en atraso,
13.2 KV (L-L), X_d = 1.0 pu, X_q = .96 pu.

Para una condición de corriente nominal y factor de potencia de 1.0 en la barra infinita:

1) Graficar el estado estable de todo el sistema.
2) Calcular la expresión de potencia en función del ángulo de potencia.
3) Usando las expresiones de potencia calcular en diferentes formas la potencia transferida por el alternador hacia la barra infinita.

En la figura siguiente se muestra el diagrama unifilar del sistema



1)

$$V_T = V_\infty + jX_e I = 1.0|\underline{0º} + j.5 \times 1.0|\underline{0º} = 1.118|\underline{26.565º}$$

$$V_{oA} = V_T + jX_q I = 1.18|\underline{26.565º} + j.96 \times 1.0|\underline{0º}$$

$$= 1.770|\underline{55.592º}$$

$$|I_q| = 1.0 \text{ coseno } 55.592º = .565$$

$$|I_d| = 1.0 \text{ seno } 55.592º = .825$$

$$E = V_T + jX_d I_d + jX_q I_q = 1.118|\underline{26.565º} + .825|\underline{55.592º}$$

$$+ .565|\underline{55.592º} \times .96|\underline{90º} = 1.803|\underline{55.578º}$$

2)

$$P = \frac{|E||V_\infty|}{X_d + X_e} \text{seno}\,\delta + \frac{|V_\infty|^2 (X_d + X_e) - (X_q + X_e)}{2(X_d + X_e)(X_q + X_e)} \text{ seno } 2\delta$$

$$= \frac{|E||V_\infty|}{X_d + X_e} \text{seno}\,\delta + \frac{|V_\infty|^2 (X_d - X_q)}{2(X_d + X_e)(X_q + X_e)} \text{ seno } 2\delta$$

$$= \frac{1.803 \times 1.0}{1.0 + .5} \text{ seno}\,\delta + \frac{(1.0)^2 \times (1.0 - .96)}{2(1.0 + .5)(.96 + .5)} \text{seno}\,2\delta$$

$$= 1.202 \text{ seno}\,\delta + .009 \text{ seno } 2\delta$$

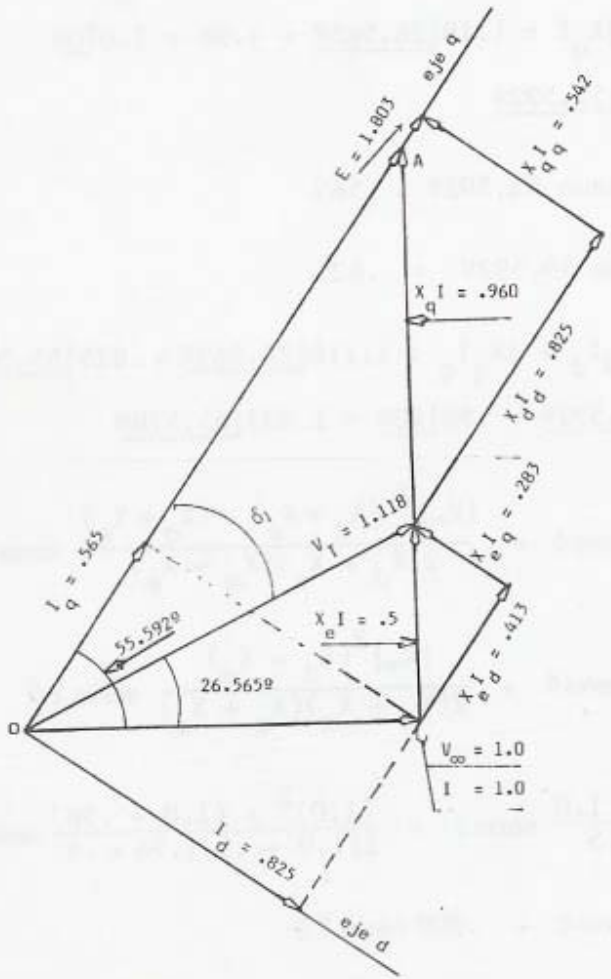
3)

La potencia transferida desde el generador hasta la barra infinita es

$$P = 1.202 \text{ seno } 55.592^{\circ} + .009 \text{ seno}(2 \times 55.592^{\circ})$$

$$= .992 + .008 = 1.0 \text{ pu.}$$

Esta potencia puede calcularse también con otros valores de voltajes y reactancias. La potencia transferida desde el generador hasta sus terminales es



$$P = \frac{|E||V_T|}{X_d} \text{ seno } \delta_1 + \frac{|V_T|^2(X_d - X_q)}{2X_dX_q} \text{ seno } 2\delta_1$$

$$= \frac{1.803 \times 1.118}{1.0} \text{ seno}(55.592^{\circ} - 26.565^{\circ})$$

$$+ \frac{(1.118)^2(1.0 - .96)}{2 \times 1.0 \times .96} \text{ seno } 2(55.592^{\circ} - 26.565^{\circ})$$

$$= .978 + .022 = 1.0 \text{ pu}$$

La potencia transferida desde los terminales del alternador hasta la barra infinita es

$$P = \frac{|V_T||V_\infty|}{X_e} \text{ seno } 26.565^{\circ} = \frac{1.118 \times 1.0}{.5} \text{ seno } 26.565^{\circ}$$

$$= 1.0 \text{ pu.}$$

Y la potencia transferida desde los terminales del alternador hasta el punto A es

$$P = \frac{|V_T||V_{oA}|}{X_q} \text{ seno}(55.592^{\circ} - 26.565^{\circ})$$

$$= \frac{1.118 \times 1.770}{.96} \text{ seno } 29.027^{\circ} = 1.0 \text{ pu.}$$

3. EXPRESIONES DE POTENCIA TRANSFERIDA EN FUNCION DE ANGULOS DE POTENCIA.

En los problemas anteriores se observó que se puede obtener la potencia transferida utilizando diferentes valores de voltajes y de reactancias. Si los voltajes utilizados no están todos sobre la línea XI, la expresión de potencia transferida contiene dos partes: una en función del ángulo de potencia y la otra en función de dos veces el ángulo de potencia. Si los voltajes utilizados

(reales o ficticios) están sobre la línea XI, la expresión de la potencia transferida contiene una sola parte en función de los referidos voltajes, de la reactancia entre ellos y del ángulo de potencia.

EJEMPLO 3

En el Ejemplo anterior, con los valores de la reactancia en el eje directo X_d y la corriente de armadura I, calcular un voltaje ficticio E_i sobre la línea XI y usarlo para calcular la potencia transferida.

$$E_i = V_T + jX_dI = 1.118\angle 26.565^\circ + 1.0\angle 90^\circ \times 1.0\angle 0^\circ$$

$$= 1.803\angle 56.310^\circ \text{ pu}$$

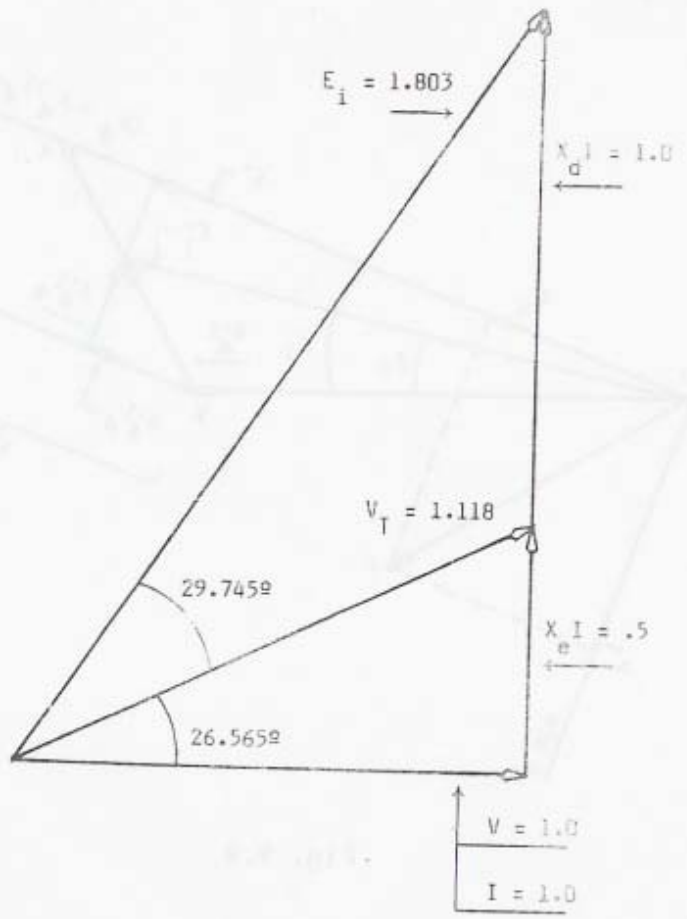
$$P = \frac{|E_i||V_T|}{X_d} \text{ seno}(56.310^\circ - 26.565^\circ)$$

$$= \frac{1.803 \times 1.118}{1.0} \text{ seno } 29.745^\circ = 1.0 \text{ pu}$$

Se observa que esta expresión es mucho más sencilla que la encontrada cuando los voltajes no están sobre la línea XI. Los detalles geométricos de este Ejemplo se enseñan en la figura siguiente.

4. MODELO DE LA MAQUINA SINCRONICA CON ROTOR DE POLOS SALIENTES EN EL ESTADO TRANSITORIO.

Hasta ahora se han calculado los voltajes generados y las potencias transferidas usando el modelo de estado estable de la máquina sincrónica; pero durante fallas dentro del sistema al cual esté conectada la máquina o durante grandes cambios en la carga, la corriente de la armadura I y por lo tanto la fuerza magnetomotriz de la armadura, sufren variaciones en el tiempo que afectan a la reactancia en el eje directo X_d. Este efecto se toma en cuenta usando la reactancia transitoria X'_d en lugar de la reactancia de estado estable X_d, siendo X'_d menor que X_d. Normalmente el valor de X'_d es menor que el valor de X_q, la cual se mantiene sustancialmente constante en el estado transitorio. De esta manera en el estado transitorio la componente X_dI_d cambia a X'_dI_d pero la componente X_qI_q permanece inalterable. Esto hace que el voltaje generado cambie de $|E|$ a $|E'|$ pero conservando su posición. La ecuación que describe al voltaje generado en el estado transitorio es entonces



$$E' = V + jX'_dI_d + jX_qI_q \qquad 9.12$$

y el diagrama fasorial se muestra en la figura 9.9 en donde se desprecia la resistencia óhmica.

La expresión de la potencia transferida por el alternador queda modificada en la forma siguiente

$$P = \frac{|E'||V|}{X'_d} \text{ seno } \delta_1 + \frac{|V|^2(X'_d - X_q)}{2X'_dX_q} \text{ seno } 2\delta_1 \qquad 9.13$$

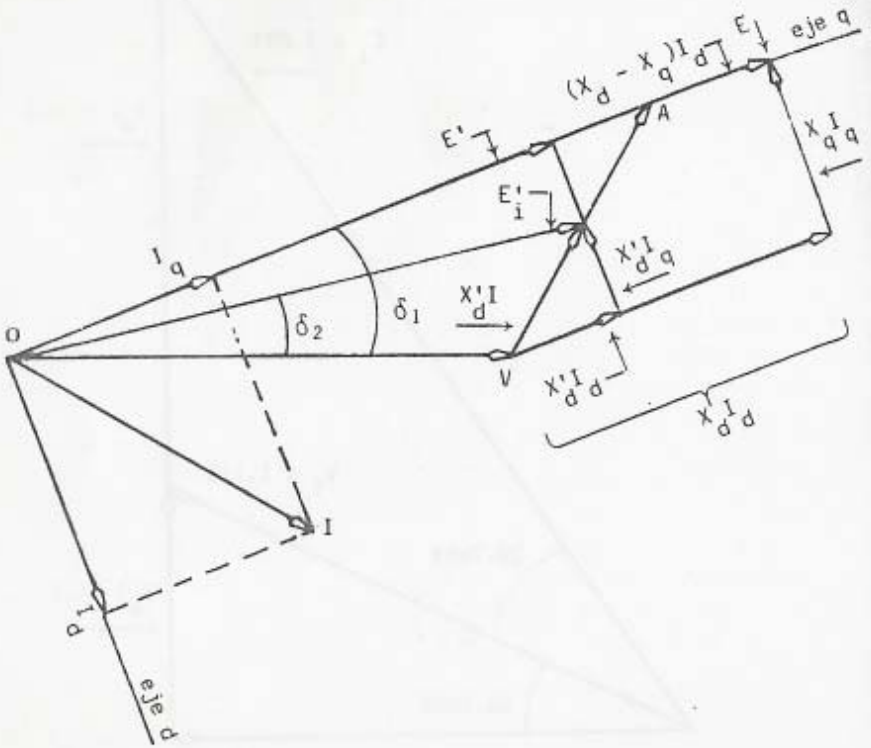


Fig. 9.9

Como X'_d es menor que X_q, la segunda parte de la expresión 9.13 es negativa. La gráfica de la potencia transferida P en el estado transitorio vs. en el ángulo de potencia δ_1 se muestra en la figura 9.10. Obsérvese la diferencia entre esta gráfica y la de estado estable de la figura 9.8.

En los problemas de estabilidad transitoria es usual calcular un voltaje ficticio E'_i detrás de la reactancia transitoria del eje directo X'_d, para utilizarlo en el cálculo de la potencia transferida. Esto permite tener una expresión de potencia con una sola componente en función del ángulo de potencia, lo cual hace cualquier cálculo posterior mucho más sencillo.

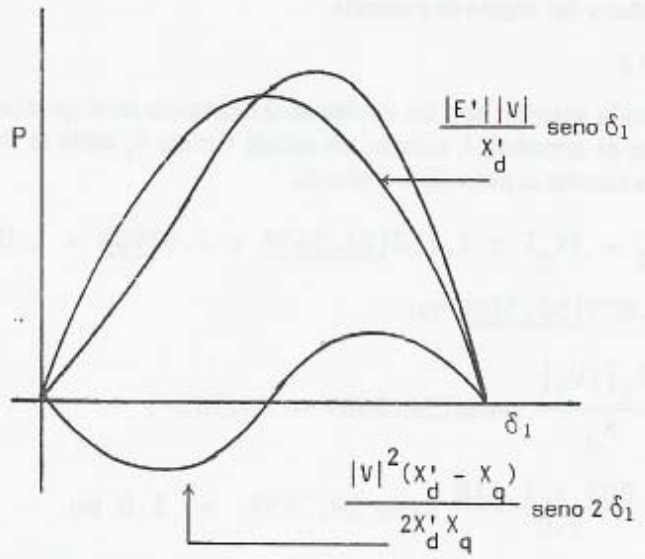


Fig. 9.10

De la figura 9.9 se observa que

$$E'_i = V + jX'_d I = V + jX'_d I_d + jX'_d I_q \qquad 9.14$$

o también

$$E'_i = E' - j(X_q - X'_d)I_q \qquad 9.15$$

y la potencia transferida por la máquina es

$$P = \frac{|E'_i||V|}{X'_d} \text{ seno } \delta_2 \qquad 9.16$$

La gráfica de la potencia transferida P vs. el ángulo de potencia δ_2 se muestra en la figura 9.11.

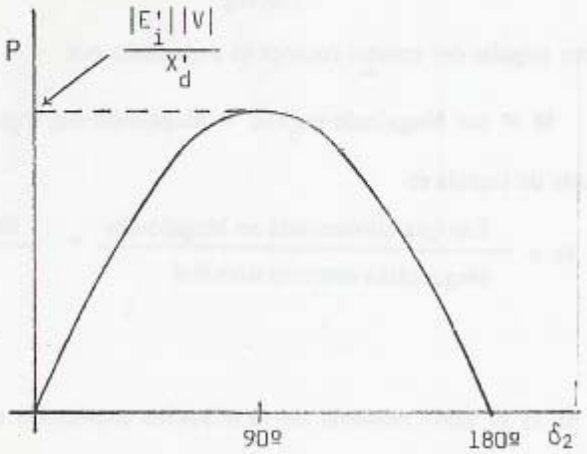


Fig. 9.11

EJEMPLO 4

En el problema del Ejemplo 2 usando $X'_d = .2$:

1) Calcular el voltaje E' y usarlo para calcular la expresión de potencia transferida en el estado transitorio mediante la ecuación 9.13.

2) Repetir con el cálculo de E'_i y la ecuación 9.16.

1)

$$E' = V_T + jX'_dI_d + jX_qI_q$$

$$= 1.118\underline{|26.565º} + .825\underline{|-34.408º} \times .2\underline{|90º}$$

$$+ .565\underline{|55.592º} \times .96\underline{|90º} = 1.142\underline{|55.592º}$$

$$P = \frac{|E'||V_\infty|}{X'_d + X_e}\,\text{seno}\,\delta_1 + \frac{|V_\infty|^2(X'_d - X_q)}{2(X'_d + X_e)(X_q + X_e)}\,\text{seno}\,2\delta_1$$

$$= \frac{1.142 \times 1.0}{.2 + .5}\,\text{seno}\,\delta_1 + \frac{(1.0)^2(.2 - .96)}{2(.2 + .5)(.96 + .5)}\,\text{seno}\,2\delta_1$$

$$= 1.631\,\text{seno}\,\delta_1 - .372\,\text{seno}\,2\delta_1$$

2)

$$E'_i = V_T + jX'_dI = 1.118\underline{|26.565º} + .2\underline{|90º} \times 1.0\underline{|0º}$$

$$= 1.221\underline{|34.992º}$$

$$P = \frac{|E'_i||V_T|}{X'_d}\,\text{seno}\,\delta_2 = \frac{1.221 \times 1.118}{.2}\,\text{seno}\,\delta_2$$

$$= 6.825\,\text{seno}\,\delta_2$$

El ángulo δ_1 es el ángulo entre los voltajes E' y V_∞, y el ángulo δ_2 es el ángulo entre los voltajes E'_i y V_T.

5. ESTABILIDAD TRANSITORIA

En los sistemas eléctricos de potencia la generación de energía eléctrica se realiza a través de generadores conectados en paralelo. Las interconexiones se realizan para obtener una mayor economía en la producción de energía eléctrica y una mayor confiabilidad en el servicio. Para que estas interconexiones sean efectivas y satisfactorias, el sistema debe estar en equilibrio, es decir en sincronismo. Para lograr esto los generadores deben cumplir con los siguientes requisitos en los puntos de interconexión:

1) Los voltajes deben ser de igual magnitud.
2) Los voltajes deben estar en fase.
3) Los voltajes deben tener la misma secuencia de fase.
4) Los voltajes deben tener la misma frecuencia.

Bajo estas condiciones los generadores interconectados son inherentemente estables y pueden recuperarse de pequeñas fuerzas fortuitas de pertur-

bación y permanecer sincronizados. Sin embargo, el mantenimiento de sincronismo entre los diferentes generadores de un sistema de potencia se hace cada vez más difícil a medida que crecen los sistemas y sus interconexiones, ya que ellos están sujetos a fuertes perturbaciones que pueden hacerle perder la estabilidad.

El límite de la estabilidad transitoria para una perturbación particular es la condición de operación en estado estable en el cual el sistema ce potencia es transitoriamente estable y en el cual también un pequeño cambio arbitrario en cualquiera de las cantidades operativas en dirección desfavorable, hace que el sistema de potencia pierda la estabilidad por dicha perturbación. Como se dijo al comienzo, la perturbación transitoria puede ser una aplicación o desconexión de grandes cargas, pero muy a menudo es una falla; con una perturbación adicional de desconexión de una o más líneas en paralelo para limpiar la falla.

El análisis de estabilidad transitoria de cualquier sistema de potencia que involucre cáiculo de tiempo, debe tomar en cuenta necesar amente las características eléctricas y mecánicas de la máquina sincrónica.

Cuando existe una perturbación se pierde transitoriamente el balance de estado estable entre la energía de entrada a la máquina sincrónica y la energía de salida. La diferencia entre ellas es almacenada o suplida por el rotor en forma de energía cinética, lo cual hace que el rotor se acelere o desacelere, alejándose de la velocidad de sincronismo y aumentando en ambos casos el ángulo de potencia. El problema consiste entonces en calcular el tiempo máximo requerido para eliminar la perturbación de manera que el rotor pueda recuperarse y lograr un nuevo estado estable.

6. CONSIDERACIONES MECANICAS SOBRE LAS MAQUINAS SINCRONICAS.

En el análisis de estabilidad transitoria es necesario realizar algunas consideraciones mecánicas sobre las máquinas sincrónicas, ya que después de una perturbación en cualquiera de las máquinas, han de ajustar los ángulos relativos de sus rotores para adaptarse a un nuevo estado estable.

La energía cinética de un cuerpo en rotación es expresada por

$$E.C. = \frac{1}{2} I \omega^2 \text{ joules} \qquad 9.17$$

en donde

I es el momento de inercia del cuerpo rotante expresado en

$$\frac{\text{joules-seg}^2}{\text{rad}^2}$$

ω es la velocidad angular del cuerpo rotante expresada en

rad/seg

El momento angular del cuerpo rotante es expresado por

$$M = I\omega \text{ Megajoule-seg/rad} = \text{Megajoule-seg/ángulo}$$

La constante de inercia es

$$H = \frac{\text{Energía almacenada en Megajoules}}{\text{Megavoltio-amperio nominal}} = \frac{\text{Megajoules}}{G}$$

$$= \frac{E.C.}{G}$$

en donde G es el valor nominal de la máquina expresado en Megavoltios-amperios.

La energía cinética almacenada en el cuerpo rotante es entonces

$$E.C. = GH = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} M\omega = \frac{M \times 360f}{2}$$

$$= 180 \times M \times f \qquad 9.20$$

y

$$M = \frac{2GH}{\omega} = \frac{GH}{180f} \text{ grados eléctricos} = \frac{GH}{\pi f} \text{ rad.} \qquad 9.21$$

En valores por unidad G es igual a uno, por lo que

$$M = \frac{H}{180f} \text{ grados eléctricos} = \frac{H}{\pi f} \text{ radianes} \qquad 9.22$$

7. LA ECUACION DE OSCILACION Y LA POTENCIA DE ACELERACION.

En el estado transitorio una máquina sincrónica conectada a una barra infinita suministra una potencia P

$$P = \frac{|E'_i||V|}{X'_d} \text{ seno } \delta \qquad 9.23$$

Si ocurre una perturbación en el sistema, cambia el requerimiento de potencia de cada componente y el rotor de la máquina debe reorientarse de manera de ajustarse a las nuevas condiciones de potencia. La ecuación de movimiento que caracteriza la reposición del rotor de la máquina durante la perturbación es llamada la ecuación de oscilación. Uno de los problemas básicos de estabilidad consiste en la determinación de si el rotor, es decir el ángulo de potencia, se estabiliza o no después de la perturbación. Si el estudio revela que el ángulo δ continúa aumentando o disminuyendo después de la perturbación, la máquina perderá sincronismo.

Despreciando las pérdidas internas, la diferencia entre la potencia mecánica y la potencia eléctrica de la máquina sincrónica actuando como generador es la potencia de aceleración.

$$P_a = P_m - P_e \qquad 9.24$$

Esta potencia de aceleración está relacionada con la energía cinética del rotor y su expresión en función del par de aceleración es

$$P_a = T_a \omega \qquad 9.25$$

Además la relación entre el par de aceleración y el momento de inercia es

$$T_a = I\alpha \qquad 9.26$$

en donde α es la aceleración angular, por lo que

$$P_a = T_a\omega = I\alpha\omega = M\alpha = P_m - P_e \qquad 9.27$$

La relación entre la aceleración angular y el ángulo de potencia es

$$\alpha = \frac{d^2\delta}{dt^2} \qquad 9.28$$

Concluyendo que

$$M\frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - P_e = P_m - \frac{|E'_i||V|}{X'_d}\,\text{seno}\,\delta \qquad 9.29$$

y en función de la constante de inercia se tiene

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{\pi f}{H}(P_m - P_e) \quad \text{rad/seg}^2$$

$$= \frac{180f}{H}(P_m - P_e) \quad \text{grados/seg}^2 \qquad 9.30$$

Las ecuaciones 9.29 y 9.30 son llamadas la ecuación de oscilación y caracteriza la reposición del rotor de la máquina sincrónica durante la perturbación. La ecuación de oscilación es una ecuación diferencial trascendental de segundo orden y su solución da origen a una integral elíptica. La resolución de esta ecuación y el posterior graficado de δ en función del tiempo, resulta en la curva de oscilación para la máquina sincrónica correspondiente. Las curvas de oscilación revelan la tendencia del ángulo de potencia de oscilar o incrementarse más allá del punto de retorno.

8. OSCILACION DE UNA SOLA MAQUINA CON RESPECTO A UNA BARRA INFINITA. METODOS DE AREAS IGUALES.

Con la ecuación de oscilación es posible determinar si una máquina sincrónica conectada a un gran sistema permanece en sincronismo al ocurrir una perturbación. Sin embargo, para el caso de una sola máquina el método de áreas iguales es mucho más simple. Aunque el método es más o menos intuitivo, existen varias formas de probar su validez.

Consideremos a la máquina sincrónica actuando como generador conectada directamente a un gran sistema, tal como se indica en la figura 9.12.

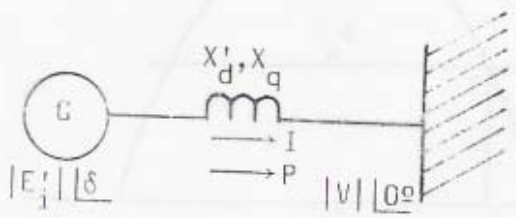


Fig. 9.12

La potencia eléctrica transferida por esta máquina al sistema en el estado transitorio es

$$P = \frac{|E'_i||V|}{X'_d} \text{ seno } \delta$$

en donde E'_i es el voltaje detrás de la reactancia transitoria del eje directo X'_d.

La ecuación de oscilación es entonces

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - \frac{|E'_i||V|}{X'_d} \text{ seno } \delta$$

Antes de existir la perturbación la máquina está en estado estable y la potencia mecánica inyectada es igual a la potencia eléctrica de salida, por lo que la potencia de aceleración es cero y

$$P_e = P_m = \frac{|E'_i||V|}{X'_d} \text{ seno } \delta$$

El punto de equilibrio se muestra en la figura 9.13.

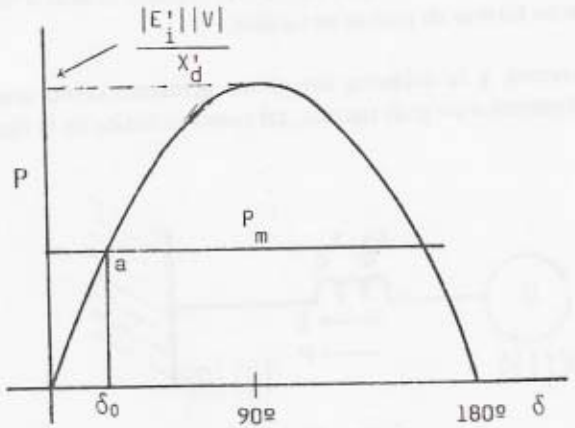


Fig. 9.13

Supongamos ahora que la potencia mecánica de entrada se aumenta bruscamente, pasando instantáneamente de P_{m_1} a P_{m_2}. La barra infinita no puede absorber cualquier cambio de potencia eléctrica mientras el voltaje y la frecuencia permanezcan constantes. La diferencia entre la potencia mecánica y la potencia eléctrica, es decir la potencia de aceleración, es almacenada en el rotor en forma de energía cinética. Esto hace que el rotor acelere, aumentando la velocidad y el ángulo de potencia desde δ_0, tal como se indica en la figura 9.14.

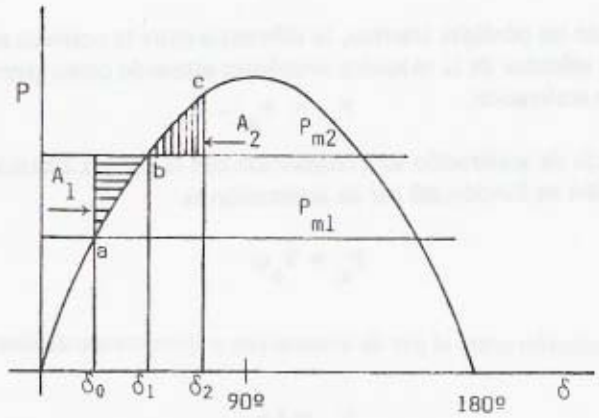


Fig. 9.14

El rotor seguirá acelerando siempre que la potencia mecánica sea mayor que la potencia eléctrica, es decir desde el punto a hasta el punto b; aumentando el ángulo de potencia desde δ_0 hasta δ_1. La zona indicada como A_1 es entonces una zona o área de aceleración. En el punto b el rotor termina de acelerar pero su velocidad es todavía mayor que la velocidad de sincronismo, por lo que el ángulo de potencia continúa aumentando. Entre el punto b y el punto c la velocidad del rotor está todavía por encima de la de sincronismo, la potencia eléctrica es mayor que la potencia mecánica, por lo que la diferencia debe venir de la energía almacenada en el rotor; el cual por lo tanto desacelera, perdiendo velocidad, pero el ángulo de potencia continúa aumentando. La zona indicada por A_2 es entonces una zona o área de desaceleración. En el punto c la velocidad del rotor es igual a la de sincronismo, el rotor continúa perdiendo aceleración y a partir de allí su velocidad es menor que la de sincronismo, disminuyendo el ángulo de potencia. En este proceso habrá estabilidad alrededor del punto b con el nuevo ángulo de potencia δ_1 si el área de desaceleración es igual al área de aceleración. Si el rotor no puede entregar toda la

energía cinética almacenada en el proceso de aceleración, su velocidad jamás disminuirá y el ángulo de potencia aumentará indefinidamente, perdiendo el sincronismo. En resumen, para que el rotor pueda estabilizarse a un nuevo ángulo de potencia, el área de desaceleración A_2 debe ser igual al área de aceleración A_1.

El ángulo de potencia que determina la mayor área de aceleración sin que la máquina pierda sincronismo, como se indica en la figura 9.15, es llamado ángulo crítico δ_c y al tiempo correspondiente para alcanzar ese ángulo crítico se le llama tiempo crítico t_c. El tiempo crítico se define entonces como el tiempo máximo entre el inicio y el aislamiento de la falla de manera tal que el sistema sea transitoriamente estable.

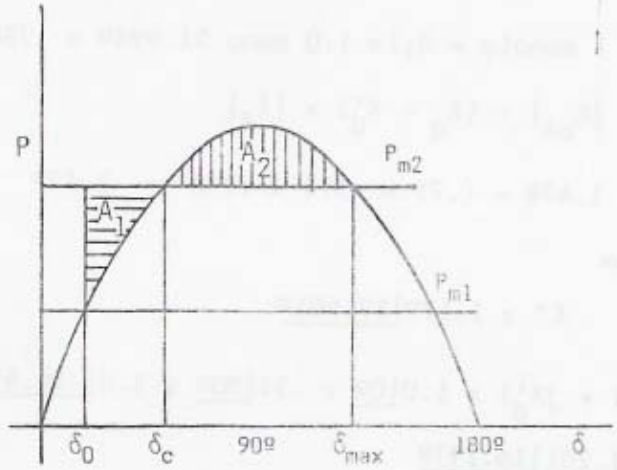


Fig. 9.15

El análisis anterior fue hecho para la máquina sincrónica actuando como generador, pero es igualmente válido para un motor sincrónico cuando la potencia mecánica cambia bruscamente desde P_{m_1} hasta P_{m_2}. En este caso quedarán intercambiadas las áreas de aceleración y desaceleración, ya que la potencia de aceleración es

$$P_a = P_e - P_m$$

9. RELACION ENTRE EL ANGULO CRITICO Y EL TIEMPO CRITICO

Sí y sólo si la potencia de aceleración es constante durante el estado transitorio, se puede derivar una expresión que permita relacionar el tiempo crítico con el ángulo crítico.

La potencia de aceleración es

$$P_a = M \frac{d^2\delta}{dt^2} \qquad \text{ó} \qquad \frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{P_a}{M}$$

La velocidad angular del cuerpo rotante es cero en el momento de comenzar la perturbación, pero después de t segundos esa velocidad es

$$\frac{d\delta}{dt} = \int_0^t \frac{P_a}{M} dt = \frac{P_a t}{M}$$

y el desplazamiento angular en ese tiempo es

$$\delta = \delta_0 + \int_0^t \frac{P_a t}{M} dt = \delta_0 + \frac{P_a t^2}{2M}$$

el ángulo crítico correspondiente al tiempo crítico es

$$\delta_c = \delta_0 + \frac{P_a t_c^2}{2M}$$

de donde

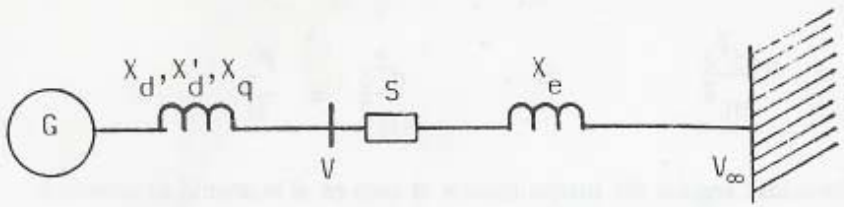
$$t_c = \sqrt{\frac{2M(\delta_c - \delta_0)}{P_a}} \qquad 9.31$$

EJEMPLO 5

Un alternador con rotor de polos salientes está conectado a un gran sistema por medio de una línea de transmisión, la cual tiene una reactancia de $X_e = j.5$ pu. Las características del alternador son:

$X_d = 1.15$ pu, $X'_d = .37$ pu, $X_q = .75$ pu,

$f = 60$ Hz, $H = 2.5$ Kw-seg/KVA.



Si el interruptor S se abre cuando el alternador suministra corriente nominal a voltaje nominal y factor de potencia de .91 en atraso, calcular:

1) La expresión de potencia en función del ángulo de potencia, según la ecuación 9.13.
2) El ángulo crítico por medio del método de áreas iguales y con la expresión de potencia anterior.
3) La expresión de potencia en función del ángulo de potencia, según la ecuación 9.16.
4) El ángulo crítico por medio del método de áreas iguales y usando la expresión de potencia encontrada en la parte 3.
5) Repetir la parte 4 analíticamente.
6) El tiempo crítico (el tiempo máximo en que el interruptor puede estar abierto sin que el alternador pierda sincronismo) con los ángulos críticos calculados en las partes 2 y 4.

1)

$V = 1.0\angle 0º$ pu

$I = 1.0\angle -\cos^{-1}.91 = 1.0\angle -24.495º$ pu

por lo que

$$\varphi = 24.495º$$

$$E_{oA} = V + jX_q I = 1.0\angle 0º + .75\angle 90º \times 1.0\angle -24.495º$$

$$= 1.478\angle 27.501º$$

por lo que

$$\delta_1 = 27.501º$$

$$V_\infty = V - jX_e I = 1.0\angle 0º - .5\angle 90º \times 1.0\angle -24.495º$$

$$= .914\angle -29.845º$$

por lo que

$$\delta_2 = 27.501º + 29.845º = 57.346º$$

$$|I_q| = I \text{ coseno}(\varphi + \delta_1) = 1.0 \text{ coseno}(24.495º + 27.501)$$

$$= 1.0 \text{ coseno } 51.996º = .616$$

$$|I_d| = I \text{ seno}(\varphi + \delta_1) = 1.0 \text{ seno } 51.996º = .788$$

$$|E'| = |E_{oA}| - (X_q - X'_d) \times |I_d|$$

$$= 1.478 - (.75 - .37) \times .788 = 1.179$$

por lo que

$$E' = 1.179\angle 27.501º$$

$$E'_i = V + jX'_d I = 1.0\angle 0º + .37\angle 90º \times 1.0\angle -24.495º$$

$$= 1.201\angle 16.293º$$

por lo que

$$\delta_3 = 16.293º$$

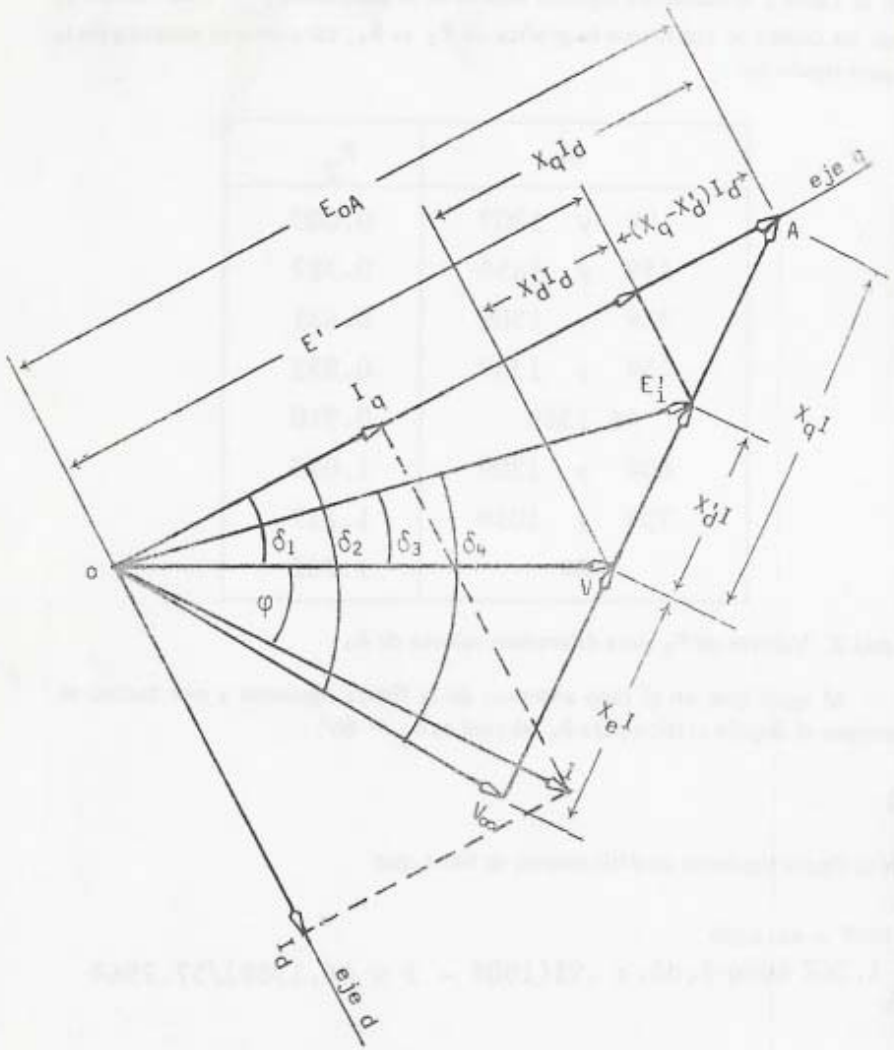
$$\delta_4 = 29.845º + 16.293º = 46.138º$$

$$P_1 = \frac{|E'||V_\infty|}{X'_d + X_e} \text{ seno } \delta_2 + \frac{|V_\infty|^2 (X'_d - X_q)}{2(X'_d + X_e)(X_q + X_e)} \text{ seno } 2\delta_2$$

$$= \frac{1.179 \times .914}{.37 + .5} \text{ seno } \delta_2 + \frac{(.914)^2 (.37 - .75)}{2(.37 + .5)(.75 + .5)} \text{ seno } 2\delta_2$$

$$= 1.239 \text{ seno } \delta_2 - .146 \text{ seno } 2\delta_2 = P_{1a} - P_{1b}$$

El diagrama fasorial se muestra en la figura siguiente:

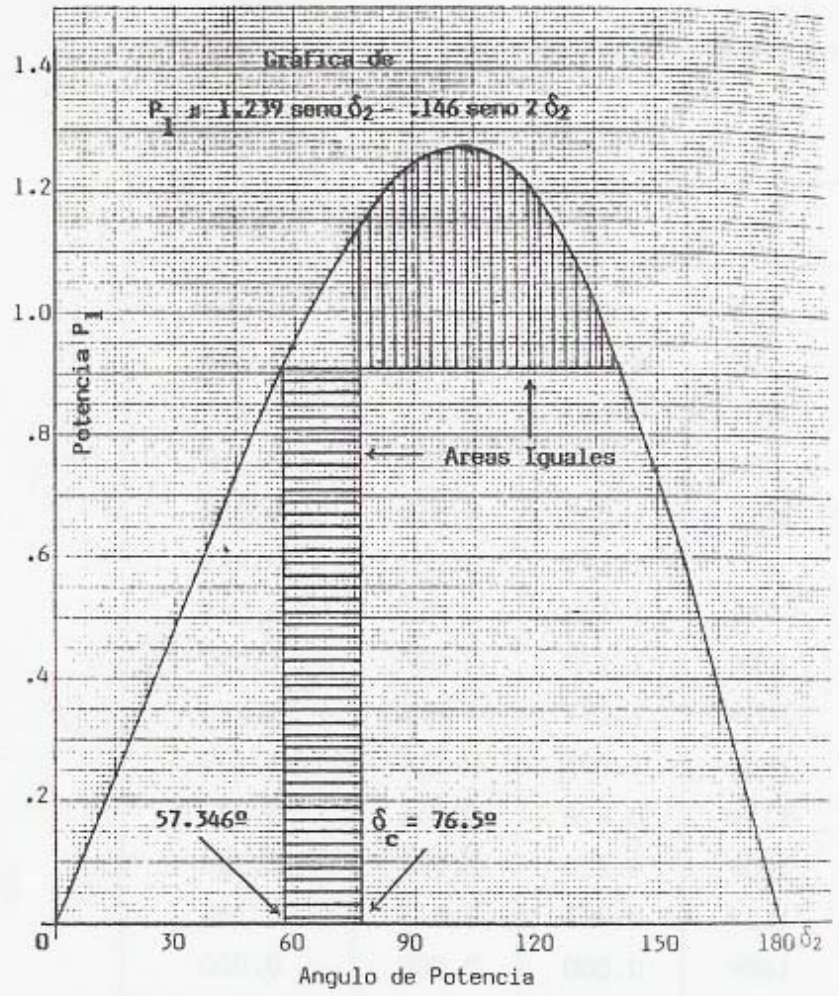


En la tabla 1 se muestran algunos valores de la potencia $P_1 = 1.239$ seno $\delta_2 - .146$ seno $2\delta_2$, con los cuales se construye la gráfica de P_1 vs. δ_2, tal como se muestra en la figura siguiente:

δ_2	P_{1a}	P_{1b}	$P_1 = P_{1a} - P_{1b}$
0º	0.000	0.000	0.000
15º	0.321	0.073	0.248
30º	0.620	0.126	0.493
45º	0.876	0.146	0.730
57.346º	1.043	0.133	0.910
60º	1.073	0.126	0.947
75º	1.197	0.073	1.124
90º	1.239	0.000	1.239
105º	1.197	-0.073	1.270
120º	1.073	-0.126	1.199
135º	0.876	-0.146	1.022
150º	0.620	-0.126	0.746
165º	0.321	-0.073	0.394
180º	0.000	0.000	0.000

Tabla 1. Valores de P_1 para diferentes valores de δ_2

De la gráfica de la figura siguiente utilizando el método de áreas iguales por tanteo se obtiene el ángulo crítico, el cual es $\delta_c = 76.5°$. Este ángulo es el ángulo δ_2 en el cual debe cerrarse nuevamente el interruptor S para que el alternador todavía permanezca en sincronismo.



3)

$$P_2 = \frac{|E'_i||V_\infty|}{X'_d + X_e} \text{ seno } \delta_4 = \frac{1.201 \times .914}{.37 + .5} \text{ seno } \delta_4$$

$$= 1.262 \text{ seno } \delta_4$$

4)

En la Tabla 2 se muestran algunos valores de la potencia $P_2 = 1.264 \text{ seno } \delta_4$, con los cuales se construye la gráfica de P_2 vs δ_4, tal como se muestra en la figura siguiente:

δ_4	P_2
0º y 180º	0.000
15º y 165º	0.327
30º y 150º	0.631
45º y 135º	0.892
46.138º	0.910
60º y 120º	1.093
75º y 105º	1.219
90º	1.262

Tabla 2. Valores de P_2 para diferentes valores de δ_4

Al igual que en el caso anterior, de la figura siguiente y por tanteo se consigue el ángulo crítico para δ_4, el cual es $\delta_c = 66°$.

5)

De la figura siguiente analíticamente se tiene que

$$\int_{\delta_c}^{180º - 46.138º} 1.262 \text{ seno } \delta_4 d\delta_4 = .91(180º - 2 \times 46.138º)/57.296º$$

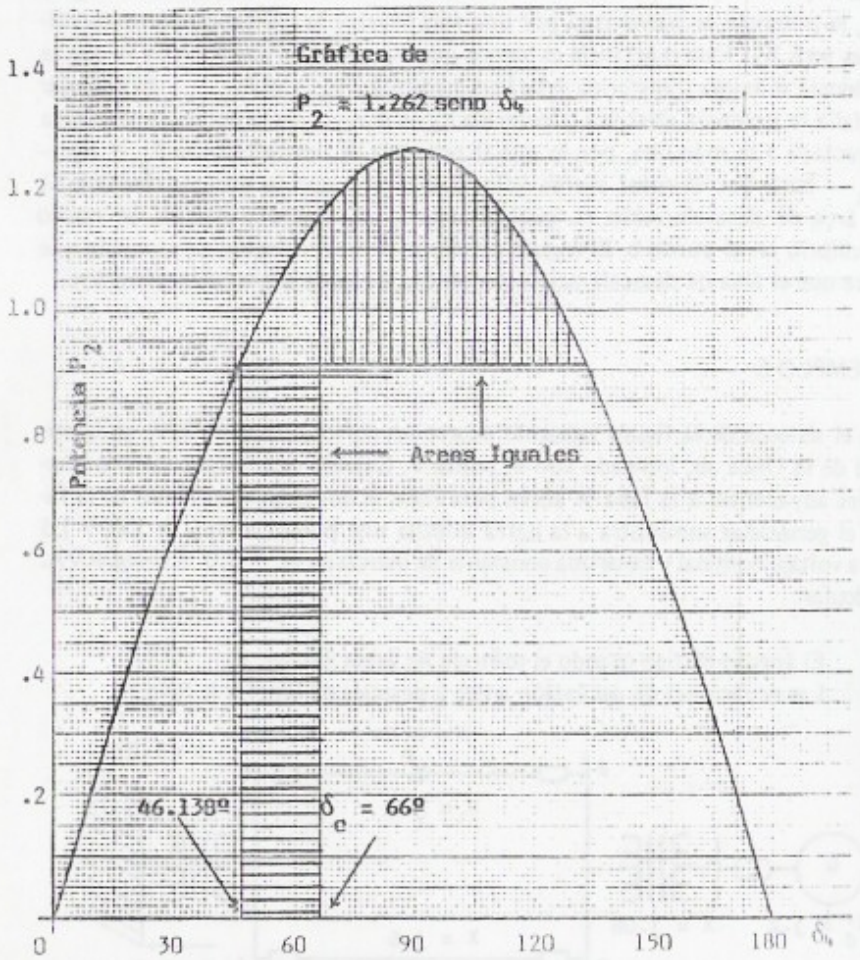
Resolviendo

$$-1.262 \cos \delta_4 \Big|_{\delta_c}^{133.862º} = 1.393$$

de donde

$$\cos \delta_c = .411 \qquad y \qquad \delta_c = 1.147 \text{ rad.} = 65.732^\circ$$

(Comparado con 66° obtenidos gráficamente). 57.296 es el factor de conversión de grados a radianes.



6)

El momento angular según la ecuación 9.21 es

$$M = \frac{G \times H}{180f} = \frac{1.0 \times 2.5}{180 \times 60} = 2.32 \times 10^{-4}$$

Como en este problema la potencia de aceleración es constante (.91) en el período en que el interruptor permanece abierto, para calcular el tiempo crítico se puede utilizar la ecuación 9.31.

Con el ángulo crítico de δ_2

$$t_c = \sqrt{\frac{2 \times 2.32 \times 10^{-4}(76.5 - 57.346)}{.91}} = .099 \text{ seg.}$$

Con el ángulo crítico de δ_4

$$t_c = \sqrt{\frac{2 \times 2.32 \times 10^{-4}(65.732 - 46.138)}{.91}} = .100 \text{ seg.}$$

Se concluye que el tiempo crítico de interrupción usando diferentes ángulos críticos es prácticamente el mismo, por lo que es indiferente utilizar las ecuaciones 9.13 ó 9.16 para calcular la potencia eléctrica, siendo la última mucho más sencilla.

10. OSCILACION DE UNA MAQUINA SINCRONICA CUANDO OCURRE UN CORTOCIRCUITO EN EL SISTEMA.

Se considerará ahora la situación cuando un generador suple potencia a una barra infinita a través de dos líneas en paralelo, tal como se muestra en la figura 9.16.

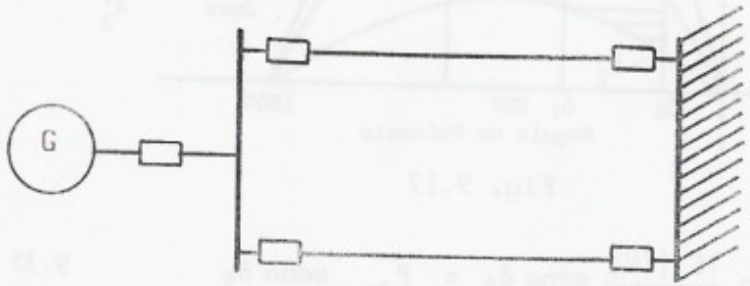


Fig. 9.16

La potencia máxima transferida por el generador a la barra infinita está determinada por las magnitudes de los voltajes de la barra infinita y del generado internamente en la máquina y por la reactancia entre estos dos voltajes. Al ocurrir un cortocircuito trifásico en cualquiera de las líneas la reactancia entre los voltajes varía, sucediendo lo mismo si se abre una de las líneas. Como los voltajes permanecen constantes, la potencia máxima transferida por el generador a la barra infinita en ambos casos varía. Se trata de analizar la estabilidad de la máquina cuando ocurre un cortocircuito trifásico en cualquiera de las líneas y posteriormente se abre esa línea para aislar el cortocircuito. En la figura 9.17 se muestra todo el proceso. El punto a es el punto de equilibrio antes de ocurrir la falla y la potencia transferida es

$$P_1 = \frac{|E'||V|}{X'_1} \text{ seno } \delta_0 = P_m = P_{1max} \text{seno } \delta_0 \qquad 9.32$$

Al ocurrir el cortocircuito la potencia máxima transferida disminuye porque ha aumentado el valor de la reactancia desde X'_1 a X'_2. El nuevo valor de la potencia transferida es

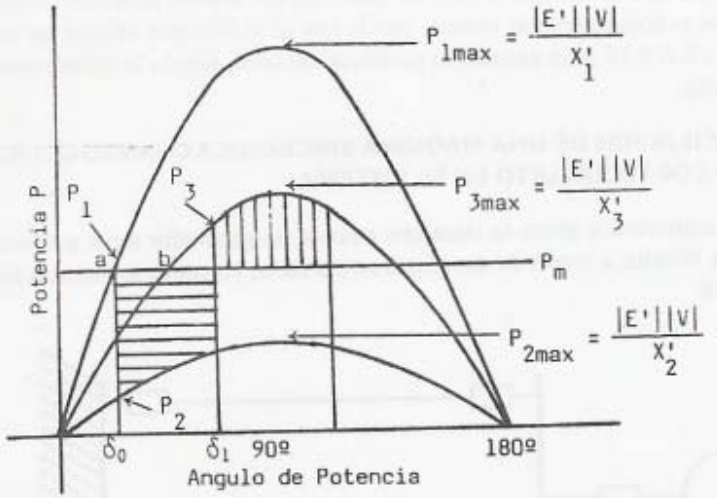


Fig. 9.17

$$P_2 = \frac{|E'||V|}{X'_2} \text{ seno } \delta_0 = P_{2max} \text{seno } \delta_0 \qquad 9.33$$

Si el cortocircuito es en una de las barras, la reactancia entre los voltajes es infinita y la potencia transferida P_2 es igual a cero.

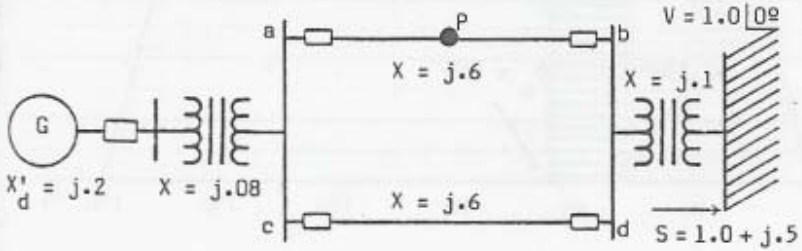
Al ocurrir el cortocircuito la potencia mecánica de entrada es mayor que la potencia eléctrica de salida, por lo que la potencia de aceleración $P_a = P_m - P_2$ hace que el ángulo del rotor aumente.

Si no se despeja el cortocircuito, el ángulo de potencia aumentará indefinidamente y la máquina perderá el sincronismo. Si la falla se despeja en el ángulo δ_1, la potencia se transmitirá por una sola línea y la reactancia entre los voltajes será X'_3. Esta reactancia es menor que X'_2 y mayor que X'_1, por lo que la potencia máxima transferida estará en medio de P_{1max} y P_{2max}. Al despejar la falla la potencia eléctrica transferida P_3 es mayor que la potencia mecánica inyectada a la máquina, por lo que la potencia de desaceleración $P_a = P_3 - P_m$ hará que el rotor pierda velocidad al entregar su energía cinética. Si el área de desaceleración es igual al área de aceleración, existirá un nuevo equilibrio en el punto b. El ángulo crítico es el mayor ángulo de potencia que hace que el área de desaceleración disponible sea igual al área de aceleración.

EJEMPLO 6

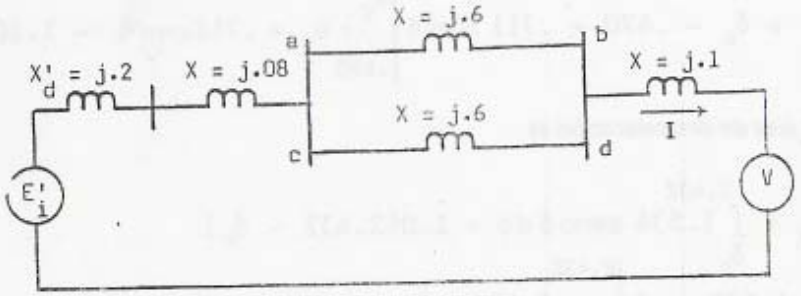
En el sistema de la figura siguiente ocurre un cortocircuito trifásico en la mitad de la línea ab, indicado con el punto P. Cuando esto sucede los interruptores adyacentes a la falla se abren para aislar el cortocircuito. Antes de la falla el generador suministra a la barra infinita una potencia de S = 1.0 + j.5 pu a voltaje nominal y tiene una constante de inercia de H = 3.0 Kw-seg/KVA. Calcular:

1) El ángulo crítico usando el método de áreas iguales.
2) Las ecuaciones de oscilación antes y después de limpiar la falla.



1)

Se analiza primero el estado del sistema anterior a la falla para determinar el voltaje E'_i detrás de la reactancia transitoria, el cual permanecerá constante durante todo el análisis del problema, y el ángulo de potencia inicial δ_0. El estado del sistema anterior a la falla se muestra en la figura siguiente.



$$I = \frac{S^*}{V^*} = \frac{1.0 - j.5}{1.0 + j0} = 1.0 - j.5$$

$$X'_1 = j.2 + j.08 + j\,\frac{.6 \times .6}{.6 + .6} + j.1 = j.68$$

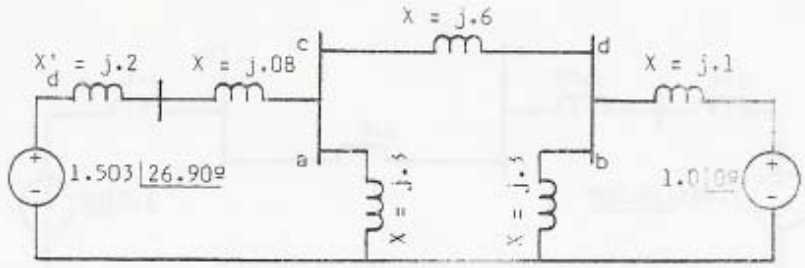
$$E'_i = 1.0 + j0.0 + (1.0 - j.5)j.68 = 1.34 + j.68$$

$$= 1.503\angle 26.90^\circ$$

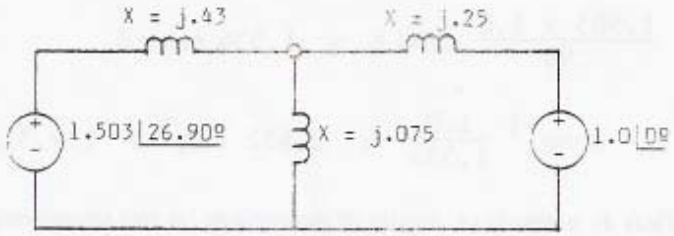
$$P_a = \frac{|E'_i||V|}{X'_d}\ \text{seno}\ \delta = \frac{1.503 \times 1.0}{.68}\ \text{seno}\ \delta = 2.210\ \text{seno}\ \delta$$

$$\delta_0 = \text{seno}^{-1}\frac{P_1}{2.210} = \text{seno}^{-1}\frac{1.0}{2.210} = 26.90^\circ = .47\ \text{rad}$$

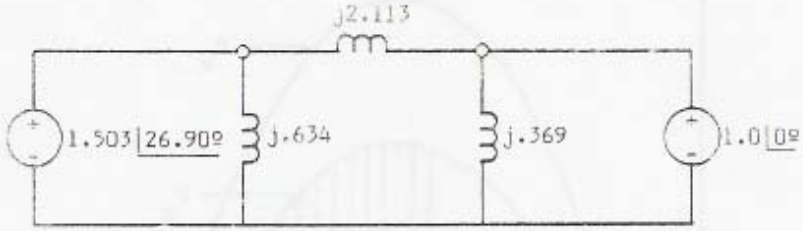
Se analiza ahora el estado del sistema durante la falla de manera de obtener la curva de potencia vs. ángulo de potencia y la ecuación de oscilación en este estado. El diagrama correspondiente se muestra en la figura siguiente:



Haciendo una conversión triángulo-estrella y agrupando los términos en serie se tiene:



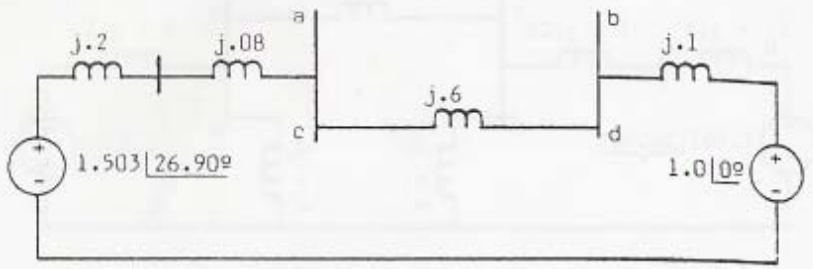
y haciendo de nuevo una conversión estrella-triángulo se obtiene:



La potencia transferida en este estado es

$$P_b = \frac{1.503 \times 1.0}{2.113}\ \text{seno}\ \delta = .711\ \text{seno}\ \delta$$

Por último se analiza el estado del sistema después de limpiar la falla de manera de obtener la curva de potencia vs. ángulo de potencia y la ecuación de oscilación de este estado. El diagrama correspondiente se muestra en la figura siguiente

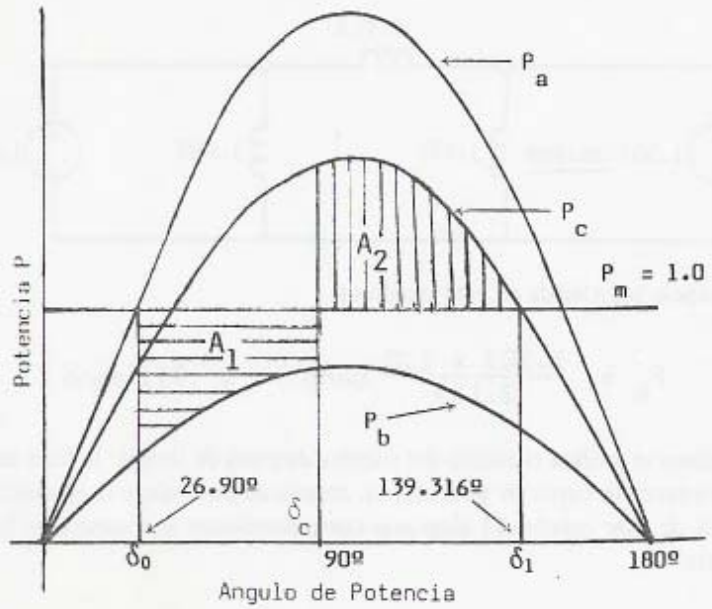


$$X_3^1 = j.2 + j.08 + j.6 + j.1 = j.98$$

$$P_c = \frac{1.503 \times 1.0}{.98} \text{ seno } \delta = 1.534 \text{ seno } \delta$$

$$\delta_1 = \pi - \text{seno}^{-1} \frac{1.0}{1.534} = 2.432 \text{ rad} = 139.316º$$

Las gráficas de potencia vs. ángulo de potencia de las tres situaciones anteriores se muestran en la figura siguiente. Con estas gráficas se calculan las áreas de aceleración y de desaceleración, lo cual permite calcular el ángulo crítico.



El área de aceleración es

$$A_1 = 1.0(\delta_c - .470) - \int_{.470}^{\delta_c} .711 \text{ seno } \delta \, d\delta$$

$$= \delta_c - .470 + .711 \cos \delta \Big|_{.470}^{\delta_c} = \delta_c + .711 \cos \delta - 1.104$$

El área de desaceleración es

$$A_2 = \int_{\delta_c}^{2.432} 1.534 \text{ seno } \delta \, d\delta - 1.0(2.432 - \delta_c)$$

$$= -1.532 \cos \delta \Big|_{\delta_c}^{2.432} - 2.432 + \delta_c = -1.268 + 1.534 \cos \delta_c + \delta_c$$

Igualando áreas

$$A_1 = A_2$$

$$.711 \cos \delta_c - 1.104 + \delta_c = 1.534 \cos \delta_c - 1.268 + \delta_c$$

ó

$$.823 \cos \delta_c = .164$$

de donde

$$\delta_c = 1.37 \text{ rad} = 78.522º$$

2)

Las ecuaciones de oscilación son

Antes de limpiar la falla:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{60\pi}{3} (1.0 - .711 \text{ seno } \delta) = 62.832 - 44.674 \text{ seno } \delta$$

Después de limpiar la falla:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{60}{3}(1.0 - 1.534 \text{ seno}\ \delta) = 62.832 - 96.384 \text{ seno}\ \delta$$

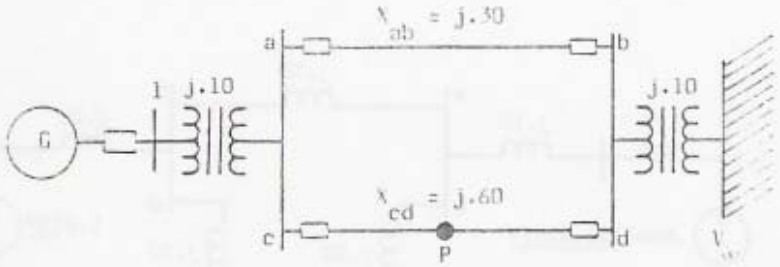
EJEMPLO 7

El generador del sistema que se indica tiene las siguientes características:

$X_d = j.85$ pu. $\quad X_q = X'_q = j.5$ pu. $\quad X'_d = j.2$ pu.

$H = 2.5 \frac{\text{Kw-seg}}{\text{KVA}}$

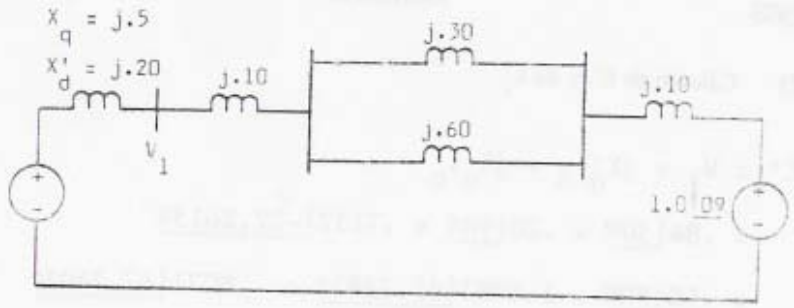
El voltaje en los terminales del generador es $V_1 = .84 \angle 30°$ y el voltaje en la barra infinita es $V_\infty = 1.0 \angle 0°$.



1) Calcular el voltaje generado E en el estado estable.
2) Calcular los voltajes generados E' y E'_i en el estado transitorio.
3) Dibujar el diagrama fasorial de voltajes y corrientes en el estado estable y en el estado transitorio.
4) Calcular el ángulo crítico del rotor del generador si en la mitad de la línea c-d ocurre un cortocircuito trifásico y se abren los interruptores adyacentes para aislarlo.
5) Calcular la ecuación de oscilación durante el cortocircuito y después de aislar el cortocircuito.

1) Cálculo de E:

Durante el estado estable se tiene el diagrama siguiente.



$$I = |I|\underline{\varphi} = \frac{.84\angle 30º - 1.0\angle 0º}{j.4} = 1.2517\angle 32.9759º$$

$$E_{oA} = V_1 + jX_qI = .84\angle 30º + .5\angle 90º \times 1.2517\angle 32.9759º$$
$$= 1.0211\angle 67.7387º = |E_{oA}|\angle \delta_e$$

$$\alpha = \delta_e - \varphi = 67.7387º - 32.9759º = 34.7628º$$

$$|I_q| = |I|\cos\alpha = 1.2517 \cos 34.7628º = 1.0283$$

$$I_q = |I_q|\angle \delta_e = 1.0283\angle 67.7387º$$

$$|I_d| = |I|\text{seno}\ \alpha = 1.2517 \text{ seno } 34.7628º = .7137$$

$$I_d = |I_d|\angle \delta_e - 90º = .7137\angle 67.7387º - 90º$$
$$= .7137\angle -22.2613º$$

$$E = V_1 + jX_dI_d + jX_qI_q$$
$$= .84\angle 30º + .85\angle 90º \times .7137\angle -22.2613º$$
$$+ .5\angle 90º \times 1.0283\angle 67.7387º = 1.2709\angle 67.7403º$$

2) Cálculo de E' y de E'_i.

$$E' = V_1 + jX'_d I_d + jX_q I_q$$

$$= .84\angle 30^\circ + .20\angle 90^\circ \times .7137\angle -22.2613^\circ$$

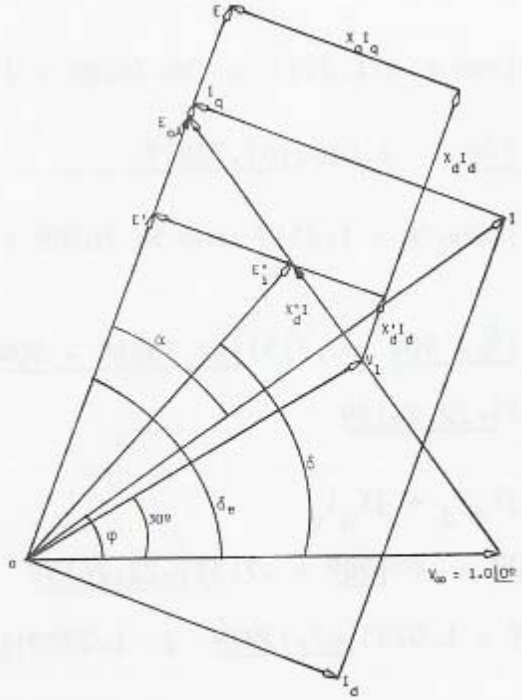
$$+ .50\angle 90^\circ \times 1.0283\angle 67.7387^\circ = .8071\angle 67.7403^\circ$$

$$E'_i = |E'_i|\angle\delta = V_1 + jX'_d I$$

$$= .84\angle 30^\circ + .20\angle 90^\circ \times 1.2517\angle 32.9759^\circ$$

$$= .8640\angle 46.8182^\circ$$

3) El diagrama fasorial de voltajes y corrientes en el estado estable y en el estado transitorio se enseña en la figura siguiente:



4) Cálculo del ángulo crítico

Antes del cortocircuito (estado estable)

$$P = \frac{|E'_i||V_\infty|}{X + X'_d} \text{ seno } \delta = \frac{.8640 \times 1.0}{.40 + .20} \text{ seno } \delta = 1.44 \text{ seno } \delta$$

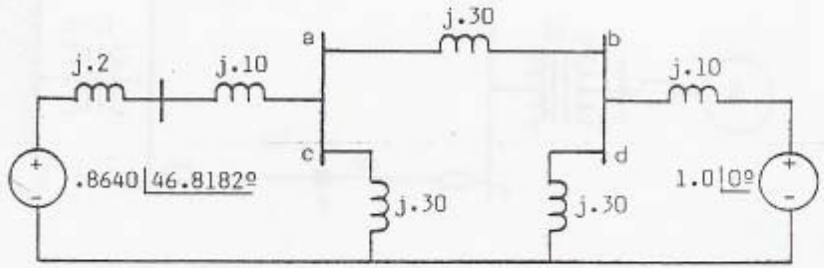
Por lo que la potencia mecánica es

$$P_m = 1.440 \text{ seno } 46.8182^\circ = 1.0500$$

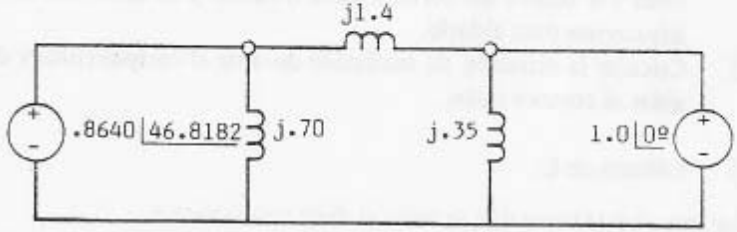
y $\quad \delta_0 = 46.8182^\circ = .8171 \text{ rad}$

Durante el cortocircuito.

el diagrama de impedancias y voltajes se muestra en la figura siguiente.



Después de la transformación se obtiene el siguiente diagrama.



Por lo que la potencia en este estado es

$$P = \frac{.8640 \times 1.0}{1.4} \text{ seno } \delta = .6171 \text{ seno } \delta$$

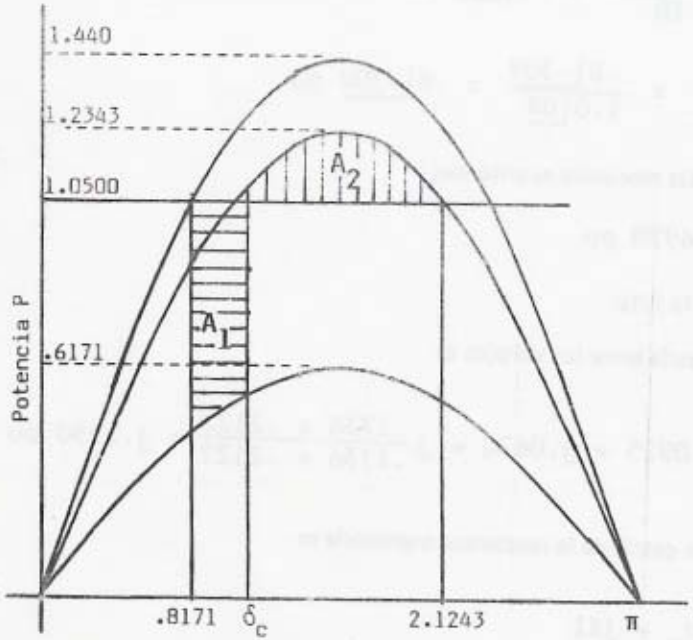
Después de limpiar el cortocircuito

La impedancia entre los dos voltajes es X = j.7, por lo que la potencia en este estado es

$$P = \frac{.8640 \times 1.0}{.7} \text{ seno } \delta = 1.2343 \text{ seno } \delta$$

$$\delta_1 = \pi - \text{seno}^{-1} \frac{1.050}{1.2343} = 2.1243 \text{ rad} = 121.7138^{\circ}$$

El diagrama de Potencia vs. ángulo de potencia en los tres estados se muestra en la figura siguiente.



Las áreas son

$$A_1 = 1.05(\delta_c - .8171) - \int_{.8171}^{\delta_c} .6171 \text{ seno } \delta \, d\delta$$

$$= 1.05\,\delta_c - 1.2803 + .6171 \text{ coseno } \delta_c$$

$$A_2 = \int_{\delta_c}^{2.1243} 1.2343 \text{ seno } \delta \, d\delta - 1.05(2.1243 - \delta_c)$$

$$= 1.05\,\delta_c - 1.5817 + 1.2343 \text{ coseno } \delta_c$$

Igualando áreas se tiene

$$.6172 \text{ coseno } \delta_c = .3014$$

$$\delta_c = 1.0606 \text{ rad} = 60.7688^{\circ}$$

5) Cálculo de las ecuaciones de oscilación.

Durante el cortocircuito:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{60\pi}{2.5}(1.05 - .6171 \text{ seno } \delta) = 79.1681 - 46.5282 \text{seno } \delta$$

Después de limpiar el cortocircuito:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{60\pi}{2.5}(1.05 - 1.2343 \text{ seno } \delta)$$

$$= 79.1681 - 93.0640 \text{ seno } \delta$$

EJEMPLO 8

En el sistema de la figura siguiente el alternador suple a la barra infinita una potencia de $S = 8.0\underline{|30^{\circ}}$ MVA. Al ocurrir un cortocircuito trifásico al comienzo de la línea b-c, se abren los interruptores para despejar el cortocircuito. Tomando como base a S = 10 MVA y V = 7.2 KV en la barra infinita, calcular:

1) El ángulo crítico usando el método de áreas iguales.
2) El tiempo crítico.

Las características del sistema son:

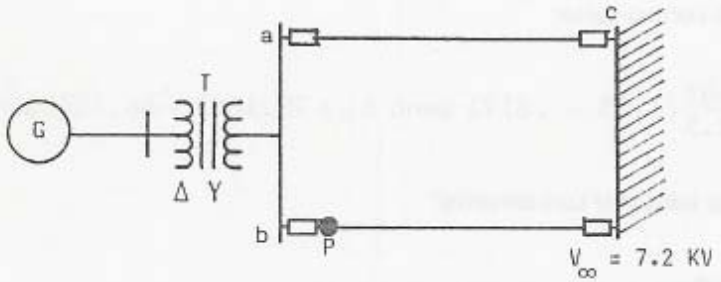
GENERADOR: 2.2 KV, 10 MVA, X'_d = j.058 ohmios,
H = 3.0 Kw-seg/KVA

TRANSFORMADOR: 2.4 Δ - 6.9 Y KV, 12 MVA, X = j.042 Ω
en el lado de baja tensión.

LINEA a-c: X = j.90 Ω LINEA b-c: X = j1.1 Ω

1) Se calcula el ángulo crítico.

Se consiguen primero todos los voltajes e impedancias en valores por unidad. Seleccionando como base a 7.2 KV, 10 MVA en la barra infinita se tiene:



$V_\infty = 7.2\angle 0º$ KV = $1.0\angle 0º$ pu

GENERADOR:

$$V_{base} = \frac{7.2 \times 2.4}{6.9} = 2.5043 \text{ KV}$$

$$Z_{base} = \frac{(2.5043)^2}{10} = .6272 \text{ ohmios}$$

$$X'_d = \frac{j.058}{.6272} = j.0925 \text{ pu}$$

TRANSFORMADOR:

$$X_T = \frac{j.042}{.6272} = j.0670 \text{ pu}$$

LINEAS:

$$Z_{base} = \frac{(7.2)^2}{10} = 5.1840 \text{ ohmios}$$

$$X_{ac} = \frac{j.90}{5.1840} = j.1736 \text{ pu}$$

$$X_{bc} = \frac{j1.1}{5.1840} = j.2122 \text{ pu}$$

La potencia y la corriente transferidas a la barra infinita son

$$S = \frac{8.0\angle 30º}{10} = .8\angle 30º \text{ pu} = .6928 + j.4000 \text{ pu}$$

$$I = \frac{S^*}{V^*} = \frac{.8\angle -30º}{1.0\angle 0º} = .8\angle -30º \text{ pu}$$

La potencia mecánica es entonces

$$P_m = .6928 \text{ pu}$$

Antes de la falla:

La reactancia entre los voltajes es

$$X = j.0925 + j.0670 + j\frac{.1736 \times .2122}{.1736 + .2122} = j.2550 \text{ pu}$$

El voltaje detrás de la reactancia transitoria es

$$E'_i = V_\infty + jXI$$

$$= 1.0\angle 0º + .2550\angle 90º \times .8\angle -30º = 1.1161\angle 9.1080º$$

Por lo que

$$\delta_0 = 9.1080º = .1590 \text{ rad.}$$

y

$$P = \frac{1.1161 \times 1.0}{.2550} \text{ seno } \delta = 4.3769 \text{ seno } \delta$$

Durante la falla:

$$X = \infty \qquad y \qquad P = 0$$

La potencia de aceleración es igual a la potencia mecánica, es decir

$$P_a = P_m = .6928 \text{ pu}$$

Después de limpiar la falla:

$$X = j.0925 + j.0670 + j.1736 = j.3331$$

$$P = \frac{1.1161 \times 1.0}{.3331} \text{ seno } \delta = 3.3505 \text{ seno } \delta$$

$$\delta_1 = \pi - \text{seno}^{-1} \frac{.6928}{3.3506} = 168.0671º = 2.9333 \text{ rad.}$$

El diagrama de potencias vs. ángulo de potencia en los diferentes estados se enseña en la figura siguiente.

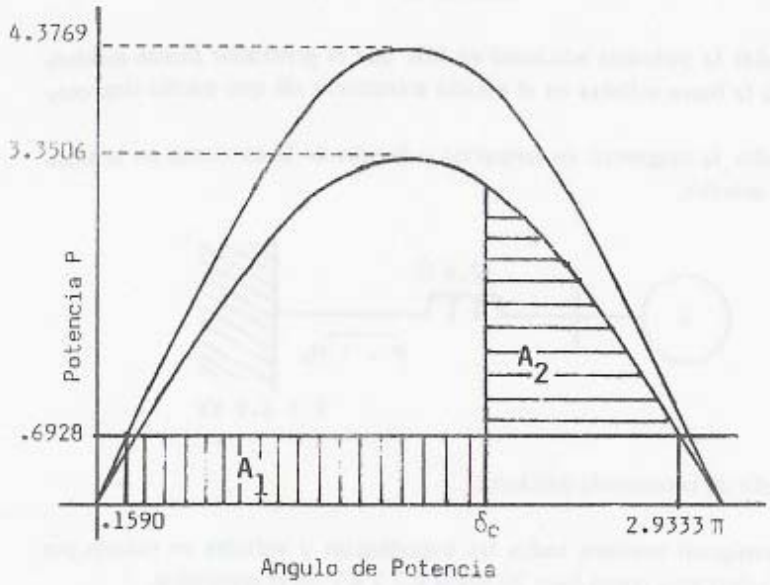
$$A_1 = .6928(\delta_c - .1590) = .6928\delta_c - .1102$$

$$A_2 = \int_{\delta_c}^{2.9333} 3.3506 \text{ seno } \delta \, d\delta - .6928(2.9333 - \delta_c)$$

$$= 1.2460 + 3.3506 \text{ coseno } \delta_c + .6928\delta_c$$

Igualando áreas.

$$-1.3562 = 3.3506 \text{ coseno } \delta_c \quad y \quad \delta_c = 113.8759º$$



2) Se calcula el tiempo crítico.

Como la potencia de aceleración es constante desde el momento en que ocurre el cortocircuito hasta el momento en que se limpia, se puede usar la ecuación 9.31 para calcular el tiempo crítico. Si la potencia de aceleración no hubiese sido constante en el período mencionado, se tendría que resolver las ecuaciones de oscilación por cualquiera de los métodos que se estudiarán más adelante.

$$t_c = \sqrt{\frac{2H(\delta_c - \delta_0)}{180f \times P_a}} = \sqrt{\frac{2 \times 3\,(113.8759º - 9.1080º}{180 \times 60 \times .6928}}$$

$$= .2899 \text{ segundos}$$

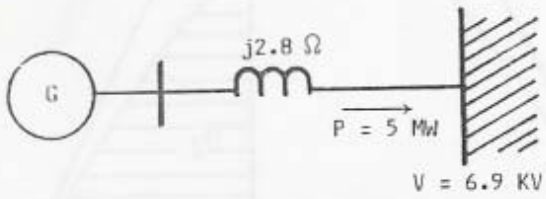
EJEMPLO 9

En el sistema siguiente el generador suministra a la barra infinita 5 MW con factor de potencia de .8 en atraso y 6.9 KV. Las características del sistema son

G: 20 MVA, 7.2 KV, $X_d = j.40$ pu, $X'_d = j.25$ pu.

LINEA: X = j2.8 ohmios

1) Calcular la potencia adicional en MW que el generador puede suministrar a la barra infinita en el estado transitorio sin que pierda sincronismo.
2) Calcular la magnitud en amperios y ángulo de la corriente en la situación anterior.



1) Cálculo de la potencia adicional.

Se consiguen primero todas las impedancias y voltajes en valores por unidad. Se selecciona como base 20 MVA y 7.2 KV en el generador.

$$I_b = \frac{20000}{\sqrt{3} \times 7.2} = 1603.7507 \text{ amperios}$$

$$Z_b = \frac{(7.2)^2}{20} = 2.5920 \text{ ohmios}$$

La potencia y corriente transferidas a la barra infinita es

$$S = 5 \text{ MW} = \frac{5}{20} = .25 \text{ pu}$$

$$I = \frac{5000}{\sqrt{3} \times 6.9 \times .8} = 522.9622\angle -36.8699^\circ \text{ Amperios}$$

$$= \frac{522.9622\angle -36.8699^\circ}{1603.7507} = .3261\angle -36.8699^\circ \text{ pu}$$

La impedancia de la línea es

$$X_L = j2.8 \text{ ohmios} = \frac{j2.8}{2.5929} = j1.0802 \text{ pu}$$

La reactancia transitoria del generador es

$$X'_d = j.25$$

La impedancia total es

$$X = j1.0802 + j.25 = j1.3302 \text{ pu}$$

El voltaje en la barra infinita es

$$V_\infty = \frac{6.9\angle 0^\circ}{7.2} = .9583\angle 0^\circ \text{ pu}$$

El voltaje detrás de la reactancia transitoria del generador es

$$E'_i = V_\infty + jXI$$

$$E'_i = .9583\angle 0^\circ + 1.3302\angle 90^\circ \times .3261\angle -36.8699^\circ$$

$$= 1.2670\angle 15.8959^\circ \text{ pu}$$

Por lo que

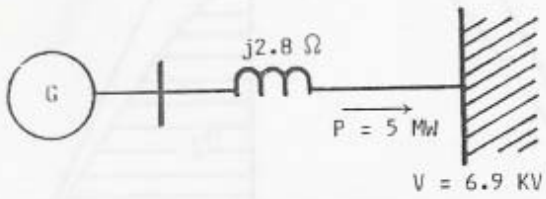
$$\delta_0 = 15.8959^\circ = .2774 \text{ rad.}$$

La potencia transferida en función del ángulo de potencia es

$$P = \frac{1.2670 \times .9583}{1.3302} \text{ seno } \delta = .9128 \text{ seno } \delta$$

Se desea calcular cual es la potencia adicional que el generador puede suministrar a la barra infinita en el estado transitorio sin que se pierda el sincronismo. Para ello se debe conseguir la potencia P_2 de manera que el área de desaceleración (A_1) sea igual al área de aceleración (A_2), como lo indica la siguiente gráfica de potencia vs. ángulo de potencia.
En la referida figura se observa que

1) Calcular la potencia adicional en MW que el generador puede suministrar a la barra infinita en el estado transitorio sin que pierda sincronismo.
2) Calcular la magnitud en amperios y ángulo de la corriente en la situación anterior.



1) Cálculo de la potencia adicional.

Se consiguen primero todas las impedancias y voltajes en valores por unidad. Se selecciona como base 20 MVA y 7.2 KV en el generador.

$$I_b = \frac{20000}{\sqrt{3} \times 7.2} = 1603.7507 \text{ amperios}$$

$$Z_b = \frac{(7.2)^2}{20} = 2.5920 \text{ ohmios}$$

La potencia y corriente transferidas a la barra infinita es

$$S = 5 \text{ MW} = \frac{5}{20} = .25 \text{ pu}$$

$$I = \frac{5000}{\sqrt{3} \times 6.9 \times .8} = 522.9622\angle -36.8699^\circ \text{ Amperios}$$

$$= \frac{522.9622\angle -36.8699^\circ}{1603.7507} = .3261\angle -36.8699^\circ \text{ pu}$$

La impedancia de la línea es

$$X_L = j2.8 \text{ ohmios} = \frac{j2.8}{2.5929} = j1.0802 \text{ pu}$$

La reactancia transitoria del generador es

$$X'_d = j.25$$

La impedancia total es

$$X = j1.0802 + j.25 = j1.3302 \text{ pu}$$

El voltaje en la barra infinita es

$$V_\infty = \frac{6.9\angle 0^\circ}{7.2} = .9583\angle 0^\circ \text{ pu}$$

El voltaje detrás de la reactancia transitoria del generador es

$$E'_i = V_\infty + jXI$$

$$E'_i = .9583\angle 0^\circ + 1.3302\angle 90^\circ \times .3261\angle -36.8699^\circ$$

$$= 1.2670\angle 15.8959^\circ \text{ pu}$$

Por lo que

$$\delta_0 = 15.8959^\circ = .2774 \text{ rad.}$$

La potencia transferida en función del ángulo de potencia es

$$P = \frac{1.2670 \times .9583}{1.3302} \text{ seno } \delta = .9128 \text{ seno } \delta$$

Se desea calcular cual es la potencia adicional que el generador puede suministrar a la barra infinita en el estado transitorio sin que se pierda el sincronismo. Para ello se debe conseguir la potencia P_2 de manera que el área de desaceleración (A_1) sea igual al área de aceleración (A_2), como lo indica la siguiente gráfica de potencia vs. ángulo de potencia.
En la referida figura se observa que

considerar la situación cuando un generador suple potencia a una barra infinita como la representada en la figura 9.16. Al desconectar a una de las líneas puede resultar que la máquina pierda sincronismo a pesar de que la otra línea pudiera transmitir la potencia en condiciones de estado estable. En la figura 9.18 se muestra el proceso de desconexión y reposición de una línea. El punto a es el punto de equilibrio antes de desconectar la línea y la potencia transferida es

$$P_1 = P_m = \frac{|E'_i||V_\infty|}{X_1} \text{ seno } \delta_0$$

Al desconectarse la línea la potencia eléctrica transferida disminuye porque ha aumentado el valor de la reactancia entre los voltajes, siendo la nueva potencia.

$$P_2 = \frac{|E'_i||V_\infty|}{X_2} \text{ seno } \delta_0$$

En este momento la potencia mecánica es mayor que la potencia eléctrica transferida y la potencia de aceleración $P_a = P_m - P_2$ hace que aumente el valor del ángulo de potencia. Si el área de aceleración es mayor que el

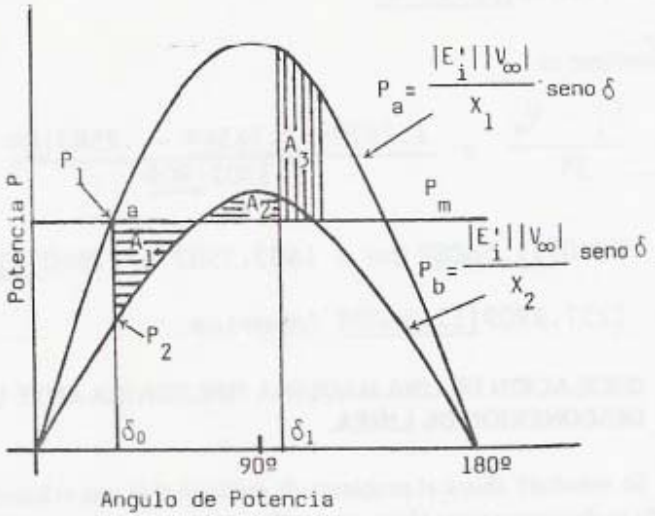
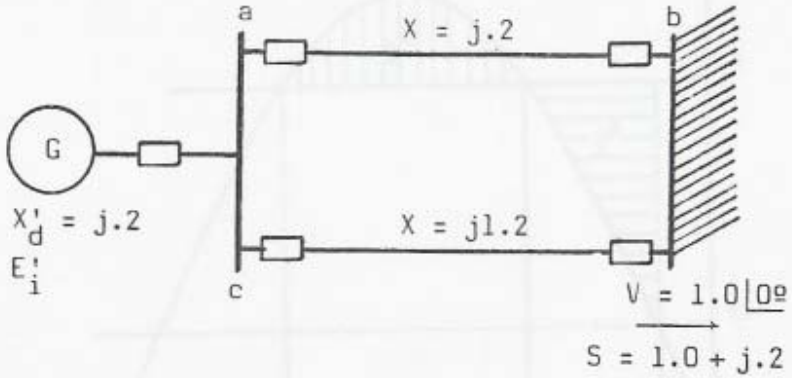


Fig. 9.18

área de desaceleración, el ángulo de potencia aumentará indefinidamente y la máquina perderá el sincronismo. Para evitar esta situación se debe reponer la línea desconectada de manera que se pueda restituir el estado inicial. En la figura 9.18 se repone la línea en el ángulo δ_1, por lo que la estabilidad se consigue si $A_2 + A_3 \geq A_1$. El sistema se estabilizará de nuevo en el punto a.

EJEMPLO 10

En el sistema de la figura siguiente el alternador suple a la barra infinita una potencia de S = 1.0 + j.2. Si se desconecta la línea ab, calcular el ángulo crítico, es decir el ángulo de potencia máximo en el cual deba conectarse nuevamente la línea ab para que la máquina no pierda sincronismo.



Antes de desconectar la línea ab:

$$I = \frac{S^*}{V^*} = \frac{1.0 - j.2}{1.0} = 1.0 - j.2 = 1.020\angle -11.310º$$

$$X_1 = j.2 + j\,\frac{.2 \times 1.2}{.2 + 1.2} = j.371 \text{ pu}$$

$$E'_i = 1.0\angle 0º + .371\angle 90º \times 1.020\angle -11.310º$$

$$= 1.136\angle 19.057º = 1.136\angle .333 \text{ rad}$$

$$P_a = \frac{1.136 \times 1.0}{.371} \text{ seno } \delta = 3.063 \text{ seno } \delta$$

Después de desconectar la línea ab

$$P_b = \frac{1.136 \times 1.0}{1.4} \text{ seno } \delta = .811 \text{ seno } \delta$$

$$\delta_0 = 19.057º = .333 \text{ rad}$$

$$\delta_1 = 180º - 19.057º = 160.943º = 2.809 \text{ rad.}$$

$$A_1 = 1.0(\delta_c - .333) - \int_{.333}^{\delta_c} .811 \text{ seno } \delta \, d\delta$$

$$= \delta_c + .811 \text{ coseno } \delta_c - 1.1$$

$$A_2 = \int_{\delta_c}^{2.809} 3.063 \text{ seno } \delta \, d\delta - 1.0(2.809 - \delta_c)$$

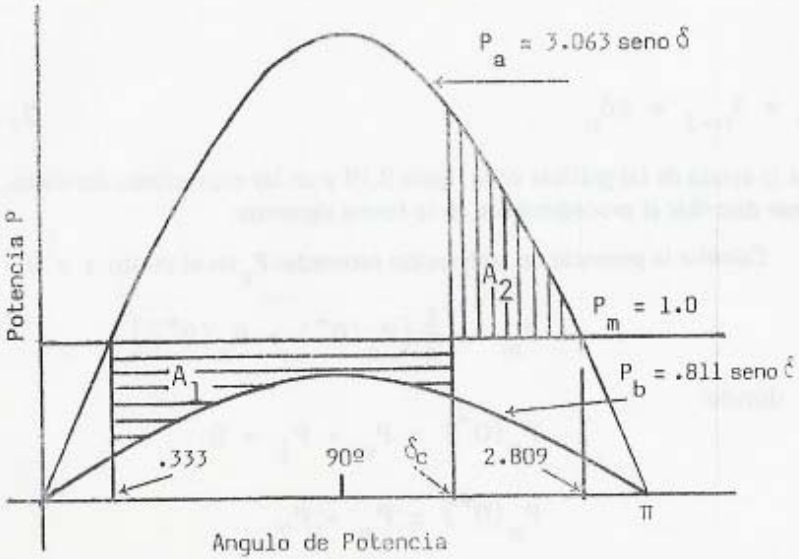
$$= .086 + 3.063 \text{ coseno } \delta_c + \delta_c$$

Igualando áreas

$$.811 \text{ coseno } \delta_c - 1.1 = .086 + 3.063 \text{ coseno } \delta_c$$

de donde

$$\text{coseno } \delta_c = -.527 \qquad \delta_c = 2.125 \text{ rad} = 121.779º$$



12. SOLUCION DE LA ECUACION DE OSCILACION POR EL METODO PUNTO POR PUNTO.

El criterio de áreas iguales en estabilidad es muy útil para determinar si un generador permanece en sincronismo después de una perturbación en el sistema. También ayuda a determinar el ángulo crítico o enseña el márgen de estabilidad en caso en que la perturbación cese antes de alcanzar el angulo crítico. Pero no siempre permite calcular el tiempo en que se alcance el ángulo crítico, el cual es llamado tiempo crítico. El tiempo crítico es necesario para calcular el tiempo en que los interruptores de líneas deben actuar ante la perturbación y se puede calcular numéricamente directamente con el ángulo crítico sólo si la potencia de aceleración es constante durante la perturbación. Si este no es el caso, habrá que resolver la ecuación de oscilación

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_m - \frac{|E'_i||V|}{X'_d} \text{ seno } \delta$$

La solución de esta ecuación de oscilación es la función δ vs. t, lo cual nos permite visualizar si la máquina pierde sincronismo después de una perturbación. Existen varios métodos numéricos para encontrar esta solución, algunos de los cuales se estudiarán más adelante.

Cuando en un sistema de potencia se estudia la oscilación de una sola máquina interconectada a una barra infinita, el método punto por punto es el más utilizado porque es muy fácil de seguir. El método consiste en calcular el ángulo de potencia de la ecuación de oscilación para cada incremento de tiempo. La precisión por supuesto será mejor en la medida en que ese incremento sea menor. El método se basa en las siguientes suposiciones:

1) La potencia de aceleración P_a y consecuentemente la aceleración α calculada al comienzo de un intervalo es constante desde la mitad del intervalo anterior hasta la mitad del intervalo considerado.

2) La velocidad angular ω se considera constante en un intervalo con el valor calculado en la mitad de ese intervalo.

En la figura 9.19 se muestra gráficamente el proceso para calcular el ángulo de potencia δ por el método punto por punto. La figura indica que entre los intervalos n−3/2 y n−1/2 hay un cambio de velocidad angular causada por la potencia de aceleración constante P_a (n−1). Ese cambio de velocidad es el producto de la aceleración por el intervalo de tiempo. Es decir

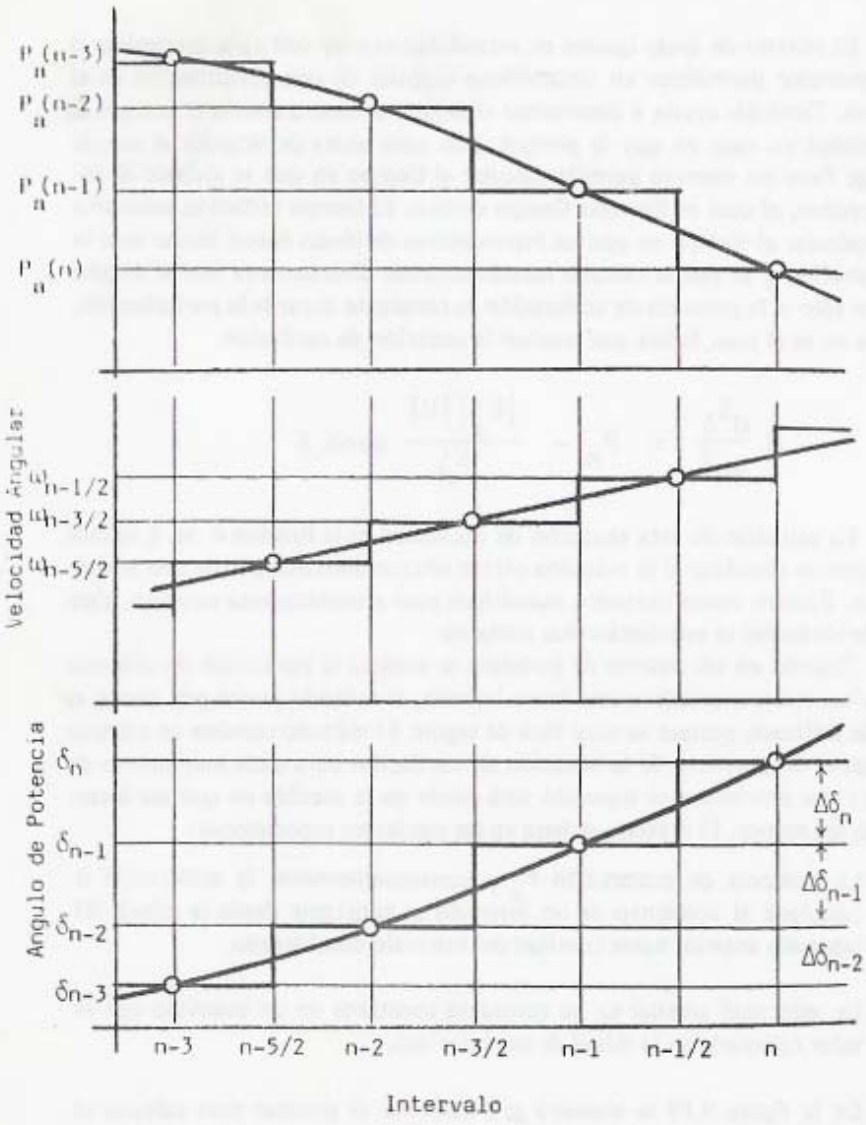


Fig. 9.19

$$\omega_{n-1/2} - \omega_{n-3/2} = \alpha\Delta t = \frac{d^2\delta}{dt^2}\Delta t = \frac{P_a(n-1)}{M}\Delta t \qquad 9.34$$

El cambio de δ en cualquier intervalo es el producto de la velocidad angular ω del intervalo por el tiempo del intervalo.

$$\Delta\delta_{n-1} = \delta_{n-1} - \delta_{n-2} = \omega_{n-3/2}\,\Delta t \qquad 9.35$$

y

$$\Delta\delta_n = \delta_n - \delta_{n-1} = \omega_{n-1/2}\,\Delta t \qquad 9.36$$

Restando la ecuación 9.36 menos la ecuación 9.35

$$\Delta\delta_n - \Delta\delta_{n-1} = (\omega_{n-1/2} - \omega_{n-3/2})\Delta t = \frac{P_a(n-1)}{M}(\Delta t)^2$$

de donde

$$\Delta\delta_n = \Delta\delta_{n-1} + \frac{P_a(n-1)}{M}(\Delta t)^2 \qquad 9.37$$

y

$$\delta_n = \delta_{n-1} + \Delta\delta_n \qquad 9.38$$

Con la ayuda de las gráficas de la figura 9.19 y de las expresiones derivadas, se puede describir el procedimiento en la forma siguiente:

1) Calcular la potencia de aceleración promedio P_a en el punto $t = 0$.

$$P_a = \frac{1}{2}\left[P_a(0^-) + P_a(0^+)\right]$$

en donde

$$P_a(0^-) = P_m - P_1 = 0$$

$$P_a(0^+) = P_m - P_2$$

2) Calcular la variación del ángulo de potencia δ en el intervalo considerado.

$$\Delta\delta_n = \Delta\delta_{n-1} + \frac{P_{a(n-1)}}{M} (\Delta t)^2$$

en donde $\Delta\delta_{n-1}$ es la variación de δ en el intervalo anterior, siendo en el primer período $\Delta\delta_0 = 0$.

3) Calcular el valor de δ en el intervalo considerado.

$$\delta_n = \delta_{n-1} + \Delta\delta_n$$

4) Para calcular un nuevo valor del ángulo de potencia se calcula la potencia de aceleración P_a y se regresa al paso 2. Si el punto considerado es un punto de discontinuidad se debe calcular la potencia de aceleración promedio.

$$P_a = \frac{1}{2}[\, P_a(t^-) + P_a(t^+)\,]$$

EJEMPLO 11

En el problema del Ejemplo 6 y usando un incremento de tiempo de $\Delta t = .05$ segundos:

1) Calcular la curva de oscilación con falla sostenida.
2) Calcular la curva de oscilación si la falla se aísla a $t = .15$ segundos.
3) Con la curva de la parte 1 y el ángulo crítico calculado en el Ejemplo 6, calcular el tiempo crítico.

1) Se consiguen los valores para dibujar la curva de oscilación en falla sostenida.

Del Ejemplo 6:

$P_b = .711 \text{ seno } \delta \qquad P_c = 1.534 \text{ seno } \delta \qquad \delta_0 = 26.9º$

$H = 3 \qquad M = 3/180 \times 60 = 2.777 \times 10^{-4}$

Comenzando con $n = 1$ ($t = .05$ segundos):

$P_a(0^-) = 0.0$

$P_a(0^+) = 1.0 - .711 \text{ seno } 26.9º = .6783$

$$P_a(0) = \frac{0.0 + .6783}{2} = .3391$$

$$\Delta\delta_1 = \Delta\delta_0 + \frac{P_a(0)}{M} \times (\Delta t)^2 = 0.0 + \frac{.3391}{.0002777} \times (.05)^2$$

$$= 3.0532º$$

$$\delta_1 = \delta_0 + \Delta\delta_1 = 26.9º + 3.0532º = 29.9532º$$

Para $n = 2$ ($t = .10$ segundos):

$$P_a = 1.0 - .711 \text{ seno } 29.9532º = .6450$$

$$\Delta\delta_2 = \Delta\delta_1 + \frac{P_a(1)}{M} \times (\Delta t)^2 = 3.0532 + \frac{.6450}{.000277} \times (.05)^2$$

$$= 8.8599º$$

$$\delta_2 = \delta_1 + \Delta\delta_2 = 29.9532º + 8.8599º = 38.8132º$$

En la Tabla 3 se enseñan éstos y otros valores, los cuales han sido conseguidos siguiendo el mismo procedimiento.

2) Se consiguen los valores para dibujar la curva de oscilación si la falla se aísla a $t = .15$ segundos.

n	t	P_a	$\Delta\delta_n$	δ_n
0	.00	.0000	.0000	26.9000
1	.05	.3391	3.0532	29.9532
2	.10	.6450	8.8599	38.8132
3	.15	.5543	13.8505	52.6637
4	.20	.4346	17.7638	70.4276
5	.25	.3300	20.7354	91.1630
6	.30	.2891	23.3384	114.5015
7	.35	.3530	26.5165	141.0181
8	.40	.5527	31.4925	172.5106
9	.45	.9073	39.6607	212.1714
10	.50	1.3785	52.0714	264.2428

Tabla 3. Cálculo de la Curva de Oscilación para falla sostenida.

Los valores de potencia de aceleración, variación del ángulo de potencia y el ángulo de potencia hasta t = .15 segundos son los mismos calculados en la parte 1. En el tiempo t = .15 segundos hay un punto de discontinuidad, por lo que se calcula la potencia de aceleración antes y después de este tiempo para conseguir la potencia de aceleración promedio en dicho tiempo. Se tiene entonces que

a t = .15 segundos:

$\Delta\delta_3 = 13.8505º \qquad \delta_3 = 52.6637º$

por lo que para n = 4 (t = .20 segundos):

$P_a(.15^-) = 1.0 - .711 \text{ seno } 52.6637º = .43469$

$P_a(.15^+) = 1.0 - 1.534 \text{ seno } 52.6637º = -.21966$

$$P_a(.15) = \frac{.43469 - .21966}{2} = .1075$$

$$\Delta\delta_4 = 13.8505 + \frac{.1075}{.0002777} \times (.05)^2 = 14.8184º$$

$$\delta_4 = 52.6637º + 14.8184º = 67.4821º$$

Para n = 5 (t = .25 segundos):

$$P_a = 1.0 - 1.534 \text{ seno } 67.4821º = -.4170$$

$$\Delta\delta_5 = 14.8184º + \frac{(-.4170)}{.0002777} \times (.05)^2 = 11.0639º$$

$$\delta_5 = 67.4821º + 11.0639º = 78.5460º$$

En la Tabla 4 se enseñan éstos y otros valores, los cuales han sido conseguidos siguiendo el mismo procedimiento.

n	t	P_a	$\Delta\delta_n$	δ_n
0	.00	.0000	.0000	26.9000
1	.05	.3391	3.0532	29.9532
2	.10	.6450	8.8599	38.8132
3	.15	.5543	13.8505	52.6637
4	.20	.1075	14.8184	67.4821
5	.25	-.4170	11.0639	78.5460
6	.30	-.5034	6.5316	85.0776
7	.35	-.5283	1.7753	86.8529
8	.40	-.5316	-3.0113	83.8416
9	.45	-.5251	-7.7389	76.1026
10	.50	-.4890	-12.1420	63.9605
11	.55	-.3782	-15.5476	48.4129
12	.60	-.1473	-16.8741	31.5387

Tabla 4. Cálculo de la curva de oscilación si la falla se aisla a t=.15 segundos.

3) Trazado de curvas y cálculo del tiempo crítico.

Las curvas de oscilación para los dos casos estudiados se muestran en la figura siguiente. Se observa que en la falla sostenida el ángulo de potencia aumenta indefinidamente, mientras que cuando se limpia la falla a t = .15 segundos, el ángulo de potencia aumenta hasta un máximo de 86.8529° y luego disminuye oscilando alrededor del punto de reposo. Si la falla se aísla más rápidamente, el valor máximo del ángulo de potencia disminuye y se garantiza más aún la estabilidad. Al contrario, si se tarda más en limpiar la falla el valor máximo del ángulo de potencia aumenta, con la posibilidad de no regresar hacia el punto de reposo, perdiéndose por lo tanto el sincronismo.

Para valores pequeños de tiempo el ángulo de potencia es prácticamente el mismo, independientemente del tiempo de limpieza de la falla. Por este motivo, con cualquier curva de oscilación en donde la falla se limpia cerca del ángulo crítico o con la curva de oscilación de falla sostenida se puede conseguir el tiempo crítico si se conoce el ángulo crítico. En la figura siguiente se usa la curva de oscilación para falla sostenida y el tiempo crítico encontrado es de aproximadamente .217 segundos. La otra forma de encontrar el tiempo crítico sin necesidad de conocer el ángulo crítico es el de trazar diferentes curvas de oscilación para diferentes tiempos de limpieza de falla. El tiempo crítico es el tiempo que limita a una curva oscilante de otra que no lo sea.

13. SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

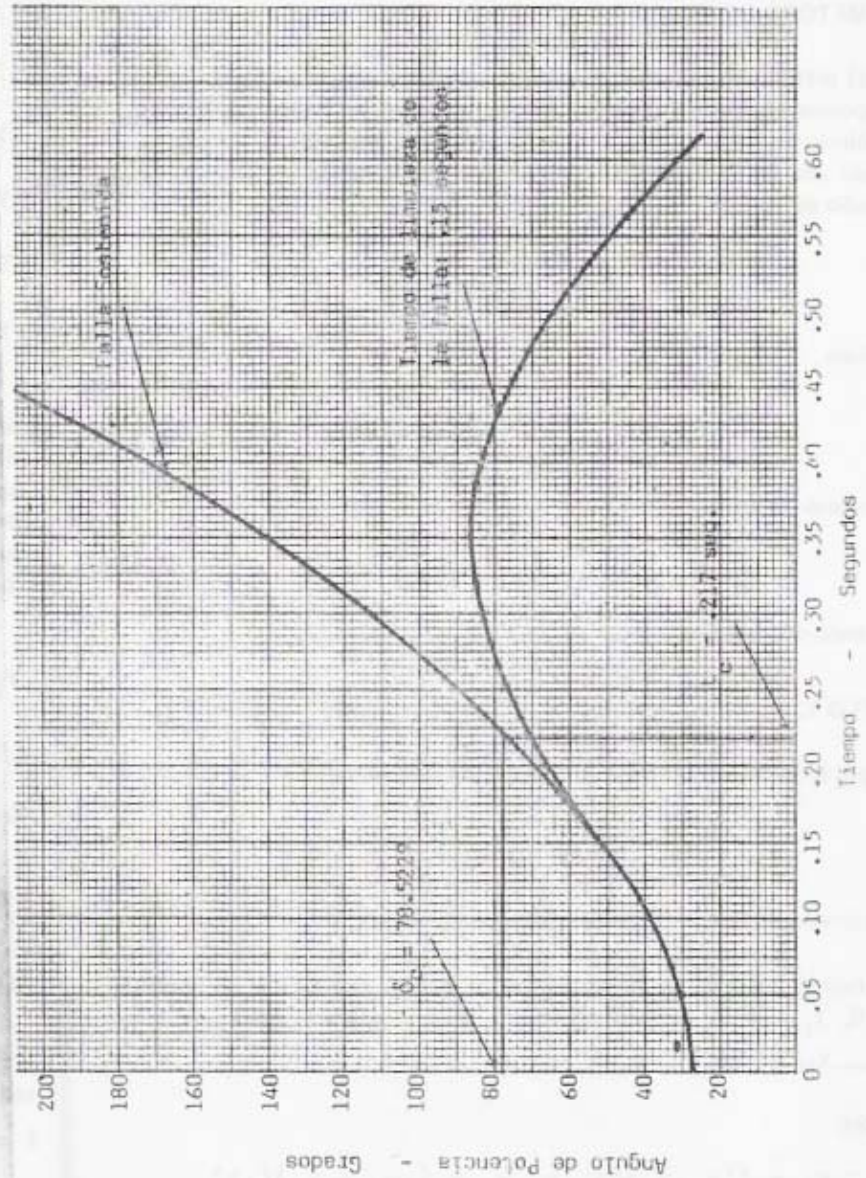
La ecuación de oscilación es una ecuación diferencial de segundo orden, cuya solución requiere de técnicas de análisis numérico. Antes de estudiar detenidamente la forma de solución de esta ecuación de oscilación, se revisará primero la forma de solución de la ecuación diferencial de primer orden. Las ecuaciones diferenciales de segundo orden se resuelven transformándolas en sistemas de ecuaciones de primer orden.

El problema consiste en resolver la ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x,y) \qquad -9.39$$

con condiciones iniciales $y_0 = \alpha$

Se considerarán diferentes métodos numéricos para la solución.



13.1 METODO DE EULER

El método de Euler es un método numérico simple de lograr una solución aproximada de una ecuación diferencial de primer orden. Sea I un intervalo abierto de la forma $a < x < b$. Se divide este intervalo en n partes iguales, cada una de longitud Δx. Se consigue una solución aproximada de y' por medio de

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \qquad 9.40$$

o también

$$f(x_i, y_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \qquad 9.41$$

desarrollando se tiene

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x \qquad 9.42$$

empezando con $y_0 = \alpha$

EJEMPLO 12

Conseguir la solución numérica de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -y + x$$

en el intervalo $0 < x < 1$, empezando con $y_0 = 1.0$.

Dividiendo el intervalo en 10 partes iguales se tiene que $\Delta x = .1$. Además $x_0 = 0$, $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, con $i = 0, 1, 2, \ldots 9$, por lo que $x_1 = .1$, $x_2 = .2$, ... $x_{10} = 1.0$.

Entonces

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x = y_i + (-y_i + x_i)(.1)$$

$$= .9y_i + .1x_i$$

por lo que

$$y_1 = .9y_0 + .1x_0 = .9(1.0) + .1(0.0) = .900$$

$$y_2 = .9y_1 + .1x_1 = .9(.900) + .1(.1) = .820$$

$$y_3 = .9y_2 + .1x_2 = .9(.820) + .1(.2) = .758$$

$$y_4 = .9y_3 + .1x_3 = .9(.758) + .1(.3) = .712$$

13.2 EL METODO DE EULER MODIFICADO

En la aplicación del método de Euler se calcula un valor de $y' = f(x,y)$ al comienzo del subintervalo Δx y se asume constante en todo el subintervalo. Se puede mejorar la precisión calculando el nuevo valor de y_{i+1} en la forma anterior pero usando en su cálculo los nuevos valores de y_{i+1} y x_{i+1} al final del subintervalo conjuntamente con los valores de y_i y x_i al comienzo del subintervalo y usando un promedio de ambos valores para todo el subintervalo. Es decir

$$y_{i+1} = y_i + \frac{[f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_i, y_i)]}{2}\Delta x \qquad 9.43$$

EJEMPLO 13

Resolver el Ejemplo 12 usando el método de Euler modificado.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{[(-y_{i+1} + x_{i+1}) + (-y_i + x_i)]}{2}(.1)$$

de donde

$$y_{i+1} = .905\, y_i + .048\, x_i + .048\, x_{i+1}$$

con lo cual

$i = 0$: $y_1 = .905(1.00) + .048(0.0) + .048(.1)$

$= .910$

$i = 1$: $y_2 = .905(.910) + .048(.10) + .048(.2)$

$= .837$

$i = 2$: $y_3 = .905(.837) + .048(.20) + .048(.3)$
$= .781$

$i = 3$: $y_4 = .905(.781) + .048(.30) + .048(.4)$
$= .740$

13.3 EL METODO RUNGE KUTTA DE SEGUNDO ORDEN

El método Runge Kutta aumenta la precisión del método de Euler simplemente mejorando la ecuación de diferencia 9.42. El método consiste en considerar la fórmula más general.

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = a_0 f(x_i, y_i) + a_1 f(x_i + b\Delta x,\ y_i + c\Delta x) \qquad 9.44$$

Escribiendo a la función f como una expansión de Taylor de 2 variables, truncándola en el segundo orden y asignando valores a a_0, a_1, b y c, el resultado final es

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_0 + k_1) \qquad 9.45$$

en donde

$$k_0 = \Delta x f(x_i, y_i)$$
$$k_1 = \Delta x f(x_{i+1}, y_i + k_0) \qquad 9.46$$

El error en esta aproximación es de $(\Delta x)^3$, porque la serie fue truncada después del término de segundo orden.

EJEMPLO 14

Resolver el Ejemplo 12 usando el método Runge Kutta de segundo orden.

$$x_0 = 0.0 \qquad y_0 = 1.0$$

$i = 0$:

$$k_0 = \Delta x(-y_0 + x_0) = .1(-1.0 + 0.0) = -.100$$
$$k_1 = \Delta x[-(y_0 + k_0) + x_1] = .1(-.9 + .1) = -.080$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_0 + k_1) = 1.0 + \frac{-.1 - .08}{2} = .910$$

$i = 1$:

$$k_0 = \Delta x(-y_1 + x_1) = .1(-.910 + .1) = -.081$$
$$k_1 = \Delta x[-(y_1 + k_0) + x_2] = .1(-.829 + .2) = -.063$$
$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_0 + k_1) = .910 + \frac{-.081 - .063}{2} = .838$$

$i = 2$:

$$k_0 = \Delta x(-y_2 + x_2) = .1(-.838 + .2) = -.064$$
$$k_1 = \Delta x[-(y_2 + k_0) + x_3] = .1(-.774 + .3) = -.047$$
$$y_3 = y_2 + \frac{1}{2}(k_0 + k_1) = .838 + \frac{-.064 - .047}{2} = .782$$

$i = 3$:

$$k_0 = \Delta x(-y_3 + x_3) = .1(-.782 + .3) = -.0482$$
$$k_1 = \Delta x[-(y_3 + k_0) + x_4] = .1(-.734 + .4) = -.033$$
$$y_4 = y_3 + \frac{1}{2}(k_0 + k_1) = .782 + \frac{-.0482 - .033)}{2} = .741$$

13.4 EL METODO RUNGE KUTTA DE CUARTO ORDEN

Siguiendo el mismo procedimiento usando en la aproximación de segundo orden, después de truncar la serie de Taylor en el término de cuarto orden, la fórmula de aproximación Runge Kutta es

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \qquad 9.47$$

en donde

$$k_0 = \Delta x f(x_i, y_i)$$

$$k_1 = \Delta x f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2},\ y_i + \frac{k_0}{2}\right) \qquad 9.48$$

$$k_2 = \Delta x f(x_i + \Delta x/2,\ y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = \Delta x f(x_{i+1},\ y_i + k_2)$$

El error en esta aproximación es del orden de $(\Delta x)^5$.

EJEMPLO 15

Resolver el Ejemplo 12 usando el método Runge Kutta de cuarto orden.

$$x_0 = 0.0 \qquad y_0 = 1.0$$

i = 0:

$$k_0 = \Delta x(-y_0 + x_0) = .1(-1.0 + 0.0) = -.1$$

$$k_1 = \Delta x[-(y_0 + k_0/2) + (x_0 + \Delta x/2)]$$
$$= .1(-.95 + .05) = -.09$$

$$k_2 = \Delta x[-(y_0 + k_1/2) + (x_0 + \Delta x/2)]$$
$$= .1(-.955 + .05) = -.091$$

$$k_3 = \Delta x[-(y_0 + k_2) + x_1] = .1(-.909 + .1) = -.081$$

$$y_1 = 1.0 + \frac{-.1 + 2(-.090) + 2(-.091) - .081}{6} = .910$$

i = 1:

$$k_0 = \Delta x(-y_1 + x_1) = .1(-.910 + .1) = -.081$$

$$k_1 = \Delta x[-(y_1 + k_0/2) + (x_1 + \Delta x/2)]$$
$$= .1(-.870 + .15) = -.072$$

$$k_2 = \Delta x[-(y_1 + k_1/2) + (x_1 + \Delta x/2)]$$
$$= .1(-.874 + .15) = -.072$$

$$k_3 = \Delta x[-(y_1 + k_2) + x_2] = .1(-.838 + .2) = -.064$$

$$y_2 = .91 + \frac{-.081 - 2(.072) - 2(.072) - .064}{6} = .838$$

i = 2:

$$k_0 = \Delta x(-y_2 + x_2) = .1(-.838 + .2) = -.064$$

$$k_1 = \Delta x[-(y_2 + k_0/2) + (x_2 + \Delta x/2)]$$
$$= .1(-.806 + .25) = -.056$$

$$k_2 = \Delta x[-(y_2 + k_1/2) + (x_2 + \Delta x/2)]$$
$$= .1(-.810 + .25) = -.056$$

$$k_3 = \Delta x[-(y_2 + k_2) + x_3] = .1(-.782 + .3) = -.048$$

$$y_2 = .838 + \frac{-.064 - 2(.056) - 2(.056) - .048}{6} = .782$$

Es interesante observar que la solución exacta de la ecuación diferencial

$$y' = -y + x$$

es

$$y = -1.0 + x + 2e^{-x}$$

de la cual se puede obtener el valor exacto de y(x) para cualquier valor de x. En la Tabla 5 se compara este valor exacto con los valores obtenidos en todos los métodos estudiados.

x	Euler	Euler Modifica.	Run.Kutta 2º Orden	Run.Kutta 4º Orden	Valor Exacto
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
.1	.900	.910	.910	.910	.910
.2	.820	.837	.838	.838	.837
.3	.758	.781	.782	.782	.782
.4	.712	.740	.741	.741	.741
.5	.681	.713	.714	.713	.713
.6	.663	.697	.699	.698	.698
.7	.657	.693	.695	.694	.693
.8	.661	.698	.700	.698	.699
.9	.675	.713	.715	.712	.713
1.0	.697	.735	.738	.735	.736

Tabla 5. Comparación de los resultados de la ecuación $y' = -y + x$ por diferentes métodos numéricos.

14. SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN.

Las técnicas descritas anteriormente para la solución de una ecuación diferencial de primer orden pueden ser aplicadas también en la solución de

ecuaciones diferenciales de orden más alto, mediante el uso de variables auxiliares. Sea la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = f(x,y,y') \qquad 9.49$$

con $y_0 = \alpha$ y $y'_0 = \beta$

Mediante el cambio de variable $y' = v$, el sistema es equivalente a

$$y' = v \qquad v' = f(x,y,v) \qquad 9.50$$

con $y_0 = \alpha$ y $v_0 = \beta$

De esta manera la solución de la ecuación diferencial de segundo orden se reduce a resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

14.1 METODO DE EULER

La ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = f(x,y,y') \qquad 9.51$$

se convierte en un sistema de 2 ecuaciones diferenciales de primer orden

$$y' = v = g(x,y,v) \qquad 9.52$$

$$y'' = v' = f(x,y,v) \qquad 9.53$$

por lo que aplicando el método de Euler la solución numérica es

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x g(x_i,y_i,v_i) = y_i + \Delta x v_i \qquad 9.54$$

$$v_{i+1} = v_i + \Delta x f(x_i,y_i,v_i) = v_i + \Delta x v'_i \qquad 9.55$$

EJEMPLO 16

Resolver la ecuación direrencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2$$

con $y_0 = 1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1$

en el intervalo $0 < x < .5$

Se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = v$$

$$\frac{dv}{dx} = 2 - 2y - 3v \qquad \text{con} \quad y_0 = 1 \qquad v_0 = 1$$

por lo que

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x v_i$$

$$v_{i+1} = v_i + \Delta x(2 - 2y_i - 3v_i)$$

El intervalo $0 < x < .5$ se divide en 5 partes con $\Delta x = .1$ y $x_0 = 0$, $x_1 = .1$, $x_2 = .2$, $x_3 = .3$, $x_4 = .4$ y $x_5 = .5$.

con i = 0:

$$y_1 = y_0 + \Delta x v_0 = 1.0 + .1(1.0) = 1.1$$

$$v_1 = v_0 + \Delta x(2 - 2y_0 - 3v_0) = 1.0 + .1(2 - 2 - 3) = .700$$

i = 1:

$$y_2 = y_1 + \Delta x v_1 = 1.1 + .1(.700) = 1.170$$

$$v_2 = v_1 + \Delta x(2 - 2y_1 - 3v_1) = .7 + .1(2 - 2.2 - 2.1) = .470$$

i = 2:

$$y_3 = y_2 + \Delta x v_2 = 1.170 + .1(.470) = 1.217$$

$$v_3 = v_2 + \Delta x(2 - 2y_2 - 3v_2)$$

$$= .470 + .1[2 - 2(1.170) - 3(.470)] = .295$$

14.2 EL METODO RUNGE KUTTA DE CUARTO ORDEN

La solución de la ecuación diferencial

$$y'' = f(x,y,y')$$

a través del sistema de ecuaciones

$$y' = v = g(x,y,v)$$

$$y'' = v' = f(x,y,v)$$

por el método Runge Kutta de cuarto orden es

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x v_i + \frac{\Delta x}{6}(m_0 + m_1 + m_2) \qquad 9.56$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3) \qquad 9.57$$

siendo

$$m_0 = \Delta x f(x_i, y_i, v_i)$$

$$m_1 = \Delta x f(x_i + \Delta x/2,\ y_i + \Delta x v_i/2,\ v_i + m_0/2) \qquad 9.58$$

$$m_2 = \Delta x f(x_i + \Delta x/2,\ y_i + \Delta x v_i/2 + \Delta x m_0/4,\ v_i + m_1/2)$$

$$m_3 = \Delta x f(x_{i+1},\ y_i + \Delta x v_i + \Delta x m_1/2,\ v_i + m_2)$$

EJEMPLO 17

Resolver el Ejemplo 16 por el método Runge Kutta de cuarto orden.

Se tiene que

$$v = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dv}{dx} = 2 - 2y - 3v$$

con $y_0 = 1, \qquad v_0 = 1$

$i = 0$:

$$m_0 = \Delta x(2 - 2y_0 - 3v_0) = .1(2 - 2 - 3) = -.300$$

$$m_1 = \Delta x[2 - 2(y_0 + \Delta x v_0/2) - 3(v_0 + m_0/2)]$$
$$= .1[2 - 2[1 + 1(.1)/2] - 3(1 - .3/2)] = -.265$$

$$m_2 = \Delta x[2 - 2(y_0 + \Delta x v_0/2 + m_0 \Delta x/4) - 3(v_0 + m_1/2)]$$
$$= .1[2 - 2[1 + 1(.1)/2 - .3(.1)/4] - 3(1 - .265/2)]$$
$$= -.269$$

$$m_3 = \Delta x[2 - 2(y_0 + \Delta x v_0 + \Delta x m_1/2) - 3(v_0 + m_2)]$$
$$= .1[2 - 2[1 + 1(.1) - .265(.1)/2] - 3(1 - .269)]$$
$$= -.237$$

$$y_1 = y_0 + \Delta x v_0 + \Delta x(m_0 + m_1 + m_2)/6$$
$$= 1.0 + 1.0(.1) + .1(-.3 - .265 - .269)/6 = 1.086$$

$$v_1 = 1.0 + [-.3 - 2(.265) - 2(.269) - .237]/6 = .733$$

$i = 1$:

$$m_0 = \Delta x(2 - 2y_1 - 3v_1) = .1[2 - 2(1.086) - 3(.733)]$$
$$= -.237$$

$$m_1 = \Delta x[2 - 2(y_1 + \Delta x v_1/2) - 3(v_1 + m_0/2)]$$
$$= .1[2 - 2[1.086 + .733(.1)/2] - 3(.733 - .237/2)]$$
$$= -.209$$

$$m_2 = \Delta x[2 - 2(y_1 + \Delta x v_1/2 + \Delta x m_0/4) - 3(v_1 + m_1/2)]$$
$$= .1[2 - 2[1.086 + .733(.1)/2 - .237(.1)/4]$$
$$- 3(.733 - .209/2)] = - .212$$

$$m_3 = \Delta x[2 - 2(y_1 + \Delta x v_1 + \Delta x m_1/2) - 3(v_1 + m_2)]$$
$$= .1[2 - 2[1.086 + .733(.1) - .209(.1)/2]$$
$$- 3(.733 - .212)] = - .186$$

$$y_2 = 1.086 + .733(.1) + .1(-.237 - .209 - .212)/6$$
$$= 1.148$$

$$v_2 = .733 + [-.237 - 2(.209) - 2(.212) - .186]/6$$
$$= .522$$

La solución exacta de la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 2$$

es

$$y = 1 + e^{-x} - e^{-2x}$$
$$v = 2e^{-2x} - e^{-x}$$

En la Tabla 6 se compara el valor exacto de la solución de la ecuación con los resultados obtenidos en los dos métodos estudiados.

x	EULER		RUNGE KUTTA CUARTO ORDEN		SOLUCION EXACTA	
	y	v	y	v	y	v
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
.1	1.100	.700	1.086	.733	1.086	.733
.2	1.170	.470	1.148	.522	1.148	.522
.3	1.217	.295	1.192	.356	1.192	.357
.4	1.246	.163	1.221	.230	1.221	.228
.5	1.263	.065	1.239	.130	1.239	.129

Tabla 6. Comparación de resultados.

Se observa en la Tabla 6 la gran exactitud del método Runge Kutta en contraste con el método de Euler.

EJEMPLO 18

Usando el método de Euler, resolver la ecuación de oscilación antes de limpiar la falla, encontrada en el Ejemplo 6.

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = 62.832 - 44.674 \text{ seno } \delta$$

con $\delta_0 = 26.90º = .470$ rad. $\qquad \delta_0' = 0.0$

en el intervalo $0 < t < .45$ segundos y $\Delta t = .05$ seg.

Haciendo

$$\delta = y, \qquad t = x, \qquad u = v = \frac{d\delta}{dt}$$

se tiene que

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = u' = f(\delta) = 62.832 - 44.674 \text{ seno } \delta$$

$$\frac{d\delta}{dt} = u = g(\delta)$$

por lo que

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \Delta t g(\delta) = \delta_i + \Delta t u_i = \delta_i + .05\, u_i$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t f(\delta) = u_i + \Delta t(62.832 - 44.674 \text{ seno } \delta_i)$$

$$= u_i + 3.1416 - 2.2337 \text{ seno } \delta_i$$

a $t = 0$: $\delta_0 = 26.90º = .470$ rad, $\qquad u_0 = 0$

$i = 0$ $(t = .05$ seg.):

$$\delta_1 = \delta_0 + .05\, u_0 = .470 + .05(0.0) = .470 \text{ rad} = 26.9º$$

$$u_1 = u_0 + 3.1416 - 2.2337 \text{ seno } \delta_0$$

$$= 0.0 + 3.1416 - 2.2337 \text{ seno } 26.90º = 2.1299$$

$i = 1$ $(t = .10$ seg.):

$$\delta_2 = \delta_1 + .05\, u_1 = .470 + .05(2.1299) = .5764 \text{ rad.}$$

$$= 33.0309º$$

$$u_2 = u_1 + 3.1416 - 2.2337 \text{ seno } \delta_1$$

$$= 2.1299 + 3.1416 - 2.2337 \text{ seno } 26.90º = 4.2599$$

$i = 2$ ($t = .15$ seg.)

$\delta_3 = \delta_2 + .05\, u_2 = .5764 + .05(4.2599) = .7894$ rad.

$= 45.2349º$

$u_3 = u_2 + 3.1416 - 2.2337 \text{ seno } \delta_2$

$= 4.2599 + 3.1416 - 2.2337 \text{ seno } 33.0309º = 6.1640$

EJEMPLO 19

Resolver el Ejemplo 18 usando el método Runge Kutta.

Nuevamente se tiene

$$\frac{d\delta}{dt} = u = g(\delta)$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{du}{dt} = f(\delta) = 62.832 - 44.674 \text{ seno } \delta$$

El sistema de ecuaciones es entonces

$$\delta_{i+1} = \delta_i + \Delta t u_i + \Delta t(m_0 + m_1 + m_2)/6$$

$$u_{i+1} = u_i + (m_0 + 2m_1 + 2m_2 + m_3)/6$$

en donde

$$m_0 = \Delta t f(\delta_i)$$

$$m_1 = \Delta t f(\delta_i + \Delta t u_i/2)$$

$$m_2 = \Delta t f(\delta_i + \Delta t u_i/2 + \Delta t m_0/4)$$

$$m_3 = \Delta t f(\delta_i + \Delta t u_i + \Delta t m_1/2)$$

a $t = 0$: $\delta_0 = .470$ rad. $= 26.90º$, $u_0 = 0$

$i = 0$ ($t = .05$ seg.)

$m_0 = .05(62.832 - 44.674 \text{ seno } .470) = 2.1299$

$m_1 = .05(62.832 - 44.674 \text{ seno } .470) = 2.1299$

$m_2 = .05[62.832 - 44.674 \text{ seno } [.470 + .05(2.1299)/4]]$

$= 2.0773$

$m_3 = .05[62.832 - 44.674 \text{ seno } [.470 + .05(2.1299)/2]]$

$= 2.0254$

$\delta_1 = .470 + .05(0.0) + .05(2.1299 + 2.1299 + 2.0773)/6$

$= .5228$ rad. $= 29.9542º$

$u_1 = 0.0 + [2.1299 + 2(2.1299) + 2(2.0773) + 2.0254]/6$

$= 2.0950$

$i = 1$ ($t = .10$ seg.):

$m_0 = .05(62.832 - 44.674 \text{ seno } .5228) = 2.0262$

$m_1 = .05[62.832 - 44.674 \text{ seno}[.5228 + .05(2.0950)/2]]$

$= 1.9264$

$m_2 = .05[62.832 - 44.674 \text{ seno}[.5228 + .05(2.095)/2$

$+ .05(2.0262)/4]] = 1.8794$

$$m_3 = .05[62.832 - 44.674 \text{ seno } [.5228 + .05(2.095) + .05(1.9264)/2]] = 1.7445$$

$$\delta_2 = .5228 + .05(2.095) + .05(2.0262 + 1.9264 + 1.8794)/6 = .6771 \text{ rad.} = 38.7411^{\circ}$$

$$u_2 = 2.095 + [2.0262 + 2(1.9264) + 2(1.8794) + 1.7445]/6 = 3.9921$$

$i = 2$ ($t = .15$ seg.)

$$m_0 = .05(62.834 - 44.674 \text{ seno } .6761) = 1.7439$$

$$m_1 = .05[62.834 - 44.674 \text{ seno}[.6761 + .05(3.9921)/2]] = 1.5773$$

$$m_2 = .05[62.834 - 44.674 \text{ seno } [.6761 + .05(3.9921)/2 + .05(1.7439)/4]] = 1.5429$$

$$m_3 = .05[62.834 - 44.674 \text{ seno } [.6761 + .05(3.9921) + .05(1.5773)/2]] = 1.3711$$

$$\delta_3 = .6761 + .05(3.9921) + .05(1.7439 + 1.5773 + 1.5429)/6 = .9163 \text{ rad.} = 52.4999^{\circ}$$

$$u_3 = 3.9921 + [1.7439 + 2(1.5773) + 2(1.5429) + 1.3711]/6 = 5.5511$$

En la Tabla 7 se comparan los resultados obtenidos de este problema por el método punto a punto en la parte 1 del Ejemplo 11 y en los Ejemplos 18 y 19.

t	VALOR DEL ANGULO EN GRADOS		
	METODO PUNTO A PUNTO	EULER	RUNGE KUTTA
0	26.9000	26.9000	26.9000
.05	29.9534	26.9000	26.9542
.10	38.8132	33.0309	38.7411
.15	52.6637	45.2349	52.4999
.20	70.4246	62.9500	70.1919
.25	91.1630	85.1186	90.9117
.30	114.5015	110.5960	114.3119
.35	141.0181	138.6942	140.9648
.40	172.5106	169.8010	172.7467

Tabla 7. Comparación de los resultados de los Ejemplos 11, 18 y 19. Falla sostenida.

EJEMPLO 20

Resolver la parte 2 del Ejemplo 11, cuando se limpia la falla a $t = .15$ segundos, usando el método de Euler.

El procedimiento es exactamente igual al seguido en el Ejemplo 18, sólo que después de $t = .15$ segundos se pasa de la ecuación de oscilación

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = 62.832 - 44.674 \text{ seno } \delta$$

a la ecuación de oscilación

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = 62.832 - 95.756 \text{ seno } \delta$$

las cuales fueron calculadas en el Ejemplo 6. Se usarán como valores iniciales en la segunda ecuación los valores encontrados con la primera ecuación en el intervalo correspondiente al tiempo de limpieza de la falla.

Del Ejemplo 18 se tiene a i = 2 (t = .15 seg):

$\delta_3 = .7894$ rad. = 45.2349º, $u_3 = 6.1840$

i = 3 (t = .20 seg.):

$\delta_4 = \delta_3 + .05u_3 = .7894 + .05(6.1840) = 1.098$ rad.

= 62.9507º

$u_4 = u_3 + .05(62.832 - 95.756 \text{ seno } \delta_3$

$= u_3 + 3.1416 - 4.8878 \text{ seno } \delta_3$

$= 6.1840 + 3.1416 - 4.8878 \text{ seno } .7894 = 5.8552$

i = 4 (t = .25 seg.):

$\delta_5 = \delta_4 + .05u_4 = 1.0986 + .05(5.8556) = 1.3914$ rad.

= 79.7248º

$u_5 = u_4 + 3.1416 - 4.8878 \text{ seno } \delta_4$

$= 5.8556 + 3.1416 - 4.8878 \text{ seno } 1.0986 = 4.6437$

EJEMPLO 21

Resolver el Ejemplo 20 usando el método Runge Kutta.

Del Ejemplo 19 se tiene a i = 2 (t = .15 seg.):

$\delta_3 = .9163$ rad. = 52.4999º, $u_3 = 5.5511$

i = 3 (t = .20 seg.):

$m_0 = .05(62.832 - 95.756 \text{ seno } .9163) = -.6567$

$m_1 = .05[62.834 - 95.756 \text{ seno } [.9163 + .05(5.5511)/2]]$

$m_2 = .05[62.834 - 95.756 \text{ seno } [.9163 + .05(5.5511)/2 + .05(-.6567)/4]] = -1.0038$

$m_3 = .05[62.834 - 95.756 \text{ seno } [.9163 + .05(5.5511) + .05(-1.0233)/2]] = -1.2634$

$\delta_4 = .9163 + .05(5.5511) + .05(-.6567 - 1.0233 - 1.0038)/6$

$= 1.1714$ rad. = 67.1208º

$u_4 = 5.5511 + [-.6567 + 2(-1.0233) + 2(-1.0038) - 1.2634]/6 = 4.5553$

En la Tabla 8 se comparan los resultados obtenidos de este problema por el método punto a punto en la parte 2 del Ejemplo 11, por el método de Euler en el Ejemplo 20 y por el método Runge Kutta en el Ejemplo 21.

t	VALOR DEL ANGULO EN GRADOS		
	METODO PUNTO A PUNTO	EULER	RUNGE KUTTA
0	26.9000	26.9000	26.9000
.05	29.9532	26.9000	26.9542
.10	38.8132	33.0309	38.7411
.15	52.6637	45.2349	52.4999
.20	67.4821	62.9507	67.1208
.25	78.5460	79.7248	78.1881
.30	85.0776	93.0281	84.8762
.35	86.8529	101.5534	86.9182
.40	83.8415	105.0985	84.2706
.45	76.1026	103.9194	76.9940
.50	63.9605	98.2237	65.4048
.55	48.4129	87.9367	50.4311
.60	31.5387	72.7912	33.9746

Tabla 8. Comparación de los resultados de los Ejemplos 11, 20 y 21. La falla se limpia a t = .15 segundos.

Tanto en la Tabla 7 como en la Tabla 8 se nota la gran coincidencia que existe entre los resultados obtenidos por el método punto a punto con los obtenidos por el método Runge Kutta.

15. SOLUCION DE LA ECUACION DE OSCILACION A TRAVES DE LAS ECUACIONES DE ESTADO.

Se resuelve nuevamente la ecuación de oscilación en forma muy aproximada usando las ecuaciones de estado, cuya derivación se explica en detalles a continuación.

En forma matricial la ecuación de estado es

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{B}\,u \qquad 9.58$$

en donde $\underset{\sim}{x}$ es llamado el vector de estado, u es la excitación, $\underset{\sim}{B}$ es la matriz de distribución, $\dot{\underset{\sim}{x}}$ es la derivada de $\underset{\sim}{x}$ y $\underset{\sim}{A}$ es simplemente una matriz de dimensión n x n.

La ecuación de estado se escribe entonces en la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} u$$

Se desea resolver la ecuación

$$P_a = M\frac{d^2\delta}{dt^2} = M\frac{du}{dt} = P_m - \frac{|E'_i||V|}{x_d}\,\text{seno}\,\delta$$

$$= P_m - P_{em}\,\text{seno}\,\delta$$

en donde

P_a = potencia de aceleración.
M = momento angular.
δ = ángulo de potencia o posición angular del rotor.
u = velocidad angular del rotor.
P_m = potencia mecánica.
E_i' = voltaje ficticio generado durante la perturbación.
V = voltaje en terminales.
x_d = reactancia transitoria en el eje directo.
P_{em} = potencia eléctrica máxima.

Se tiene entonces que

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{P_a}{M} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\delta}{dt} = u$$

por lo que

$$\frac{du}{dt} = \frac{P_a}{M}$$

Escribiendo las ecuaciones anteriores en forma de ecuación de estado se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P_a/M \end{bmatrix} \qquad 9.59$$

por lo que

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{u} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} \delta \\ u \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_a/M \end{bmatrix} \qquad u(t) = 1$$

Se resolverá la ecuación en intervalos de tiempo Δt, considerando que la potencia de aceleración comienza con $P_a(0)$ en el intervalo, manteniéndose constante en ese intervalo y recalculando su valor para el próximo intervalo, en donde también se mantendrá constante.

Usando el método de transformada de Laplace para resolver la ecuación de estado, la solución en el dominio de frecuencia es

$$\underset{\sim}{X}(s) = [\, s\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{A}\,]^{-1}[\, \underset{\sim}{x}(0) + \underset{\sim}{B}\, U(s)\,] \qquad 9.60$$

en donde $\underset{\sim}{I}$ es la matriz unidad.

Se tiene entonces que

$$s\underset{\sim}{I} = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \qquad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \qquad B\,U(s) = \frac{1}{s}\begin{bmatrix} 0 \\ P_a/M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_a/sM \end{bmatrix}$$

δ_0, u_0 y $P_a(0)$ son el ángulo del rotor, la velocidad angular del rotor y la potencia de aceleración al comienzo del primer intervalo. Por lo que en el dominio de frecuencia compleja la solución para el primer intervalo es

$$\begin{bmatrix}\delta(s)\\ u(s)\end{bmatrix} = \frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}s & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_0\\ u_0 + \dfrac{P_a(0)/M}{s}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\delta_0/s + u_0/s^2 + P_a(0)/s^3M\\ u_0/s + P_a(0)/s^2M\end{bmatrix} \qquad 9.61$$

es decir

$$\delta(s) = \frac{\delta_0}{s} + \frac{u_0}{s^2} + \frac{P_a(0)/M}{s^3} \qquad 9.62$$

$$u(s) = \frac{u_0}{s} + \frac{P_a(0)/M}{s^2} \qquad 9.63$$

y aplicando la transformada inversa de Laplace se tiene

$$\delta(t) = \delta_0 + t\,u_0 + t^2 P_a(0)/2M \qquad 9.64$$

$$u(t) = u_0 + t\,P_a(0)/M \qquad 9.65$$

Resolviendo para cada intervalo k con tiempos Δt se tendrá que

$$\delta_{k+1} = \delta_k + u_k\,\Delta t + \frac{P_a(k)[\Delta t]^2}{2M} \qquad 9.66$$

$$u_{k+1} = u_k + \frac{P_a(k)\Delta t}{M} \qquad 9.67$$

siendo

$$P_a(k) = P_m - P_{em}\ \text{seno}\ \delta_k \qquad 9.68$$

EJEMPLO 22

Se desea resolver la ecuación

$$M\frac{d^2\delta}{dt^2} = 1.0 - .711\ \text{seno}\ \delta$$

con

$$M = 2.777 \times 10^{-4}, \quad u_0 = 0.0, \quad t = .05$$

$$\delta_0 = 26.9º = .4695\ \text{rad.}$$

por lo que

$$\frac{P_a}{M} = \frac{d^2\delta}{dt^2} = 62.832 - 44.674\ \text{seno}\ \delta$$

Comenzando con k = 0 (t = .05 seg.):

$$\frac{P_a(0)}{M} = 62.832 - 44.674\ \text{seno}\ 26.9º = 42.6199$$

$$\delta_1 = \delta_0 + u_0\Delta t + \frac{P_a(0)}{2M}(\Delta t)^2$$

$$= .4695 + 0.0 \times .05 + \frac{42.6199 \times (.05)^2}{2}$$

$$= .5227\ \text{rad.} = 29.9524º$$

$$u_1 = u_0 + \frac{P_a(0)}{M}\Delta t = 0.0 + 42.6199 \times .05 = 2.1309$$

k = 1 (t = .10 seg.):

$$\frac{P_a(1)}{M} = 62.832 - 44.674\ \text{seno}\ \delta_1$$

$= 62.832 - 44.674 \text{ seno } 29.9524º = 40.5271$

$$\delta_2 = \delta_1 + u_1 \Delta t + \frac{P_a(1)}{2M} (\Delta t)^2$$

$$= .5227 + 2.1309 \times .05 + \frac{40.5271 \times (.05)^2}{2}$$

$= .6799 \text{ rad.} = 38.9598º$

$$u_2 = u_1 + \frac{P_a(1)}{M} \Delta t = 2.1309 + 40.5271 \times .05 = 4.1573$$

$k = 2$ $(t = .15 \text{ seg.})$:

$$\frac{P_a(2)}{M} = 62.832 - 44.674 \text{ seno } 38.9598º = 34.7420$$

$$\delta_3 = .6799 + 4.1573 \times .05 + \frac{34.7420 \times (.05)^2}{2}$$

$= .9312 \text{ rad.} = 53.3579º$

$$u_3 = 4.1573 + 34.7420 \times .05 = 5.8944$$

El resto de los cálculos se enseña en la Tabla 9.

EJEMPLO 23

Repetir el Ejemplo 22 si a t = .15 seg. la ecuación de oscilación se pasa a

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = 1.0 - 1.534 \text{ seno } \delta$$

k	t	$P_a(k)/M$	δ_{k+1}	u_k
	0	0.0	26.9000	
0	.05	42.6199	29.9524	2.1309
1	.10	40.5271	38.9598	4.1573
.2	.15	34.7420	53.3579	5.8944
3	.20	26.9864	72.1177	7.2437
4	.25	20.3020	94.3830	8.2588
5	.30	18.2886	119.3528	9.1713
6	.35	23.8933	147.3436	10.3779
7	.40	38.7259	179.8190	12.3042
8	.45	62.6911	219.5581	15.4388
9	.50	91.2832	270.3250	20.0030

Tabla 9. Solución del Ejemplo 22 a través de las ecuaciones de estado. Falla sostenida.

Entonces

$$\frac{P_a}{M} = \frac{d^2\delta}{dt^2} = 62.832 - 95.756 \text{ seno } \delta$$

$k = 3$ $(t = .20 \text{ seg.})$:

$$\frac{P_a(3)}{M} = \frac{P_m - P_{em} \text{ seno } \delta_3}{M}$$

$= 62.832 - 95.756 \text{ seno } 53.3579º = -13.9962$

Un sistema de varias máquinas es mucho más complejo. Hay que analizar la oscilación del ángulo de potencia de cada una de las máquinas con respecto a un marco de referencia angular preestablecido. Generalmente esa referencia angular es otro generador, seleccionándose al que esté más lejos de la perturbación, que tenga la mayor constante de inercia y que tenga la menor carga (menor ángulo de potencia inicial). Lo importante en este caso es observar la estabilidad de cada generador con respecto a la referencia. Si uno de los generadores es inestable, se considera que el sistema es inestable.

El problema de análisis de estabilidad multimáquina consiste entonces en reducir el sistema de potencia a un equivalente en donde el número de nodos del sistema reducido sea igual número de generadores, seleccionar a uno de ellos como referencia y conseguir las ecuaciones de oscilación durante la falla y después de limpiar la falla para los demás generadores con respecto a esa referencia, en forma muy similar a la seguida en el caso de una sola máquina. Se puede analizar también cada máquina en particular sin seleccionar previamente una referencia y trazar las curvas δ vs. t para cada una de ellas. Si la diferencia de ángulo de potencia entre cualquiera de las máquinas y las demás crece indefinidamente, esa máquina será inestable. Lo que importa en todo caso es la diferencia de ángulo entre las máquinas.

16.1 LA ECUACION DE POTENCIA GENERADA EN SISTEMAS MULTIMAQUINAS.

La corriente que entra al nodo i en un sistema de n barras es

$$I_i = Y_{i1}E_1 + Y_{i2}E_2 + Y_{i3}E_3 + \cdots\cdots + Y_{in}E_n$$

$$= \sum_{m=1}^{n} Y_{im}E_m \qquad 9.69$$

en donde

$$Y_{im} = |Y_{im}| \angle \Theta_{im} \qquad 9.70$$

$$E_m = |E_m| \angle \delta_m \qquad 9.71$$

La potencia aparente es

$$S_i = P_i + jQ_i = E_i I_i^* = E_i \sum_{m=1}^{n} Y_{im}^* E_m^* \qquad 9.72$$

y la potencia activa que entra al nodo i es

$$P_{ei} = R_e\left[E_i \sum_{m=1}^{n} Y_{im}^* E_m^*\right] = R_e\left[|E_i| \angle \delta_i \sum_{m=1}^{n} |Y_{im}| \angle -\Theta_{im} |E_m| \angle -\delta_m\right]$$

$$= R_e\left[\sum_{m=1}^{n} |E_i||E_m||Y_{im}| \angle \delta_i - \delta_m - \Theta_{im}\right]$$

$$= \sum_{m=1}^{n} |E_i||E_m||Y_{im}| \cos(\delta_i - \delta_m - \Theta_{im}) \qquad 9.73$$

16.2 LA ECUACION DE OSCILACION DE UN GENERADOR CON RESPECTO A UNA REFERENCIA.

La ecuación de oscilación para el generador i es

$$M_i \frac{d^2\delta_i}{dt^2} = P_{mi} - P_{ei} \qquad 9.74$$

Y para el generador r

$$M_r \frac{d^2\delta_r}{dt^2} = P_{mr} - P_{er} \qquad 9.75$$

Multiplicando a la ecuación 9.74 por M_r y a la ecuación 9.75 por M_i se tiene

$$M_r M_i \frac{d^2\delta_i}{dt^2} = M_r(P_{mi} - P_{ei}) \qquad 9.76$$

$$M_i M_r \frac{d^2\delta_r}{dt^2} = M_i(P_{mr} - P_{er}) \qquad 9.77$$

Restando ambas ecuaciones

$$M_r M_i \frac{d^2(\delta_i - \delta_r)}{dt^2} = M_r(P_{mi} - P_{ei}) - M_i(P_{mr} - P_{er}) \qquad 9.78$$

o también

$$\frac{d^2(\delta_i - \delta_r)}{dt^2} = \frac{1}{M_i}[P_{mi} - P_{ei}] - \frac{1}{M_r}[P_{mr} - P_{er}]$$

$$= \frac{1}{M_i}\left[\left[P_{mi} - \frac{M_i}{M_r}P_{mr}\right] - \left[P_{ei} - \frac{M_i}{M_r}P_{er}\right]\right]$$

$$= \frac{\pi f}{H_i}\left[\left[P_{mi} - \frac{H_i}{H_r}P_{mr}\right] - \left[P_{ei} - \frac{H_i}{H_r}P_{er}\right]\right] \qquad 9.79$$

la cual es la ecuación de oscilación de la diferencia de ángulos de los dos generadores.

Si el generador r se toma como referencia, $\delta_r = 0$ y la ecuación de oscilación del generador i con respecto al generador r es

$$\frac{d^2\delta_i}{dt^2} = \frac{\pi f}{H_i}\left[\left[P_{mi} - \frac{H_i}{H_r}P_{mr}\right] - \left[P_{ei} - \frac{H_i}{H_r}P_{er}\right]\right] \qquad 9.80$$

Si la constante de inercia del generador r es infinita (barra infinita), la ecuación se reduce a

$$\frac{d^2\delta_i}{dt^2} = \frac{\pi f}{H_i}[P_{mi} - P_{ei}] \qquad 9.81$$

la cual es la ecuación de oscilación de la máquina i con respecto a una barra infinita.

16.3 ECUACION DE ADMITANCIA PARA LAS CARGAS.

Si la carga de un sistema ha de ser representada por admitancias, como lo indica la figura 9.20, la ecuación es la siguiente

$$S = VI^* \qquad S^* = V^*I = V^*VY = |V|^2Y$$

de donde

$$Y = \frac{S^*}{|V|^2} \qquad 9.82$$

Además

$$I^* = \frac{S}{V} \qquad I = \left[\frac{S}{V}\right]^* \qquad 9.83$$

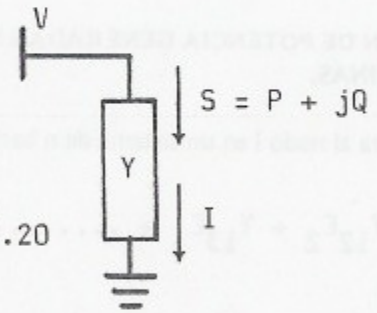


Fig. 9.20

16.4 PROCEDIMIENTO PARA EL ANALISIS DE ESTABILIDAD MULTIMAQUINA.

El procedimiento para el análisis de estabilidad multimáquina tomando a un generador como referencia es el siguiente:

1. Resolver un flujo de carga para conocer el estado inicial del sistema, lo cual permite calcular:

1.1 La magnitud y ángulo de la tensión en todas las barras.
1.2 La corriente de cada generador.
1.3 La magnitud y ángulo de la tensión detrás de la reactancia de cada generador.
1.4 La potencia eléctrica de cada barra.
1.5 La potencia mecánica de cada generador.
1.6 La admitancia de la carga.

2. Conseguir la matriz admitancia de barra durante la falla, incluyendo en ella a las impedancias internas de cada generador (hay que agregar un nuevo nodo para cada generador) y las admitancias que representan a las cargas.

3. Reducir la matriz anterior a una que contenga solamente los nodos agregados en la parte anterior. Los demás nodos serán nodos interiores del sistema.

4. Conseguir la ecuación de oscilación para cada generador tomando a uno de ellos como referencia y usando las ecuaciones respectivas.

5. Repetir las partes 2, 3 y 4 después de limpiar la falla.

6. Resolver las ecuaciones de oscilación para cada máquina por cualquier método numérico.

EJEMPLO 22

En el siguiente sistema ocurre un cortocircuito trifásico en el punto P, exactamente en la mitad de la línea. Los interruptores A se abren para limpiar la falla.

1) Calcular y dibujar diferentes curvas de oscilación del generador 2 para diferentes tiempos de limpieza de falla, tomando al generador como referencia.

2) Calcular aproximadamente el tiempo crítico del generador 2.

Los datos del sistema en valores por unidad son:

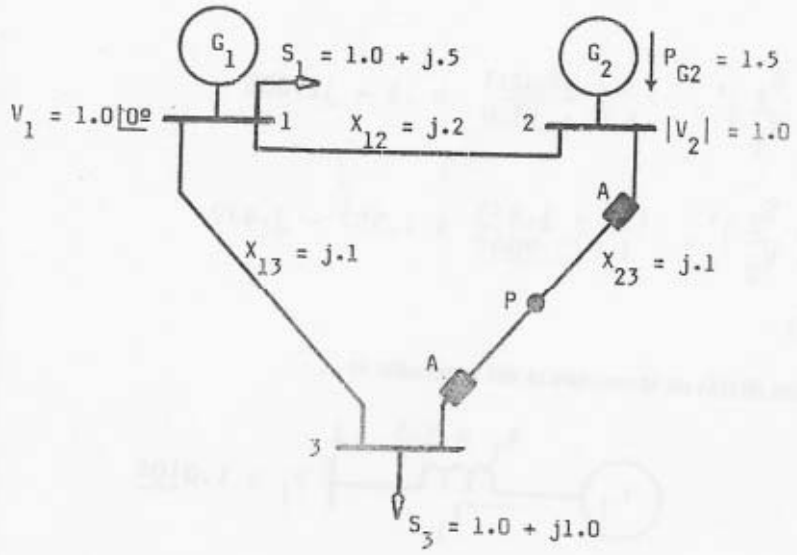
G_1: $X = j.5$ pu, $H = 10$

G_2: $X = j.4$ pu, $H = 3$, $P_{G2} = 1.5$

$S_1 = 1.0 + j.5$, $S_3 = 1.0 + j1.0$, $V_1 = 1.0\angle 0º$

$|V_2| = 1.0$, $X_{12} = j.2$ pu, $X_{13} = j.1$ pu,

$X_{23} = j.1$ pu.



Con la información dada la barra 1 es la barra oscilante, la barra 2 es barra de generación y la barra 3 es barra de carga.

BARRA 1: $V_1 = 1.0\angle 0º$

BARRA 2: $|V_2| = 1.0$ $P_2 = 1.5$

BARRA 3: $P_3 = 1.0$ $Q_3 = 1.0$

PASO 1:

Mediante un análisis de flujo de carga se obtienen los siguientes resultados:

$P_1 = .5 \quad Q_1 = 1.083 \quad Q_2 = .635 \quad \theta_2 = 5.904º$

$V_3 = .944\angle -.087º$

Paso 1.1:

$V_1 = 1.0\angle 0º \quad V_2 = 1.0\angle 5.904º \quad V_3 = .944\angle -.087º$

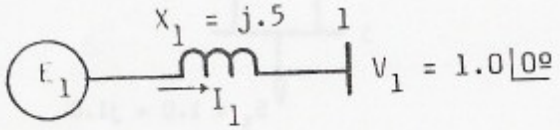
Paso 1.2:

$$I_1 = \left[\frac{S_1}{V_1}\right]^* = \frac{.5 + j1.083}{1.0 + j0.0} = .5 - j1.083$$

$$I_2 = \left[\frac{S_2}{V_2}\right]^* = \frac{1.5 + j.635}{1.0\angle 5.904º} = 1.557 - j.477$$

Paso 1.3:

La tensión detrás de la reactancia del generador es



$$E_1 = V_1 + jX_1 I_1 = 1.0 + j.5(.5 - j1.083)$$

$$= 1.562\angle 9.212º$$

por lo que

$$\delta_{01} = 9.212º$$

y la del generador 2 es

$$E_2 = V_2 + jX_2 I_2 = 1.0\angle 5.904º + j.4(1.557 - j.477)$$

$$= 1.390\angle 31.474º$$

por lo que

$$\delta_{02} = 31.474º$$

Paso 1.4:

Las potencias generadas por los generadores 1 y 2 (P_1 y P_2) y las potencias de las cargas colocadas en las barras 1 y 3 (P_{c1} y P_{c3}) son:

$$P_1 = .5, \quad P_2 = 1.5, \quad P_{c1} = -1.0, \quad P_{c3} = -1.0$$

Paso 1.5:

Despreciando las pérdidas internas de cada generador se tiene que la potencia mecánica de entrada de cada uno de ellos es igual a su potencia eléctrica generada, por lo que

$$P_{m1} = P_1 = .5, \qquad P_{m2} = P_2 = 1.5$$

Paso 1.6:

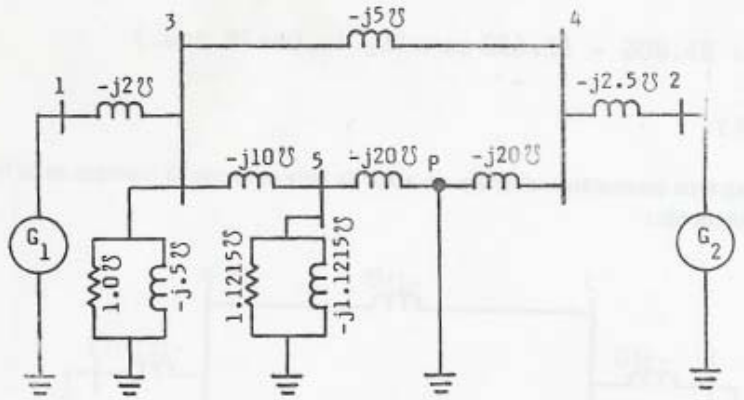
Las admitancias de cada una de las cargas son

$$Y_1 = \frac{S_1^*}{|V_1|^2} = \frac{1.0 - j.5}{(1.0)^2} = 1.0 - j.5$$

$$Y_3 = \frac{S_3^*}{|V_3|^2} = \frac{1.0 - j1.0}{(.944)^2} = 1.1215 - j1.1215$$

PASO 2:

Aumentando un nodo para cada generador y reescribiendo los nodos de manera que los nodos de los generadores tengan los primeros números, el diagrama equivalente durante la falla es el que se muestra en la figura siguiente:



La matriz admitancia de barra es

$$Y = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc} -j2.0 & 0.0 & j2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -j2.5 & 0.0 & j2.5 & 0.0 \\ \hline j2.0 & 0.0 & 1-j17.5 & j5.0 & j10.0 \\ 0.0 & j2.5 & j5.0 & -j27.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & j10.0 & 0.0 & 1.1215 \\ & & & & -j31.1215 \end{array}\right] \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} Y_{AA} & Y_{AB} \\ \hline Y_{BA} & Y_{BB} \end{array}\right]$$

PASO 3:

La matriz admitancia se reduce a una que contenga solamente los nodos de generación, mediante la expresión 2.32.

$$Y = Y_{AA} - Y_{AB} Y_{BB}^{-1} Y_{BA}$$

en donde

$$Y_{AA} = \begin{bmatrix} -j2.0 & 0.0 \\ 0.0 & -j2.5 \end{bmatrix} \quad Y_{AB} = \begin{bmatrix} j2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & j2.5 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$Y_{BA} = \begin{bmatrix} j2.0 & 0.0 \\ 0.0 & j2.5 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad Y_{BB} = \begin{bmatrix} 1-j15.5 & j5.0 & j10.0 \\ j5.0 & -j27.5 & 0.0 \\ j10.0 & 0.0 & 1.1215 \\ & & -j31.1215 \end{bmatrix}$$

El resultado es

$$Y = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .0248 - j1.7032 & .0056 + j.0676 \\ .0056 + j.0676 & .0013 - j2.2575 \end{bmatrix} \end{array}$$

por lo que

$$Y_{11} = 1.7034\angle -89.1658^\circ \qquad Y_{12} = Y_{21} = .0678\angle 85.2644^\circ$$

$$Y_{22} = 2.2575\angle -89.967^\circ$$

PASO 4:

De acuerdo a la Sección 16.1, ecuación 9.73, las potencias en los generadores 1 y 2 son:

$$P_{e1} = |E_1|^2|Y_{11}|\text{coseno}(\delta_1 - \delta_1 - \theta_{11}) + |E_1||E_2||Y_{12}|\text{coseno}(\delta_1 - \delta_2 - \theta_{12})$$

$$= |E_1|^2|Y_{11}|\text{coseno}(-\theta_{11}) + |E_1||E_2||Y_{12}|\text{coseno}(\delta_1 - \delta_2 - \theta_{12})$$

$$P_{e2} = |E_2|^2|Y_{22}|\text{coseno}(-\theta_{22}) + |E_2||E_1||Y_{21}|\text{coseno}(\delta_2 - \delta_1 - \theta_{21})$$

por lo que

$$P_{e1} = (1.562)^2(1.7034)\text{coseno}(89.1658^\circ) + (1.562)(1.390)(.0678)\text{coseno}(\delta_2 + 85.2644^\circ)$$

$$= .0605 + .1472\text{coseno}(\delta_2 + 85.2644^\circ)$$

$$P_{e2} = (1.390)^2(2.2575)\text{coseno}(89.967^\circ) + (1.390)(1.562)(.0678)\text{coseno}(\delta_2 - 85.2644^\circ)$$

$$= .0025 + .1472\text{coseno}(\delta_2 - 85.2644^\circ)$$

y

$$\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = \frac{\pi f}{H_2}\left[\left(P_{m2} - \frac{H_2}{H_1}P_{m1}\right) - \left(P_{e2} - \frac{H_2}{H_1}P_{e1}\right)\right]$$

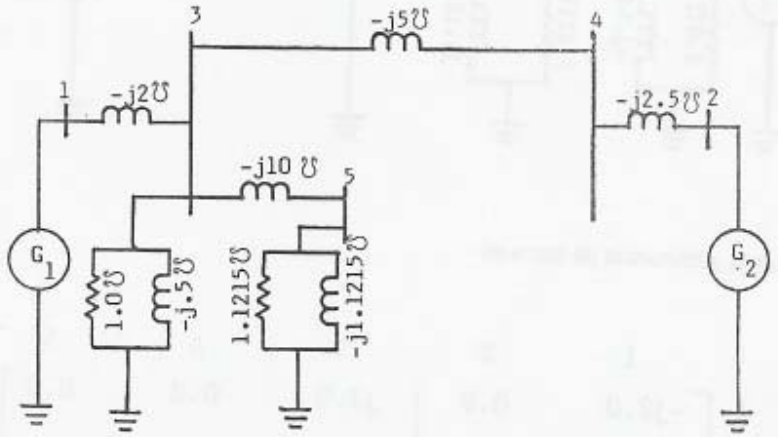
$$= 20\pi[[1.5 - 3(.5)/10] - [.0025 + .1472\cos(\delta_2 - 85.2644^\circ) - .3[.0605 + .1472\cos(\delta_2 + 85.2644^\circ)]]]$$

$$= 85.806 - 11.630\ \text{seno}(\delta_2 + 2.566^\circ)$$

$$= 85.806 - 11.630\ \text{seno}(\delta_2 + .04478\ \text{rad.})$$

PASO 5:

El diagrama equivalente después de aislar la falla es el que se muestra en la figura siguiente:



La matriz admitancia de barra es

$$Y = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & -j2.0 & 0.0 & j2.0 & 0.0 & 0.0 \\ 2 & 0.0 & -j2.5 & 0.0 & j2.5 & 0.0 \\ \hline 3 & j2.0 & 0.0 & 1 - j17.5 & j5.0 & j10.0 \\ 4 & 0.0 & j2.5 & j5.0 & -j7.5 & 0.0 \\ 5 & 0.0 & 0.0 & j10.0 & 0.0 & 1.1215 - j11.1215 \end{array}$$

y la matriz reducida es

$$Y = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .2424 - j1.3276 & .2040 + j.5600 \\ .2040 + j.5600 & .1683 - j1.1992 \end{bmatrix} \end{array}$$

por lo que

$$Y_{11} = 1.3495\angle -79.6526^\circ \qquad Y_{12} = Y_{21} = .5960\angle 69.984^\circ$$

$$Y_{22} = 1.2110\angle -82.0111^\circ$$

$$P_{e1} = (1.562)^2(1.3495)\text{coseno}(79.6526^\circ) + (1.562)(1.390)(.5960)\text{coseno}(\delta_2 + 69.984^\circ)$$

$$= .5913 + 1.2940\ \text{coseno}(\delta_2 + 69.984^\circ)$$

$$P_{e2} = (1.390)^2(1.2110)\text{coseno}(82.0111^\circ) + (1.562)(1.390)(.5960)\text{coseno}(\delta_2 - 69.984^\circ)$$

$$= .3251 + 1.2940\ \text{coseno}(\delta_2 - 69.984^\circ)$$

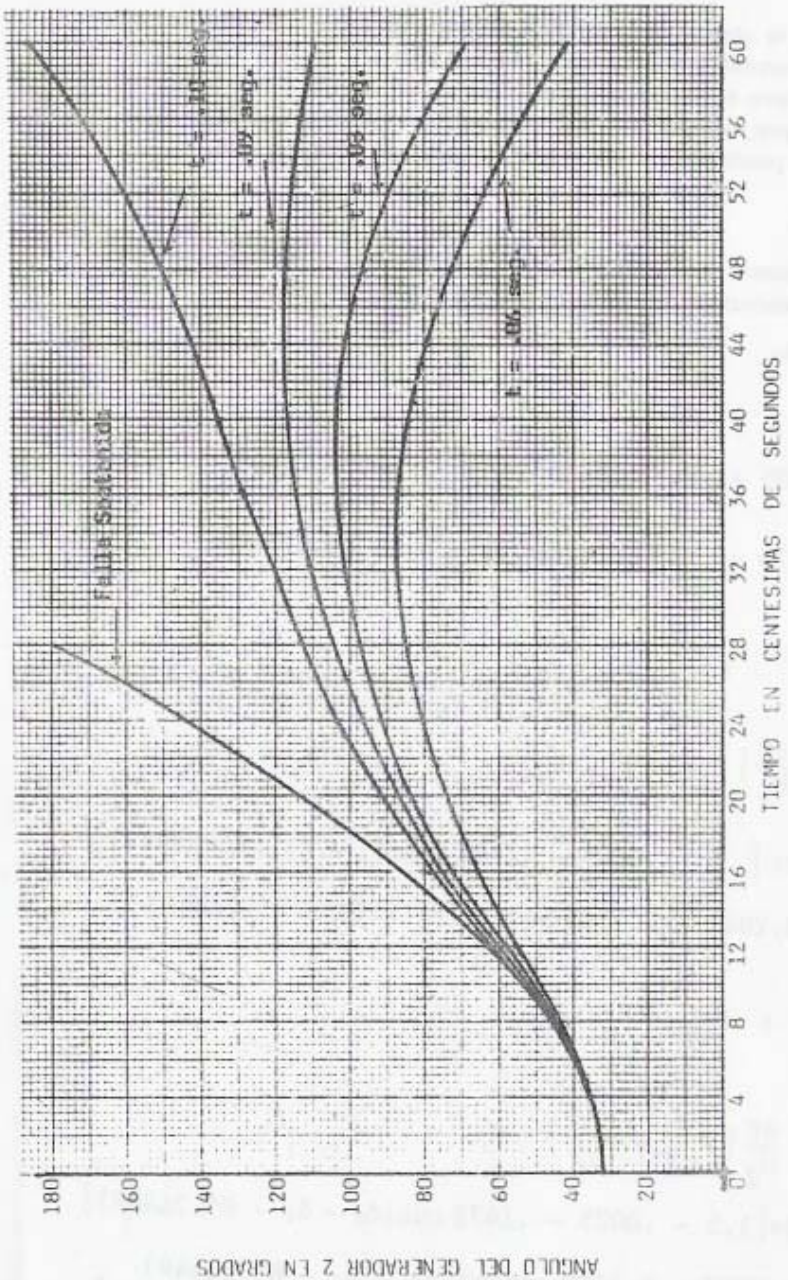
$$\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = 20\pi[[1.5 - .3(.5)] - [.3251 + 1.2940\cos(\delta_2 - 69.984^\circ) - .3[.5913 + 1.2940\text{coseno}(\delta_2 + 69.984^\circ)]]]$$

$$= 75.536 - 101.209\ \text{seno}(\delta_2 + 11.09^\circ)$$

$$= 75.536 - 101.209\ \text{seno}(\delta_2 + .1935\ \text{rad.})$$

PASO 6:

Las ecuaciones de oscilación durante y después de limpiar la falla se resolvieron por el método Runge Kutta de cuarto orden y los resultados se muestran en la figura siguiente para diferentes tiempos de limpieza de falla.



En esta figura se observa que cuando la falla se aisla a t = .10 segundos la máquina es inestable y que cuando la falla se aísla a t = .009 segundos la máquina mantiene el sincronismo, por lo que el tiempo crítico está dentro de estos dos tiempos mencionados. Afinando un poco más el análisis entre estos dos tiempos se puede obtener una mayor precisión del tiempo crítico.

EJEMPLO 23

En el sistema del Ejemplo 22, calcular la ecuación de oscilación de cada una de las máquinas durante la falla y después de limpiar la falla.

Durante la falla:

$$P_{m1} = .5 \qquad P_{m2} = 1.5$$

$$P_{e1} = .0605 + .1472 \text{ coseno}(\delta_1 - \delta_2 - 85.2644º)$$

$$P_{e2} = .0025 + .1472 \text{ coseno}(\delta_2 - \delta_1 - 85.2644º)$$

$$M_1 \frac{d^2\delta_1}{dt^2} = P_{m1} - P_{e1}$$

$$\frac{d^2\delta_1}{dt^2} = \frac{\pi f}{H_1}[P_{m1} - P_{e1}]$$

$$= 6\pi [.5 - .0605 - .1472 \cos(\delta_1 - \delta_2 - 85.2644º)]$$

$$= 8.2844 - 2.7747 \text{ coseno}(\delta_1 - \delta_2 - 85.2644º)$$

$$M_2 \frac{d^2\delta_2}{dt^2} = P_{m2} - P_{e2}$$

$$\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = \frac{\pi f}{H_2}[P_{m2} - P_{e2}]$$

$$= 20\pi[1.5 - .0025 - .1472 \cos(\delta_2 - \delta_1 - 85.2644º)]$$

$$= 94.0907 - 9.2488 \text{ coseno}(\delta_2 - \delta_1 - 85.2644º)$$

Después de limpiar la falla:

$$P_{m1} = .5 \qquad P_{m2} = 1.5$$

$$P_{e1} = .5913 + 1.2940 \text{ coseno}(\delta_1 - \delta_2 - 69.984º)$$

$$P_{e2} = .3251 + 1.2940 \text{ coseno}(\delta_2 - \delta_1 - 69.984º)$$

$$\frac{d^2\delta_1}{dt^2} = 6\pi[.5 - .5913 - 1.2940 \cos(\delta_1 - \delta_2 - 69.984º)]$$

$$= -1.7210 - 24.3913 \text{ coseno}(\delta_1 - \delta_2 - 69.984º)$$

$$\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = 20\pi[1.5 - .3251 - 1.2940 \cos(\delta_2 - \delta_1 - 69.984º)]$$

$$= 73.8211 - 81.3044 \text{ coseno}(\delta_2 - \delta_1 - 69.984º)$$

EJEMPLO 24

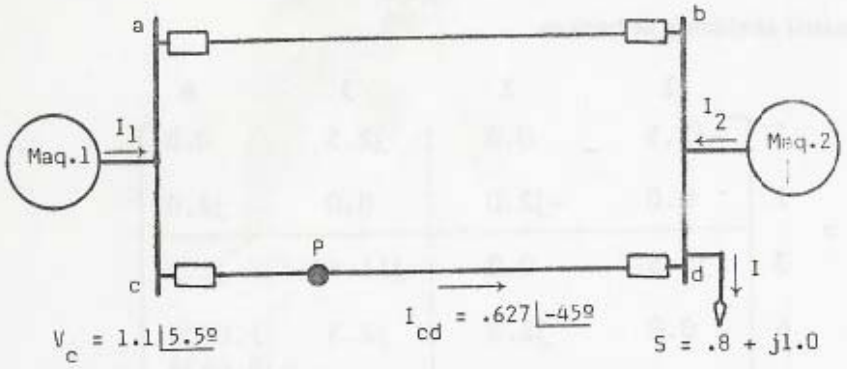
Dos máquinas sincrónicas están conectadas como lo indica la figura siguiente. Si ocurre un cortocircuito trifásico en la línea c-d a 30% del lado c, indicado con el punto P, se abren los interruptores para aislar el cortocircuito. Calcular la ecuación de cada máquina durante el cortocircuito. (Usar técnicas matriciales en la reducción de redes).

Las características de las máquinas son las siguientes:

MAQUINA 1: X_d = j1.0 pu, X'_d = j.4 pu, H = 3.2

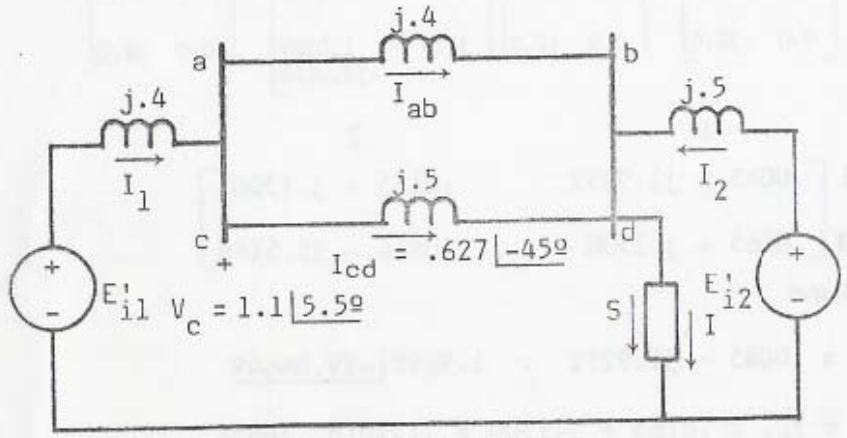
MAQUINA 2: X_d = j.8 pu, X'_d = j.5 pu, H = 3.8

LINEAS: X_{ab} = j.4 pu, X_{cd} = j.5 pu.



Se calcula la corriente de cada generador antes del cortocircuito

El diagrama de impedancias es el siguiente:



Por divisor de corrientes

$$I_{cd} = \frac{X_{ab}}{X_{ab} + X_{cd}} I_1 \qquad I_{ab} = \frac{X_{cd}}{X_{ab} + X_{cd}} I_1$$

por lo que

$$I_1 = \frac{.9}{.4} \times .627|-45º = 1.4108|-45º$$

$$I_{ab} = \frac{.5}{.9} \times 1.4108|-45º = .7838|-45º$$

$$V_d = V_c - jX_{cd}I_{cd} = 1.1|5.5º - j.5 \times .627|-45º$$

$$= .8809|-7.5849º$$

$$I = \frac{S^*}{V_d^*} = \frac{.8 - j1.0}{.8809|7.5849º} = 1.4538|-58.9267º$$

$$I_2 = I - I_1 = 1.4538|-58.9267º - 1.4108|-45º$$

$$= .3499|-134.9768º$$

Los voltajes detrás de las reactancias transitorias de cada máquina son

$$E'_{i1} = V_c + jX'_{d1}I_1 = 1.1|5.5º + j.4 \times 1.4108|-45º$$

$$= 1.5768|18.6575º$$

$$E'_{i2} = V_d + jX'_{d2}I_2 = .8809|-7.5849º$$

$$+ j.5 \times .3499|-134.9768º = 1.0254|-13.5331º$$

Las potencias generadas por cada máquina en el estado transitorio son

$$S_1 = E'_{i1}I_1^* = 1.5768|18.6575º \times 1.4108|45º$$

$$= .9871 + j1.9935$$

$$S_2 = E'_{i2}I_2^* = 1.0254|-13.5331 \times .3499|134.9768º$$

$$= -.1872 + j.3061$$

Como la potencia activa de la máquina 2 es negativa, esta máquina está actuando como motor. Y como se están despreciando las pérdidas internas de los generadores, la potencia activa generada es igual a la potencia mecánica que los mueve, es decir

$$P_{m1} = .9871 \qquad P_{m2} = -.1872$$

Se calcula la matriz admitancia durante el cortocircuito:

$$X_{cd} = j.5 \qquad X_{cP} = .5\,X_{cd} = j.15$$

$$X_{dP} = .7\,X_{cd} = j.35$$

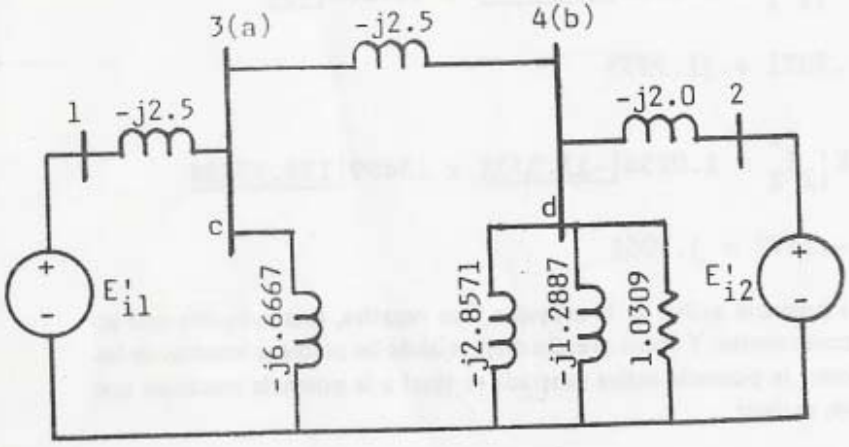
$$Y_{cP} = \frac{1}{j.15} = -j6.6667$$

$$Y_{dP} = \frac{1}{j.35} = -j2.8571$$

En la carga:

$$Y = \frac{S^*}{|V_d|^2} = \frac{.8 - j1.0}{(.8809)^2} = 1.0309 - j1.2887$$

El diagrama de admitancias es



La matriz admitancia de barra es

$$Y = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} -j2.5 & 0.0 & j2.5 & 0.0 \\ 0.0 & -j2.0 & 0.0 & j2.0 \\ \hline j2.5 & 0.0 & -j11.6667 & j2.5 \\ 0.0 & j2.0 & j2.5 & 1.0309 - j8.6458 \end{array}\right] \end{array}$$

La matriz reducida es

$$Y = \begin{bmatrix} -j2.5 & 0.0 \\ 0.0 & -j2.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j2.5 & 0.0 \\ 0.0 & j2.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j11.6667 & j2.5 \\ j2.5 & 1.0309 - j8.6458 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} j2.5 & 0.0 \\ 0.0 & j2.0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} .0045 - j1.9292 & .0165 + j.1300 \\ .0165 + j.1300 & .0616 - j1.5148 \end{bmatrix} \end{array}$$

por lo que

$$Y_{11} = .0045 - j1.9292 = 1.9292\angle -89.8664^\circ$$

$$Y_{12} = Y_{21} = .0165 + j.1300 = .1310\angle 82.7665^\circ$$

$$Y_{22} = .0616 - j1.5148 = 1.5161\angle -87.6713^\circ$$

Se calculan las potencias generadas en función del ángulo de potencia usando la ecuación 9.73:

$$P_{e1} = (1.5768)^2 \times 1.9192 \text{ coseno } 89.8664^\circ + 1.5768 \times 1.0254 \times .1310\cos(\delta_1 - \delta_2 - 82.7665^\circ)$$

$$= .0112 + .2118 \text{ coseno}(\delta_1 - \delta_2 - 82.7665^\circ)$$

$$P_{e2} = (1.0254)^2 \times 1.5161 \text{ coseno } 87.6713º$$
$$+ 1.5768 \times 1.0254 \times .1310\cos(\delta_2 - \delta_1 - 82.7665º)$$
$$= .0648 + .2118 \text{ coseno}(\delta_2 - \delta_1 - 82.7665º)$$

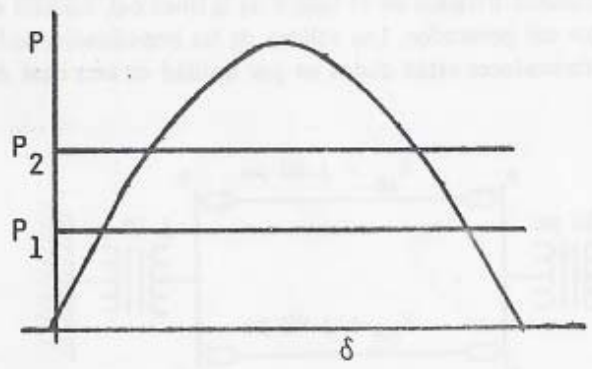
Y las ecuaciones de oscilación durante la falla son

$$\frac{d^2\delta_1}{dt^2} = \frac{60\pi}{3.2}[.9871 - .0112 - .2118\cos(\delta_1 - \delta_2 - 82.7665º)]$$
$$= 57.4853 - 12.4760 \text{ coseno}(\delta_1 - \delta_2 - 82.7665º)$$

$$\frac{d^2\delta_2}{dt^2} = \frac{60\pi}{3.8}[-.1871 - .0648 - .2118\cos(\delta_2 - \delta_1 - 82.7665º)]$$
$$= -12.4953 - 12.4760 \text{ coseno}(\delta_2 - \delta_1 - 82.7665º)$$

PROBLEMAS

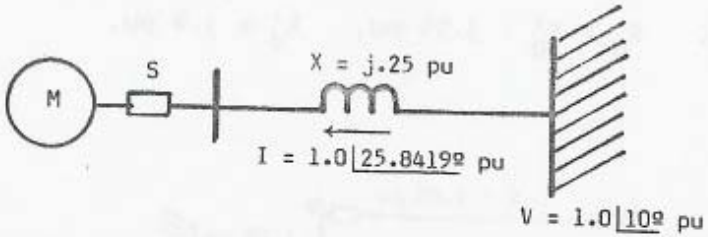
1. Un motor sincrónico está conectado a una barra infinita con un estado estable en P_1, como lo indica la figura siguiente. Explicar el estado transitorio del rotor si la potencia mecánica en el eje del motor se aumenta bruscamente de P_1 a P_2. Detallar claramente los puntos de interés.



2. En el sistema siguiente el motor sincrónico absorbe corriente nominal con factor de potencia de .9 en adelanto (25.8419º). Calcular el tiempo crítico entre abrir y cerrar el interruptor S. Los datos del sistema son

MOTOR: X'_d = j.6 pu, X_d = 1.0 pu, H = 3.0

LINEA: X = j.25 pu.

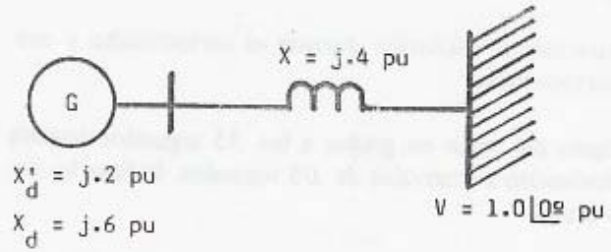


3. El alternador trifásico de la figura siguiente se sincroniza a un sistema de potencia siguiendo todas las reglas necesarias para tal fin. Calcular:

a) La potencia activa máxima que el generador puede transferir al sistema en el estado transitorio (de una sola vez) si la excitación no se varía desde el momento de la sincronización.

b) La magnitud y ángulo de la corriente en la situación anterior.

c) La potencia reactiva que llega al sistema desde el generador en la situación anterior.



4. En el generador del sistema siguiente:

a) Calcular el voltaje generado E en el estado estable.

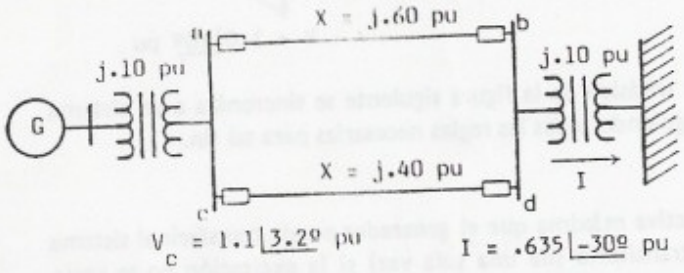
b) Calcular los voltajes generados E' y E'_1 en el estado transitorio.

c) Dibujar el diagrama fasorial de voltajes y corrientes indicando las cantidades anteriores.

Los datos del generador son:

X_d = j.90 pu, $X_q = X'_q$ = j.55 pu, X'_d = j.4 pu,

H = 3.0.



5. En el sistema del problema del Ejemplo anterior ocurre un cortocircuito trifásico a 15% del lado a de la línea a-b y deben abrirse los interruptores para aislarlo.

a) Determinar el ángulo crítico del generador.

b) Determinar la ecuación de oscilación durante el cortocircuito y después de aislar el cortocircuito.

c) Determinar el ángulo del rotor en grados a los .15 segundos después de ocurrir el cortocircuito a intervalos de .05 segundos. Indicar los detalles del método usado.

6. En el sistema de la figura siguiente ocurre un cortocircuito trifásico en la línea a-c a 20% del lado a y se abren los interruptores para aislarlo. Tomando como base a 12 MVA y 2.5 KV en el generador.

a) Calcular el ángulo crítico usando el método de áreas iguales.

b) Calcular el ángulo δ a t = .10 segundos en falla sostenida, usando el método de Euler con intervalos de .05 segundos.

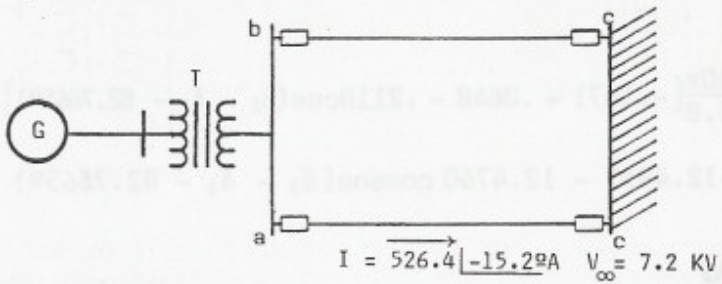
Las características del sistema son

G: 2.4 KV, 10 MVA, X'_d = j.06 Ω, H = 3.5

T: 12 MVA, 2.4 - 7.2 KV, X = j.462 Ω en el lado de alta tensión.

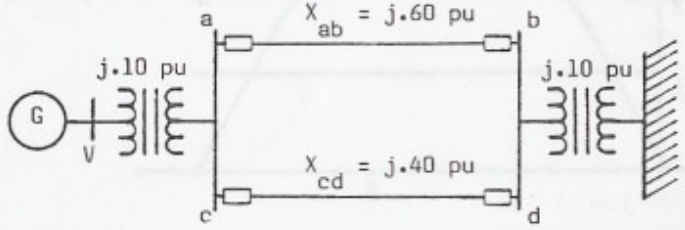
LINEA a-c: X = j.83 Ω, I = 526.4|-15.2º Amperios.

LINEA b-c: X = j1.06 Ω



7. Resolver la parte b del Ejemplo anterior usando el método Runge Kutta de cuarto orden.

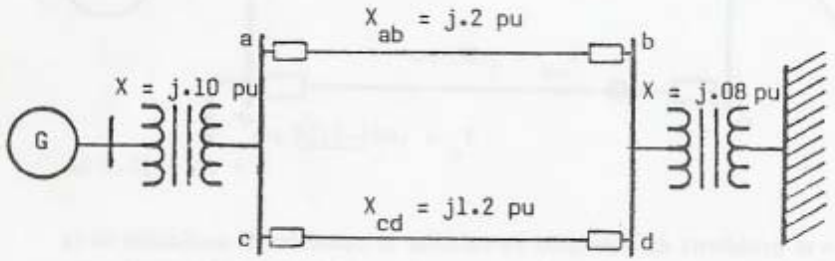
8. En el sistema siguiente el generador de 10 MVA, 13.8 KV, X'_d = .4 pu, X_d = .9 pu, $X'_q = X_q$ = .55 pu, H = 4.5, suministra potencia a plena carga con factor de potencia de .8 en atraso y voltaje nominal en sus terminales. Si ocurre un cortocircuito trifásico en el lado d de la línea c-d, calcular el ángulo crítico del rotor del generador. Los valores de las impedancias de las líneas y de los transformadores están dados en por unidad en una base de 15 MVA, 13.8 KV.



9. En el sistema siguiente se abre accidentalmente la línea a-b. Calcular el máximo ángulo entre el voltaje E'_j y el voltaje de la barra infinita al cual debe cerrarse nuevamente la línea a-b para que el generador no pierda sincronismo. Los datos del generador son:

X_d = j.90 pu, $X_q = X'_q$ = j.55 pu, X'_d = j.4 pu

H =3.0



V_c = 1.123|13.8º pu V_d = 1.069|6.7º

10. En el sistema del problema anterior ocurre un cortocircuito trifásico en la línea a-b a 10% del lado a y se abren los interruptores para aislarlo.

a) Calcular el ángulo crítico por el método de áreas iguales.

b) Calcular el tiempo crítico por cualquier método.

c) El cortocircuito puede ocurrir en cualquier parte de la línea. ¿En qué parte y por qué debe considerarse la falla para calcular el tiempo de operación de los interruptores?

11. En el sistema de la figura siguiente tomando como base a 10 MVA y 7.2 KV en la barra infinita, calcular el ángulo crítico por el método de áreas iguales si ocurre un cortocircuito trifásico en la línea bc a 10% del lado b.

Las características del sistema son:

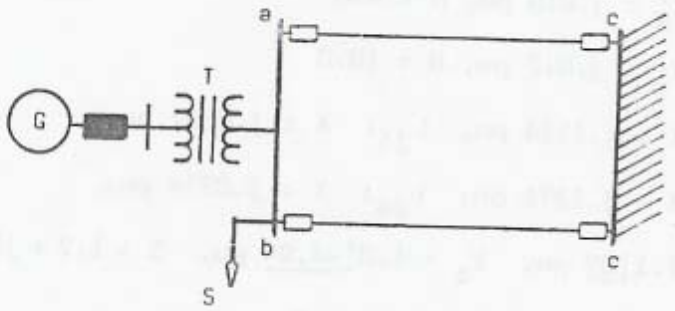
G: 2.2 KV, 10 MVA, X_d = j.150 Ω, $X_q = X'_q$ = j.072 Ω, X'_d = j.058 Ω, H = 3.0.

T: 2.4 - 6.9 KV, 12 MVA, X = j.042 Ω en el lado de baja tensión.

LINEA a-c: X = j.90 Ω, LINEA b-c: X = j1.1 Ω

V_b = 7.5|8.65º KV, V_c = 7.2|5.0º KV

S = 3.6|56.3º MVA

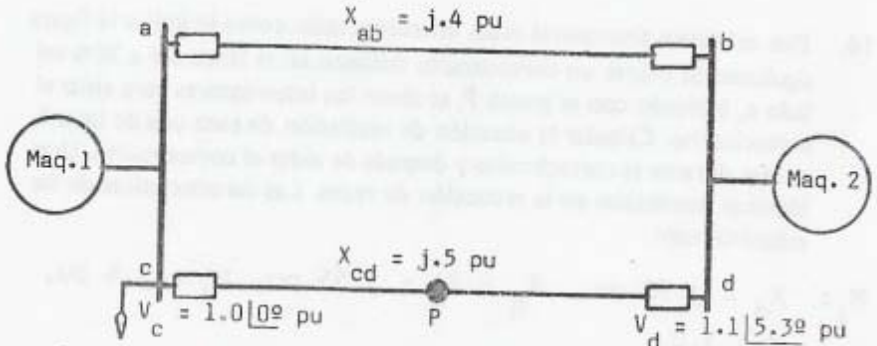


12. Dos máquinas sincrónicas están conectadas como lo indica la figura siguiente. Si ocurre un cortocircuito trifásico en la mitad de la línea c-d, indicado con el punto P, se abren los interruptores para aislar el cortocircuito. Calcular la ecuación de oscilación de cada máquina durante el cortocircuito y después de aislar el cortocircuito. Usar técnicas matriciales en la reducción de redes.

Las características de las máquinas son:

M_1: X_d = j.8 pu, X'_d = j.4 pu, H = 3.0

M_2: X_d = j.8 pu, X'_d = j.5 pu, H = 3.0



S = 1.0 + j1.0 pu

13. Dos máquinas sincrónicas están interconectadas como indica la figura siguiente. Si ocurre un cortocircuito trifásico al comienzo de la línea L_{41}, indicado con el punto P, se abren los interruptores para aislar el cortocircuito. Calcular la ecuación de oscilación de cada una de las máquinas durante el cortocircuito y después de aislar el cortocircuito. Use técnicas matriciales en la reducción de redes. Los datos del sistema son:

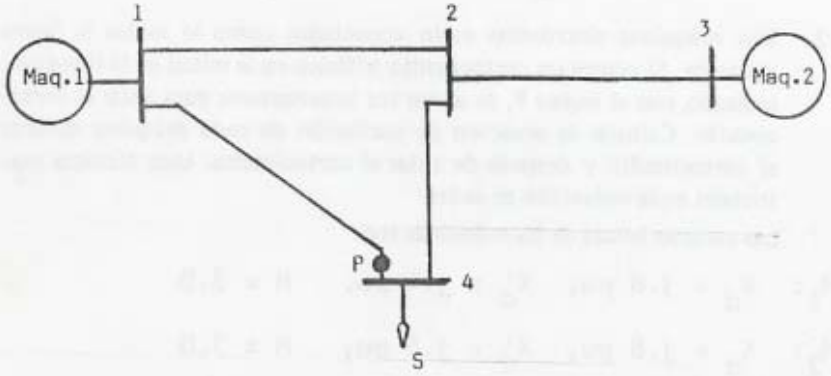
M_1: X'_d = j.010 pu, H = 6.0

M_2: X'_d = j.012 pu, H = 10.0

L_{12}: X = j.1524 pu, L_{23}: X = j.0862 pu,

L_{14}: X = j.1276 pu, L_{24}: X = j.0954 pu,

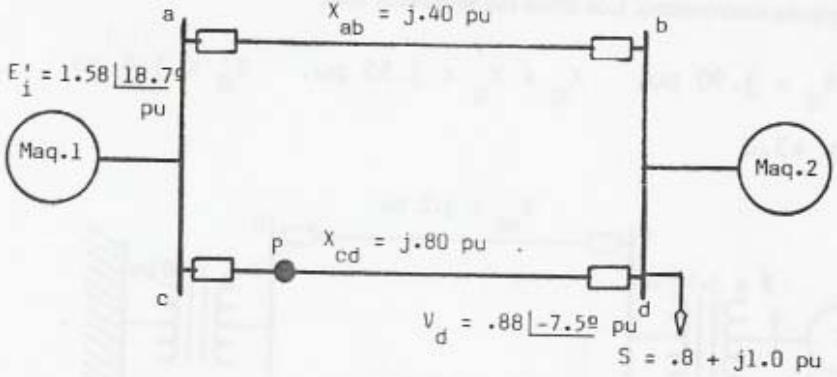
$V_1 = 1.1\angle 0^\circ$ pu, $V_4 = 1.0\angle -3.0^\circ$ pu, S = 1.2 + j1.5 pu



14. Dos máquinas sincrónicas están interconectadas como lo indica la figura siguiente. Si ocurre un cortocircuito trifásico en la línea c-d a 30% del lado c, indicado con el punto P, se abren los interruptores para aislar el cortocircuito. Calcular la ecuación de oscilación de cada una de las máquinas durante el cortocircuito y después de aislar el cortocircuito. Usar técnicas matriciales en la reducción de redes. Las características de las máquinas son:

M_1: X_d = j.90 pu, $X_q = X'_q$ = j.55 pu, X'_d = j.4 pu,
H = 3.0

M_2: X_d = j.8 pu, $X_q = X'_q$ = j.65 pu, X'_d = j.5 pu,
H = 3.8



15. En el problema del Ejemplo 14 calcular la ecuación de oscilación de la máquina 1 durante el cortocircuito y después de aislar el cortocircuito tomando a la máquina 2 como referencia.

BIBLIOGRAFIA

1. ANDERSON PAUL M. Analysis of Faculted Power Systems, Iowa State Press, Ames Iowa, 1975.
2. BRAUER, NOHEL & SCHNEIDER. Linear Mathematics, W.A. Benjamin, INC. 1970.
3. BROWN HOMER E. Solution of Large Networks by Matrix Methods. John Wiler & Sons, Inc. 1970.
4. BYERLY & KIMBARK. Stability of Large Electric Power Systems. IEE Press, 1974.
5. IEEE STANDARD DICTIONARY OF ELECTRICAL AND ELECTRONICS TERMS, Published by The Institute of Electrical and Electronics Engineers,Inc. New York, N.Y., 1984.
6. IEEE TASK FORCE ON TERMS & DEFINITIONS. "Proposed Terms & Definitions for Power System Stability". TRANS. IEEE, Vol, PAS - 101, Páginas 1894 - 1898. July 1982.
7. ELGER OLLE I. Basic Electric Power Engineering. Adisson-Wesley Publishing Company. 1877.
8. ELGERD OLLE I. Electric Energy Systems Theory: An Introduction. McGraw-Hill. New York. 1921.
9. FITZGERALD, KINGSLEY AND KUSKO. Electric Machinery, 3rd edition. McGraw-Hill. New York. 1921.
10. GREENSPAN DONALD. Discrete Numerical Methods in Physics and Engineering. Academic Press, Inc. 1974.
11. GREENSPAN DONALD. Introduction to Numerical Analysis. Markham Publishing Company. 1971.
12. GROSS CHARLES A. Power Systems Analysis. John Wiley & Sons. 1979.

13. KIMBARK E.W. Power Stability, Vol. 2, Power Circuit Breakers and Protective Relays. John Wiley & Sons. New York. 1967.

14. KIMBARK E.W. Power System Stability, Vol 3, Synchronous Machines. Wiley. New York. 1956.

15. KIRCHMAYER LEON K. Economic Operation of Power Systems. John Wiley & Sons. 1955.

16. KNABLE ALOIN H. Electric Power Systems Enginnering. McGraw-Hill 1967.

17. KRON GABRIEL. Tensors for Circuits. Dover Publications, Inc. 1959.

18. LANGSDORF ALEXANDER S. Theory of Alternating Current Machinery, 2nd edition. McGraw-Hill. 1955.

19. MATSCH LEANDER W. Electromagnetic and Electromechanical Machines. Intext. Scranton, Pa. 1971.

20. NEUENSWANDER JOHN R. Modern Power Systems. International Textbook Co., Scranton, Pa. 1971.

21. RODRIGUEZ MAULIO. Análisis Moderno de Redes Eléctricas. Ediluz, 1986.

22. STAGG & EL-ABIAD. Computer Methods in Power Systems Analysis. Mc-Graw-Hill, Inc. 1968.

23. STEVENSON WILLIAM D. Elements of Power Systems Analysis, 3rd. edition. McGraw-Hill, Inc. 1975.

24. WEEDY B.M. Electric Power Systems, 2nd edition. Wiley, London. 1972.

Análisis de Sistemas de Potencia, del Prof. Maulio Rodríguez, en edición de 1.000 ejemplares, se terminó de imprimir en los talleres gráficos de la Editorial de la Universidad del Zulia (EDILUZ), en noviembre de 1992.

Maracaibo - Venezuela